Простые примеры неабелевой фермионной Т–дуальности в супергравитации

Л. Н. Астраханцев*

[1]*Институт теоретической и математической физики*
Россия, 119192, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корпус 1.
[2]*Московский физико–технический институт*
Россия, 141701, Долгопрудный, Институский переулок, д. 9.
[3]*Институт теоретической и экспериментальной физики*
Россия, 117218, Москва, ул. Большая Черемушкинская, д. 25.

(Поступила в редакцию 19.05.2022; подписана в печать 03.06.2022)

Правила преобразования полей при обычной фермионной Т–дуальности требуют антикоммутации фермионных изометрий, что приводит к комплексным спинорам Киллинга и к комплексным дуальным фонам. Мы обобщаем данные преобразования полей в случае неантикоммутирующих фермионных изометрий и показываем, что результирующие фоны являются решениями двойной теории поля. Для наглядности приведены явные простые примеры преобразований неабелевой фермионной Т–дуальности в пространстве Минковского, дающие как комплексные, так и действительные фоны. Некоторые из наших примеров с помощью бозонной Т–дуальности можно сделать обычными супергравитационными решениями, другие же, напротив, являются чисто негеометрическими решениями. Приведена классификация геометрических и негеометрических решений и их связь с дуальным временем.

PACS: 04.65.+e, 11.25.-e. УДК: 53.01
Ключевые слова: супергравитация, т-дуальность, двойная теория поля, неабелева фермионная т-дуальность, теория струн.

ВВЕДЕНИЕ

Плодотворный подход к анализу структуры физических теорий опирается на исследование их симметрий. Таким образом мы преодолеваем трудности, связанные с возможным плохим выбором степеней свободы, что позволяет нам выбрать их лучше и удобнее. Примером из учебника является переформулировка теории Максвелла на языке четырехмерных тензоров, а не в терминах трехмерных полей, что легко позволяет увидеть инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Теория струн и супергравитация обладают множеством дуальных симметрий, связывающих конфигурации фонового поля, которые эквивалентны друг другу с точки зрения струны. Ограничиваясь пертурбативными дуальностями в $d = 10$ суперструнной сигма-модели, можно вспомнить, что среди них присутствуют бозонная Т-дуальность (абелева, неабелева и, в более общем смысле, симметрии Пуассона-Ли) и фермионная Т-дуальность. Обычное преобразование абелевой бозонной Т–дуальности начинается со струны во внешнем фоне, имеющем d коммутирующих векторов Киллинга, представляющих группу изометрий $U(1)^d$. Откалибровав каждую симметрию и введя d множителей Лагранжа, чтобы сохранить количество степеней свободы на мировом листе, мы можем переписать модель в формализме первого рода. Проинтегрировав по множителям Лагранжа, мы получаем исходную теорию, а интегрирование по соответствующим калибровочным полям приводит нас к той же сигма-модели, но на другом фоне [1, 2]. Эти два фона связаны т.н. правилами Бушера, которые в частности перемешивают метрику g и b-поле [3]. Процедуру Бушера можно обобщить на неабелевы группы изометрии, и в этом случае симметрия называется неабелевой Т–дуальностью [4] и Т–дуальностью Пуассона-Ли [5, 6]. Больше подробностей о симметрии Т–дуальности и ее глобальной структуре см., например, [7].

Несмотря на то, что распространение этой идеи на суперпространства является концептуально простым, оно было разработано гораздо позже [8]. Вместо изометрии векторов Киллинга предполагается инвариантность фоновых суперполей относительно сдвига фермионной координаты в суперпространстве. Отсюда следует существование ненарушенной суперсимметрии, параметризуемой спинорным полем Киллинга. Начиная с действия суперструны в пространственно-временном суперсимметричном формализме, например, как чисто спинорная сигма-модель Грина-Шварца или Берковица, фермионная версия процедуры Бушера дает правила преобразования полей супергравитации [8]. Эти правила влияют только на дилатон и напряженность полей из RR сектора, но не влияют на метрику и $NS-NS$ 2-форму. Первоначально представленная как основа $AdS^5 \times S^5$ Т–самодуальности, фермионная Т–дуальность является важной частью описания в теории струн в соответствии Амплитуда/Петля Вильсона [8]. Для обзора фермионной Т–дуальности и некоторых соответствующих открытий см. [9].

Обычная фермионная Т–дуальность сильно ограничена коммутационными соотношениями, эффективно это приводит к комплексным фермионным направлениям в суперпространстве, что в свою очередь приво-

* lev.astrakhantsev@phystech.edu

дит к комплексным дуальным фонам. Для получения действительного дуального фона применяют цепочку из нескольких абелевых фермионных Т–дуальностей. Естественная цель состоит в том, чтобы модифицировать или расширить абелеву фермионную процедуру Т–дуальности таким образом, чтобы можно было намного легче получить дейсвительный дуальный фон. Обобщение фермионного преобразования Т–дуальности было предложено при рассмотрении наиболее общей фермионной симметрии супергравитации II типа [10]. Было показано, что такое преобразование потенциально может давать действительные дуальные фоны, однако, насколько нам известно, до сих пор не было представлено ни одного примера. Альтернативный подход, который мы используем, заключается в ослаблении абелева ограничения и, таким образом, развитии неабелевой фермионной Т–дуальности. Как мы увидим, местом обитания для неабелевых фермионных Т–дуальных фонов является, по-видимому, двойная теория поля. Супергравитационные фоны являются подмножеством фонов в двойной теории поля.

1. ФЕРМИОННАЯ Т–ДУАЛЬНОСТЬ

Фермионная Т–дуальность требует инвариантности суперполей при сдвиге фермионной координаты. Такая сдвиговая симметрия эквивалентна ненарушенной суперсимметрии, определяемой в теории супергравитации типа II парой спиноров Киллинга, с одинаковой или противоположной киральностью в теориях IIA или IIB соответственно. Антикоммутационное ограничение для данной пары определяется занулением следующего вектора Киллинга:

$$\tilde{K}^m = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon\bar{\gamma}^m\epsilon - \hat{\epsilon}\gamma^m\hat{\epsilon} & \text{(IIA)} \\ \epsilon\bar{\gamma}^m\epsilon + \hat{\epsilon}\bar{\gamma}^m\hat{\epsilon} & \text{(IIB)} \end{array} \right\} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \begin{array}{c}\text{абелево}\\ \text{ограничение.}\end{array} \tag{1}$$

Фермионный Т–дуальный фон может быть получен с помощью фермионной версии правил Бушера:

$$\begin{aligned} e^{\phi'}F' &= e^{\phi}F + 16\, i\,\frac{\epsilon\otimes\hat{\epsilon}}{C}, \\ \phi' &= \phi + \frac{1}{2}\log C. \end{aligned} \tag{2}$$

Фоновыми полями в данном преобразовании являются RR биспинор F и дилатон ϕ, причем скалярный параметр C определяется из следующей системы уравнений с помощью спиноров Киллинга:

$$\partial_m C = \left\{ \begin{array}{ll} i(\epsilon\bar{\gamma}_m\epsilon + \hat{\epsilon}\gamma_m\hat{\epsilon}) & \text{(IIA)}, \\ i(\epsilon\bar{\gamma}_m\epsilon - \hat{\epsilon}\bar{\gamma}_m\hat{\epsilon}) & \text{(IIB)}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Обозначим $\partial_m C = iK_m$, так как выражение выше очень схоже с $\tilde{K}^m$.

Дале мы увидим, как модифицировать данное преобразование, чтобы рассмотреть неабелев случай.

1.1. Неабелев случай

Что произойдет при нарушении абелева ограничения? Теперь мы имеем оба вектора Киллинга $K_m = \epsilon\bar{\gamma}_m\epsilon - \hat{\epsilon}\bar{\gamma}_m\hat{\epsilon}$ и $\tilde{K}^m = \epsilon\bar{\gamma}^m\epsilon + \hat{\epsilon}\bar{\gamma}^m\hat{\epsilon}$ не равными нулю (для определенности рассмотрим IIB теорию). Теперь преобразование (2) выводит наше решение из супергравитации. Посмотрим на K и $\tilde{K}$, с помощью тождеств Фирца можно показать, что они ортогональны $\tilde{K}^m K_m = 0$. Так как $\tilde{K}^m$ является вектором Киллинга, то K_m можно представить как производную скаляра аналогично (3). Более того, выясняется, что $\nabla_m\tilde{K}^m = 0$.

Данные наблюдения позволяют предположить, что фермионный Т–дуальный фон может быть определен с помощью тех же правил (2), но с некоторой добавкой к скалярному параметру C:

$$\begin{aligned} \partial_m C &= iK_m - ib_{mn}\tilde{K}^n, \\ \tilde{\partial}^m C &= i\tilde{K}^m, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\tilde{\partial}^m$ обозначает производную по дуальной координате $\tilde{x}_m$ в двойной теории поля, и слагаемое с b_{mn} добавлено для самосогласованности двух уравнений. Также из двойной теории поля мы получаем следующие ограничения на функцию C, т.н. section condition constraint(SCC):

$$\partial_m C\tilde{\partial}^m C = 0, \quad \partial_m\tilde{\partial}^m C = 0. \tag{5}$$

2. ПРИМЕРЫ

В качестве простого примера всей вышеизложенной теории рассмотрим плоское пространство Минковского в $d = 10$, являющееся максимально суперсимметричным решением супергравитации, т.е. существует 32 фермионных направления, задаваемых парой постоянных спиноров Киллинга $(\epsilon_i, 0)$, $(0, \hat{\epsilon}_i)$, $i \in \{1, \ldots, 16\}$:

$$(\epsilon_i)^\alpha = \delta_i{}^\alpha, \quad (\hat{\epsilon}_j)^{\hat{\alpha}} = \delta_j{}^{\hat{\alpha}}. \tag{6}$$

Рассмотрим несколько примеров, основынных на различных выборах спиноров Киллинга. Для всех приведенных здесь решений можно показать, что они удовлетворяют уравнениям движения двойной теории поля, см. более подробную версию данной работы [11].

2.1. Геометрический пример

Выберем спиноры следующим образом:

$$(\epsilon_1 - i\epsilon_{16}, -\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_{16}). \tag{7}$$

Подставляя спиноры в (4) мы видим, что $\partial_1 C = 4$, $\tilde{\partial}^9 C = 4i$, и получаем

$$C = 4(x^1 + i\tilde{x}_9). \tag{8}$$

Теперь получим неабелевый T–дуальный фон с помощью (2). Метрика так и останется плоской, поле b так и останется нулевым. Мы получим нетривиальный дилатон

$$\phi = \frac{1}{2}\log 4(x^1 + i\tilde{x}_9) \tag{9}$$

и поля RR (считаем, что мы в IIB):

$$\begin{gathered} F_0 = -2\,i\,C^{-3/2}, \\ F_{245} = F_{236} = -F_{357} = F_{467} = -F_{348} = \\ = -F_{568} = F_{278} = -F_{019} = 2\,C^{-3/2}, \\ F_{02347} = F_{02358} = F_{02468} = F_{02567} = -F_{03456} = \\ = -F_{03678} = -F_{04578} = F_{25679} = F_{14679} = F_{12579} = \\ = F_{23479} = -F_{34569} = -F_{12369} = -F_{12459} = -2\,i\,C^{-3/2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Данные решения похожи на аналогичные фоны для абелевой фермионной T–дуальности, разница заключается в том, что теперь полученный фон не является решением супергравитации, так как напрямую зависит от дуальной координаты. Геометрическим данный пример называется из соображений, что если мы сделаем бозонную T–дуальность вдоль координаты $\tilde{x}_9 \leftrightarrow x^9$, то мы получим теорию супергравитации IIA с дилатоном $\phi = \frac{1}{2}\log 4(x^1 + ix^9)$ и новыми RR полями, перемешанными в соответствие с $F'^{\alpha}{}_{\hat{\beta}} = F^{\alpha\hat{\delta}}(\bar{\gamma}^9)_{\hat{\delta}\hat{\beta}}$. Получаем, что (9),(10) является комплекснозначным решением уравнений двойной теории поля, а также принадлежит геометрической орбите T–дуальности, т.е. бозонная T–дуальность переводит данное решение в комплекснозначное решение супергравитации.

2.2. Негеометрический пример

Теперь рассмотрим преобразование с одним спинором:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_{10}), \\ \hat{\epsilon} &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

что ведет к следующему подлинно негеометрическому решению

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \eta_{mn}, \quad b_{mn} = 0, \\ e^{2\phi} &= x^3 + \tilde{x}_3 + i(x^9 + \tilde{x}_9), \\ F_{(p)} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

которое не может быть бозонно T-дуализировано в какой либо геометрический фон, и поэтому является подлинно негеометрическим по определению из [12]. Дилатон имеет необычную зависимость от дуальных координат, т.е. от комбинации вида $x \pm \tilde{x}$, однако все ограничения(SCC) на C выполнены. Все поля RR равны нулю, так как мы выбрали $\hat{\epsilon} = 0$.

2.3. Негеометрический пример с дуальным временем

Выберем спиноры как в предыдущий раз, но проще

$$(\epsilon_9, 0). \tag{13}$$

Тогда новый фермионный T–дуальный фон останется Минковским, но с нетривиальным дилатоном:

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \eta_{mn}, \quad b_{mn} = 0, \\ e^{2\phi} &= i(x^0 - \tilde{x}_0 - x^9 - \tilde{x}_9), \\ F_{RR} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Обратим внимание, что данный фон может быть сделан действительным, если мы подкрутим фазу у спинора Киллинга:

$$(e^{-i\frac{\pi}{4}}\epsilon_9, 0), \tag{15}$$

что дает дилатон $e^{2\phi} = x^0 - \tilde{x}_0 - x^9 - \tilde{x}_9$. Этот действительный фон также является решением двойной теории поля, но все равно является неудовлетворительным, так как включает в себя зависимость от дуального времени. В принципе получается невозможно избежать зависимости от дуального времени не используя линейных комбинаций из спиноров Киллинга с относительной комплексной фазой между различными членами. Причина в том, что суперсимметричный вектор Киллинга $\tilde{K}^m$ всегда свето- либо времениподобный в действительной супергравитации [13], что дает зависимость от $\tilde{x}_0$ как следствие уравнений (4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, мы предложили и разработали супергравитационное описание неабелева обобщения фермионной T–дуальности. Конструкция строится на наблюдении, что ослабление абелева ограничения $\tilde{K}^m = 0$ для спиноров Киллинга делает фермионный T–дуальный фон зависимым от дуальных координат двойной теории поля. Причем в рамках двойной теории поля SCC выполняется автоматически, в полном согласовании с решениями уравнений движения. Также в случае суперкосетных многообразий можно показать, что наш подход полностью согласуется с рассмотрением струны Грина–Шварца на суперкосетном многообразии [11].

Неабелева фермионная T–дуальность порождает решения уравнений движения двойной теории поля. Здесь мы проверили это для пустого пространства Минковского, различные случаи можно объеденить в таблицу . Заметим, что по крайней мере для пространства-времени Минковского невозможно сгенерировать реальное решение, не зависящее от дуального времени, при дуализации вдоль одиночной фермионной изометрии. К сожалению, зависимость от дуального времени делает фон эффективно комплексным из-за неправильного знака кинетических членов у полей RR.

Таблица. Фоны, генерируемые неабелевой T–дуальностью

Поля	Зависимость от дуального времени	Орбита
Комплексные	нет	геометрическая
Действительные	да	негеометрическая
Комплексные	нет	негеометрическая

Помимо свойства действительности дуальных фонов интерес представляет их зависимость от дуальных координат, отраженных в последнем столбце таблицы. Обычно C оказывается линейной функцией вида $\alpha x^m + \beta \tilde{x}_n$, где x^m и $\tilde{x}_n$ - некоторые конкретные геометрические и дуальные координаты. В случае $m \neq n$ фон лежит на геометрической орбите бозонной T-дуальности в смысле [13]. Действительно, тогда T-дуальность вдоль координаты $\tilde{x}_n$ превратит ее в геометрическую x^n, и всякая зависимость от дуальных координат исчезнет. Напротив, когда $m = n$ нельзя убрать зависимость от дуальной координаты с помощью бозонной T–дуальности, и, следовательно, соответствующий фон лежит на негеометрической орбите и называется подлинно негеометрическим. Примеры таких подлинно негеометрических фонов были найдены в [13] в обобщенных редукциях Шерка-Шварца двойной теории поля для матриц твиста, нарушающих SCC в двойной теории поля. Подлинно негеометрические фоны, которые мы получаем, удовлетворяют SCC в двойной теории поля и являются допустимыми фонами для теории струн.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессорам Э.Т. Мусаеву и И.В. Бахматову, а также К. Губареву за плодотворные обсуждения данной работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 20-72-10144).

[1] *Buscher T.* // Phys.Lett. 1988. **201**. P. 466.
[2] *Buscher T.* // Phys.Lett. 1987. **194**. P. 59.
[3] *Buscher T.* // Phys.Lett. 1985. **159**. P. 127.
[4] *de la Ossa X.C., Quevedo F.* // Nucl. Phys. 1993 **403**. P. 377
[5] *Klimcik C., Severa P.* // Phys. Lett. B 1995 **351**. P. 455
[6] *Klimcik C.* // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 1996 **46**. P. 116
[7] *Alvarez E.,Alvarez-Gaume L., Lozano Y.* // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 1995 **41**. P. 1
[8] *Berkovits N.,Maldacena J.* // JHEP 2008 **0809**. P. 62
[9] *Colgain E. O.* // Int. J. Mod. Phys. A 2012 **27**.
[10] *Godazgar P., Perry M. J.* // JHEP 2011 **01**. P. 32.
[11] *Astrakhantsev L., Musaev E., Bakhmatov I.* // JHEP 2021 **09**. P. 135.
[12] *Dibitetto G., Fernandez-Melgarejo J. J., Marques D., Roest D.* // Fortsch. Phys. 2012 **60**. P. 1123.
[13] *Gibbons G. W., Hull C. M.* // Phys. Lett. B 1982 **109**. P. 190.

Simple examples of non-abelian fermionic T-duality in supergravity

L. N. Astrakhantsev
Institute of Theoretical and Mathematical Physics. Moscow 119192, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology. Moscow 141701, Russia
Institute of Theoretical and Experimantal Physics. Moscow 117218, Russia
E-mail: lev.astrakhantsev@phystech.edu

Field transformation rules of the standard fermionic T–duality require fermionic isometries to anticommute, which leads to complexification of the Killing spinors and results in complex valued dual backgrounds. We generalize the field transformations to the setting with non–anticommuting fermionic isome- tries and show that the resulting backgrounds are solutions of double field theory. Explicit examples of non-abelian fermionic T–dualities that produce complex and real backgrounds in Minkowski space–time are given. Some of our examples can be bosonic T–dualized into usual supergravity solutions, while the others are genuinely non–geometric. There is sort of classification of geometric and non–geometric solutions in this case and their correspondence with dual time.

PACS: 04.65.+e, 11.25.-e.
Keywords: supergravity, t–duality, double field theory, non–abelian fermionic t–duality, string theory.
Received 19 May 2022.

Сведения об авторе

Астраханцев Лев Николаевич — аспирант; e-mail: lev.astrakhantsev@phystech.edu.