Нелокальное расширение релятивистской причинной термодинамики и общерелятивистское уравнение Бюргерса

А. С. Ильин,* А. Б. Балакин†
Казанский федеральный университет, Институт физики, кафедра теории относительности и гравитации Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 18
(Поступила в редакцию 16.05.2022; подписана в печать 23.05.2022)

Разработан феноменологический подход к построению релятивистской модели термо-вязко–упругости, кардинальным элементом которой стало обобщенное уравнение Бюргерса. В качестве ключевого шага мы построили нелокальное обобщение модели Израэля–Стьюарта для релятивистской причинной термодинамики однородной, изотропной космической жидкости, в которой коэффициент при интегральном операторе отвечает за упругие свойства среды. На основании второго закона термодинамики получено интегро–дифференциальное уравнение для эволюции скаляра неравновесного давления и показано, что дифференциальная версия этого уравнения является релятивистским аналогом уравнения Бюргерса, описывающего вязко–упругие процессы в классических средах. Основываясь на полученных таким образом уравнениях для модели среды с объемной вязко–упругостью, мы высказали гипотезу о том, что уравнения для модели со сдвиговой вязко–упругостью также можно представить с помощью соответствующего релятивистского обобщения уравнения Бюргерса; иными словами, уравнение для бесследовой сдвиговой части тензора неравновесного давления получено нами феноменологическим путем по аналогии с точным уравнением для объемной части этого тензора.

PACS: 95.36.+x; 95.35.+d;98.80.-k УДК: 524.8, 530.16, 536.7
Ключевые слова: темная энергия, темная материя, реология.

ВВЕДЕНИЕ

Релятивистская ковариантная теория вязко–упругих, теплопроводящих сплошных сред, сформулированная во второй половине прошлого века классиками этой науки [1–10], имеет несколько аспектов, которые не позволяют пока назвать эту науку завершенной. В первую очередь, речь идет о проблеме причинности в череде явлений, которые описываются данным классом теорий в моделях с сильными гравитационными полями и высокоэнергетичными космическими субстратами (темная энергия, темная материя). Математики склонны относить эту проблему к вопросу о гиперболичности основополагающих уравнений, которая ассоциируется с конечной скоростью распространения информационных сигналов; однако, эта важнейшая деталь не исчерпывает проблемы причинности, ибо в науке о космосе важное место отводится геометрическим аспектам причинных структур, например, горизонтам черных дыр и горловинам кротовых нор. Для одного подкласса названной теории, а именно, для релятивистской термодинамики вязкой теплопроводящей жидкости, проблема причинности была элегантно решена Израэлем и Стьюартом [11]. Благодаря этим авторам, космологи и астрофизики получили замечательный инструмент для теоретического исследования причинно связанных неравновесных необратимых процессов в космологических и астрофизических системах [12–24]. Однако, в причинной термодинамике Израэля–Стьюарта нет адекватного места упругим взаимодействиям в сплошной среде, и эта деталь стимулирует поиск новых расширенных моделей причинной термодинамики релятивистских вязко–упругих сред [25, 26].

Как спланировано наше исследование? Во-первых, мы обсуждаем классическую предысторию теории Израэля–Стьюарта, обращая внимание на модель Бюргерса [27], которая является естественным обобщением моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта, характеризуется набором производных второго порядка и обладает свойством причинности. Следующий шаг в нашем подходе связан с нелокальным обобщением теории Израэля–Стьюарта для изотропной модели, в которой присутствует только объемная вязкость и только скалярная (изотропная) часть тензора напряжений. Как показано в работе [28], соответствующее точное эволюционное уравнение имеет вид релятивистского аналога уравнения Бюргерса. Эта задача допускает точное решение, и она предоставила нам возможность феноменологического моделирования уравнения эволюции бесследового сдвигового тензора напряжений, для которого у нелокального обобщения теории Израэля–Стьюарта нет адекватного интегрального инструмента. В данной работе представлен математический формализм теории; в ближайшее время мы планируем рассмотреть астрофизические приложения данной теории.

1. ПРОЛОГ

В данном разделе мы воспроизводим известные классические факты, приведенные, например, в [8], для того,чтобы обосновать наш интерес к уравнениям

* alexeyilinjukeu@gmail.com
† Alexander.Balakin@kpfu.ru

Бюргерса в контексте теории вязко–упругости. Классическая теория вязко–упругости опирается на два основных локальных закона: во-первых, на закон Гука, согласно которому напряжение σ пропорционально деформации ϵ; во-вторых, на закон Ньютона, в котором констатируется, что напряжение σ пропорционально производной по времени от деформации $\dot{\epsilon}$. Символически эти законы выглядят следующим образом:

$$\sigma = E_0\epsilon, \quad \sigma = \eta\dot{\epsilon}. \tag{1}$$

Коэффициенты пропорциональности интерпретируются, соответственно, как модуль упругости E_0 и коэффициент вязкости η. При описании более сложных вязко–упругих моделей принято обращаться к механическим аналогам, сконструированным из пружин (символизирующих тело Гука (рис.1, *а*)) и поршней (тело Ньютона (рис.1, *б*)).

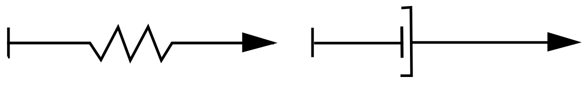

Рис. 1. Базовые вязко–упругие механические модели: *а* — модель Гука, *б* — модель Ньютона

Если указанные два элемента соединены последовательно, растяжения на каждом из них складываются, а напряжения считаются равными. В этом случае модель носит имя Максвелла (рис. 2), а ключевое соотношение между напряжением и деформацией имеет вид:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0}{\eta}\sigma = E_0\dot{\epsilon}\,. \tag{2}$$

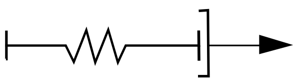

Рис. 2. Механический аналог вязко–упругой модели Максвелла

При параллельном соединении поршня и пружины (рис. 3) растяжения считаются равными, но складываются напряжения. Такая модель связана с именами Кельвина и Фойгта; она описывается соотношением

$$\sigma = E_0\epsilon + \eta\dot{\epsilon}\,. \tag{3}$$

Очевидно, что ключевые уравнения в обеих моделях представлены дифференциальными уравнениями первого порядка. Если мы ищем модели с ключевыми уравнениями второго порядка, мы неминуемо приходим к одной из двух известных моделей Бюргерса. Первая модель Бюргерса ассоциируется с параллельным соединением двух моделей Максвелла (рис. 4,*а*);

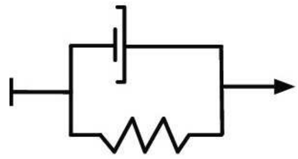

Рис. 3. Модель Кельвина-Фойгта

она описывается уравнением

$$\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2}\right) + \sigma\frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2} = \\ = \dot{\epsilon}E_1E_2\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right) + \ddot{\epsilon}(E_1 + E_2)\,. \tag{4}$$

Вторая модель Бюргерса представлена последовательным соединением моделей Ньютона, Кельвина-Фойгта и Гуковской пружины (рис.4, *б*); ей соответствует ключевое уравнение

$$\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2}\right) + \sigma\frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2} = \dot{\epsilon}\frac{E_1E_2}{\eta_1} + \ddot{\epsilon}E_2\,. \tag{5}$$

Оба уравнения Бюргерса содержат производные по времени до второго порядка включительно. В этих уравнениях явно присутствуют параметры, описывающие упругость моделируемой системы, а именно, E_1 и E_2.

Говоря о проблеме теплопроводности в классической теории, отметим, что простейшим законом, связывающим поток тепла $\mathbf{q}$ и температуру T, является закон Фурье $\mathbf{q} = -\chi\nabla T$. Проблема причинности в теории теплопроводности была решена Каттанео [29], который предложил использовать закон

$$\tau\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -\chi\nabla T\,. \tag{6}$$

Соответствующий закон изменения температуры

$$\tau\ddot{T} + \dot{T} = -\chi\Delta T \tag{7}$$

описывается гиперболическим уравнением, что решает проблему причинности.

2. О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРИЧИННОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ ВЯЗКИХ СРЕД

Базовым элементом релятивистской феноменологической термодинамики является второй закон термодинамики, который гласит, что скаляр производства энтропии σ замкнутой физической системы должен быть неотрицательным, $\sigma \geq 0$. Эта величина в релятивистской термодинамике определяется как ковариантная дивергенция 4-вектора потока энтропии $\sigma = \nabla_k S^k$. Различие между моделями термодинамики необратимых процессов заключается в структуре 4-вектора S^k. Для того, чтобы мотивированно подойти к феноменологической теории Бюргерса, мы кратко напомним о модели Эккарта [30], о модели Израэля–Стьюарта [11] и о нелокальной модели [28].

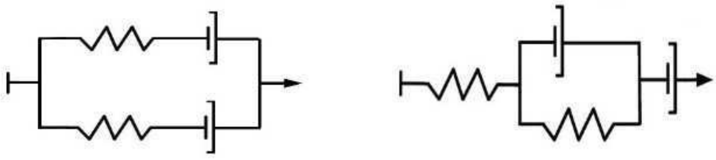

Рис. 4. Модели Бюргерса в представлении Максвелла (*а*) и Кельвина (*б*)

2.1. Модель Эккарта

Согласно подходу Эккарта 4-вектор потока энтропии имеет вид

$$S^k_{(\mathrm{Eckart})} = s_0 n U^k + \frac{1}{T} q^k \,, \qquad (8)$$

где n - скаляр плотности числа частиц, T - температура, s_0 - скаляр удельной энтропии, U^k - времениподобный 4-вектор скорости среды и q^k - пространственноподобный 4-вектор теплового потока. Скаляр s_0 входит в уравнение Гиббса (первое начало термодинамики)

$$De + PD\left(\frac{1}{n}\right) = TDs_0 \,, \qquad (9)$$

где e - это плотность энергии, приходящаяся на одну частицу, а $W = en$, соответственно, - плотность энергии среды. Символом P обозначено изотропное Паскалевское равновесное давление, а оператор $D \equiv U^k \nabla_k$ задает конвективную производную. Во всех моделях, представленных ниже, используется алгебраическое представление тензора энергии-импульса среды:

$$T^{ik} = enU^i U^k + U^i q^k + U^k q^i - \Delta^{ik} P + \Pi^{ik} \,. \qquad (10)$$

Здесь $\Delta^{ik} = g^{ik} - U^i U^k$ - проектор, а тензор

$$\Pi^{ik} = \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi \,, \quad \Pi \equiv g_{ik}\Pi^{ik} \,, \qquad (11)$$

описывает неравновесное давление среды. Полный тензор энергии - импульса обладает нулевой дивергенцией, $\nabla_k T^{ik} = 0$. Как обычно, эта система из четырех уравнений разбивается на скалярную и векторную подсистемы:

$$DW + (W+P)\Theta - q^k DU_k + \nabla_k q^k - \Pi^{ik}\nabla_k U_i = 0 \,, \qquad (12)$$

$$(W+P)DU^j - \overset{\perp}{\nabla}{}^j P = -q^j\Theta - q^k \overset{\perp}{\nabla}_k U^j - \\ - \Delta^j_k Dq^k + \Pi^{jk} DU_k - \Delta^j_m \overset{\perp}{\nabla}_k \Pi^{mk} \,. \qquad (13)$$

Скаляр $\Theta = \nabla_k U^k$ описывает растяжение/сжатие потока среды, а оператор $\overset{\perp}{\nabla}_k = \Delta^l_k \nabla_l$ играет роль пространственной части 4-вектора градиента. Если совместно использовать уравнение Гиббса (9), закон сохранения полной энергии (12), получим скаляр производства энтропии в виде

$$\sigma = \frac{1}{T}\left[\Pi^{ik}\overset{\perp}{\nabla}_k U_i + q^k\left(DU_k - \frac{1}{T}\overset{\perp}{\nabla}_k T\right)\right] \,, \qquad (14)$$

где DU_k - это 4-вектор ускорения среды. В результате, подход Эккарта гарантирует, что σ неотрицательно, если

$$q^i = \lambda\left[\overset{\perp}{\nabla}{}^i T - TDU^i\right] \,, \quad \Pi = 3\zeta\Theta \,, \quad \Pi_{ik(0)} = \eta\sigma_{ik} \,, \qquad (15)$$

поскольку при этом

$$T\sigma = -\frac{1}{\lambda T} q^k q_k + \frac{1}{\eta}\Pi^{ik}_{(0)}\Pi_{ik(0)} + \frac{1}{9\zeta}\Pi^2 \geq 0 \,. \qquad (16)$$

Подход Эккарта порождает три феноменологические константы: коэффициент теплопроводности λ, коэффициент сдвиговой вязкости η и коэффициент объемной вязкости ζ. В формулах (15) использовано стандартное разложение ковариантной производной 4-вектора скорости среды:

$$\nabla_m U_n = U_m DU_n + \sigma_{mn} + \omega_{mn} + \frac{1}{3}\Delta_{mn}\Theta \,, \qquad (17)$$

где симметричный бесследовый тензор сдвига σ_{mn} и антисимметричный тензор вращения потока среды ω_{mn} заданы, соответственно, формулами:

$$\sigma_{ik} \equiv \left[\frac{1}{2}\left(\overset{\perp}{\nabla}_i U_k + \overset{\perp}{\nabla}_k U_i\right) - \frac{1}{3}\Theta\Delta_{ik}\right] \,, \\ \omega_{mn} \equiv \frac{1}{2}\left(\overset{\perp}{\nabla}_i U_k - \overset{\perp}{\nabla}_k U_i\right) \,. \qquad (18)$$

Эти тензоры ортогональны 4-вектору скорости U^k, т.е., $\sigma_{mn}U^m = 0 = \sigma_{mn}U^n$ и $\omega_{mn}U^m = 0 = \omega_{mn}U^n$.

2.2. Модель Израэля–Стьюарта

В причинной термодинамике Израэля–Стьюарта принят следующий анзац для 4-вектора потока энтропии:

$$S^k_{(\mathrm{IS})} = S^k_{(\mathrm{Eckart})} + \frac{1}{T} q^l \left[\delta^k_l \alpha_0 \Pi + \alpha_1 \Pi^k{}_{l(0)} \right] - \\ - \frac{1}{2T} U^k \left[\beta_0 \Pi^2 - \beta_1 q^m q_m + \beta_2 \Pi^{mn}_{(0)} \Pi_{mn(0)} \right] . \quad (19)$$

Фактически, к формуле Эккарта добавлены все возможные слагаемые второго порядка по неравновесным потокам Π, q^k и $\Pi_{mn(0)}$ в комплекте с новыми феноменологическими параметрами α_0, α_1, β_0, β_1 и β_2. Следуя той же логической схеме расчета производства энтропии, что и в модели Эккарта, получаем формулу

$$T\sigma = \Pi \left[\frac{1}{3}\Theta - \beta_0 D\Pi - \frac{1}{2} T \Pi \nabla_l \left(\frac{\beta_0 U^l}{T} \right) + \alpha_0 \nabla_k q^k \right] + \\ + q^k \left[DU_k - \frac{1}{T} \overset{\perp}{\nabla}_k T + \beta_1 D q_k + \frac{\beta_1}{2} q_k \Theta + \frac{1}{2} T q_k D \left(\frac{\beta_1}{T} \right) + T \nabla_k \left(\frac{\alpha_0 \Pi}{T} \right) + T \nabla_l \left(\frac{\alpha_1}{T} \Pi^l{}_{k(0)} \right) \right] + \quad (20) \\ + \Pi^{ik}_{(0))} \left[\sigma_{ik} - \beta_2 D \Pi_{ik(0)} - \frac{\beta_2}{2} \Pi_{ik(0)} \Theta - \frac{1}{2} T \Pi_{ik(0)} D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) + \alpha_1 \nabla_{(i} q_{k)} \right] .$$

Производство энтропии оказывается неотрицательным, если использовать следующие определения для величин Π, q^i и $\Pi_{ik(0)}$:

$$\beta_0 D\Pi + \Pi \left[\frac{1}{9\zeta} + \frac{T}{2} (\Theta + D) \left(\frac{\beta_0}{T} \right) \right] = \frac{1}{3}\Theta + \alpha_0 \nabla_k q^k , \quad (21)$$

$$\beta_1 \Delta^k_l D q^l + q^k \left[\frac{1}{\lambda T} + \frac{T}{2} (\Theta + D) \left(\frac{\beta_1}{T} \right) \right] = \frac{1}{T} \overset{\perp}{\nabla}{}^k T - DU^k - T \overset{\perp}{\nabla}{}^k \left(\frac{\alpha_0 \Pi}{T} \right) - T \Delta^k_s \nabla_l \left(\frac{\alpha_1}{T} \Pi^{ls}_{(0)} \right) , \quad (22)$$

$$\beta_2 \Delta^m_i \Delta^n_k D \Pi_{mn(0)} + \Pi_{ik(0)} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{T}{2} (\Theta + D) \left(\frac{\beta_2}{T} \right) \right] = \sigma_{ik} + \alpha_1 \Delta^m_i \Delta^n_k \nabla_{(m} q_{n)} . \quad (23)$$

Эти канонические результаты показывают, что при отсутствии теплового потока скаляр растяжения Θ является источником скалярной части неравновесного давления Π; тензор сдвига σ_{ik} есть источник для бесследовой части давления $\Pi^{ik}_{(0)}$; разность $\frac{1}{T}\overset{\perp}{\nabla}{}^k T - DU^k$ есть источник возникновения теплового потока.

Здесь следует подвести промежуточный итог.

1. В модели Эккарта связь теплового потока с градиентом температуры диктуется законом Фурье; неравновесное давление определяется законом Ньютоновской жидкости.

2. В модели Израэля–Стьюарта связь теплового потока с градиентом температуры определяется аналогом закона Каттанео; неравновесное давление определяется аналогом закона Максвелла.

3. Ни одна из перечисленных моделей не включает описание упругих свойств среды.

2.3. Нелокальное расширение причинной термодинамики Израэля–Стьюарта

В работе [28] мы расширили модель Израэля–Стьюарта для случая, когда пространство - время считалось пространственно однородным и изотропным. Этот макет удобен тем, что в связи с симметрией пространства-времени, 4-вектор теплового потока q^k и сдвиговая часть неравновесного давления $\Pi_{mn(0)}$ должны быть равны нулю. Более того, все термодинамические величины следует считать функциями только космологического времени; и 4-вектор скорости имеет форму $U^i = \delta^i_0$. Для такой системы мы предложили рассмотреть 4-вектор потока энтропии в виде

$$S^k = s_0 n U^k - \frac{1}{2T} U^k \beta_0 \Pi^2 + \frac{1}{2} \gamma_0 n U^k \left(D^{-1} \Pi \right)^2 , \quad (24)$$

где γ_0 можно интерпретировать как параметр нелокальности; когда он равен нулю мы приходим к классической теории Израэля–Стьюарта в изотропной однородной среде. Оператор, обратный к взятию конвективной производной, определен следующим образом:

$$D(D^{-1}\Pi) = \Pi, \qquad D^{-1}\Pi = \int d\tau \Pi, \qquad d\tau = U_k dx^k . \quad (25)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}\gamma_0 n U^k$ выбран таким образом, потому что его дивергенция равняется нулю в силу закона сохранения числа частиц

$$\nabla_k (n U^k) = 0, \quad \Rightarrow Dn + n\Theta = 0 . \quad (26)$$

В таком случае скаляр производства энтропии запишется следующим образом

$$\sigma = \frac{\Pi}{T} \left[\frac{\Theta}{3} - \beta_0 D\Pi - \frac{T}{2} \Pi \nabla_l \left(\frac{\beta_0 U^l}{T} \right) + \gamma_0 n T (D^{-1}\Pi) \right] . \quad (27)$$

Эта величина неотрицательна, если неравновесное давление Π удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Pi}{9\zeta} = \frac{\Theta}{3} - \beta_0 D\Pi - \frac{T}{2}\Pi\nabla_l\left(\frac{\beta_0 U^l}{T}\right) + \gamma_0 nT(D^{-1}\Pi)\,. \quad (28)$$

Полученное интегро–дифференциальное уравнение (28) может быть записано в форме дифференциального уравнения второго порядка

$$D\left[\frac{\Pi}{9n\zeta T} - \frac{\Theta}{3nT} + \frac{\beta_0}{nT}D\Pi + \frac{\Pi}{2n}(\Theta + D)\left(\frac{\beta_0}{T}\right)\right] = \gamma_0\Pi\,. \quad (29)$$

Если раскрыть скобки, и предположить, что $\beta_0 \neq 0$, то полученное уравнение

$$\begin{gathered} D^2\Pi + D\Pi\left\{D\left[\log\left(\frac{\beta_0^{\frac{3}{2}}}{nT^{\frac{3}{2}}}\right)\right] + \frac{1}{9\beta_0\zeta} + \frac{\Theta}{2}\right\} + \\ +\Pi\left\{-\frac{\gamma_0 nT}{\beta_0} + \frac{nT}{9\beta_0}D\left(\frac{1}{9nT\zeta}\right) + \frac{nT}{\beta_0}D\left[\frac{1}{2n}(\Theta + D)\left(\frac{\beta_0}{T}\right)\right]\right\} = \frac{nT}{3\beta_0}D\left(\frac{1}{nT}\Theta\right) \end{gathered} \quad (30)$$

имеет вид релятивистского аналога уравнения Бюргерса. При этом понятно, что приведенный параметр нелокальности $\frac{\gamma_0 nT}{\beta_0}$ приобретает смысл эффективного параметра упругости (если сравнить (30) с формулами (4), (5)).

3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ФОРМУЛИРОВКЕ ПРИЧИННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМО–ВЯЗКО–УПРУГОСТИ

Вернемся к модели, в которой отличны от нуля все неравновесные термодинамические потоки: 4-вектор потока тепла q^j, скалярная (объемная) составляющая неравновесного давления Π и бесследовая сдвиговая часть $\Pi_{mn(0)}$.

3.1. Уравнение эволюции потока тепла

Начнем с того, что уравнение для теплового потока (22) не требует дальнейшей модификации. Это уравнение есть релятивистское обобщение уравнения Каттанео (6), и оно гарантирует гиперболичность уравнения для температуры. Отметим, что в правой части уравнения (22) имеются источники четырех типов, которые изменяют тепловой поток. Происхождение первого из них, пропорционального градиенту температуры $\overset{\perp}{\nabla}_k T$, обязано классическому закону Фурье для теплопроводности. Второе слагаемое пропорционально 4-вектору ускорения среды DU^k, оно связано с конвективным переносом тепла при движении среды. Третье слагаемое $T\overset{\perp}{\nabla}_k\left(\frac{\alpha_0\Pi}{T}\right)$ содержит объемную часть неравновесного давления и тем самым наследует всю информацию об упругой составляющей деформационного процесса в системе, закодированной в поведении Π. Последний источник $-T\Delta_s^k\nabla_l\left(\frac{\alpha_1}{T}\Pi_{(0)}^{ls}\right)$ несет в себе информацию о деталях эволюции тензора сдвигового напряжения $\Pi_{(0)}^{ls}$.

3.2. Уравнение эволюции объемной части неравновесного давления

Если мы не ограничены требованием изотропии пространства-времени, и если тепловой поток отличен от нуля, то уравнения эволюции для Π имеет вид

$$D\left[\frac{\Pi}{9n\zeta T} - \left[\frac{1}{nT}\left(\frac{1}{3}\Theta + \alpha_0\nabla_k q^k\right)\right] + \frac{\beta_0}{nT}D\Pi + \frac{\Pi}{2n}(\Theta + D)\left(\frac{\beta_0}{T}\right)\right] = \gamma_0\Pi\,, \quad (31)$$

или в развернутой форме

$$\begin{gathered} \frac{\beta_0}{nT}D^2\Pi + D\Pi\left[D\left(\frac{\beta_0}{nT}\right) + \frac{1}{9nT\zeta} + \frac{1}{2n}(\Theta + D)\left(\frac{\beta_0}{T}\right)\right] + \\ +\Pi\left\{-\gamma_0 + D\left(\frac{1}{9nT\zeta}\right) + D\left[\frac{1}{2n}(\Theta + D)\left(\frac{\beta_0}{T}\right)\right]\right\} = D\left[\frac{1}{nT}\left(\frac{1}{3}\Theta + \alpha_0\nabla_k q^k\right)\right]. \end{gathered} \quad (32)$$

Важно отметить, что в данном контексте только дивергенция теплового потока $\nabla_k q^k$ является подходящей скалярной величиной, формирующей источник для изотропной части неравновесного давления. Из бесследового тензора сдвигового давления подходящего скалярного источника сконструировать невозможно.

3.3. Уравнение эволюции сдвиговой части неравновесного давления

Для феноменологического моделирования эволюционного уравнения для сдвиговой части тензора давления $\Pi_{ik(0)}$ мы предлагаем обобщить схему, заложенную в уравнении (29). То есть, мы берем за основу уравнение (23), делим его на плотность числа частиц n и записываем его обобщение

$$\Delta_q^i \Delta_q^k D \left\{ \frac{\beta_2}{n} \Delta_i^m \Delta_k^n D\Pi_{mn(0)} + \Pi_{ik(0)} \left[\frac{1}{\eta n} + \frac{T}{2n} (\Theta + D) \left(\frac{\beta_2}{T} \right) \right] - \frac{1}{n} \left(\sigma_{ik} + \alpha_1 \overset{\perp}{\nabla}_{(i} q_{k)} \right) \right\} = \gamma_2 \Pi_{pq(0)} \,. \tag{33}$$

В правой части добавлено слагаемое линейное по $\Pi_{pq(0)}$ с коэффициентом пропорциональности γ_2. Если $\gamma_2 = 0$, то (33) есть просто дифференциальное следствие (23); если $\gamma_2 \neq 0$, получаем учет упругого слагаемого по аналогии с предыдущим случаем. Произведение проекторов в левой части этого уравнения необходимо для того, чтобы левая часть, так же как и правая, оказалась ортогональной к 4-вектору скорости среды. В развернутом виде это дифференциальное уравнение второго порядка выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\beta_2}{n} \Delta_p^m \Delta_q^n D^2 \Pi_{mn(0)} + \Delta_p^m \Delta_q^n D\Pi_{mn(0)} \left[\frac{1}{\eta n} + \frac{\beta_2 \Theta}{2n} + \frac{T}{2n} D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) + D \left(\frac{\beta_2}{n} \right) \right] + \\ + \frac{\beta_2}{n} D\Pi_{mn(0)} \Delta_p^i \Delta_q^k D \left(\Delta_i^m \Delta_k^n \right) + \Pi_{pq(0)} \left\{ -\gamma_2 + D \left[\frac{1}{\eta n} + \frac{\beta_2 \Theta}{2n} + \frac{T}{2n} D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) \right] \right\} = \\ = \Delta_q^i \Delta_q^k D \left[\frac{1}{n} \left(\sigma_{ik} + \alpha_1 \overset{\perp}{\nabla}_{(i} q_{k)} \right) \right] . \end{gathered} \tag{34}$$

По своей структуре это уравнение имеет вид обобщенного уравнения Бюргерса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена система уравнений, которая предназначена для анализа общерелятивистской модели термо-вязко–упругих процессов в релятивистских сплошных средах. Новизна данной модели заключается в учете упругих взаимодействий в релятивистской сплошной среде. Основанием для такого заявления послужил тот факт, что уравнения, описывающие эволюцию объемной (32) и сдвиговой (34) частей неравновесного давления имеют структуру, аналогичную структуре классического уравнения Бюгерса первого и второго типов (4) и (5), которые как раз и предназначены для моделирования вязко–упругих процессов в классической механике сплошных сред. Аналогию завершает то обстоятельство, что величина $\dot{\epsilon}$ в (4) и (5), которая символизирует производную по времени от тензора деформации, задает так называемый тензор скоростей деформации, состоящий из частных производных от скорости среды по пространственным координатам. В общерелятивистской версии этим величинам соответствуют тензор сдвига σ_{mn} и скаляр растяжения Θ. Вторые производные $\ddot{\epsilon}$ в (4) и (5) представляют собой аналоги выражений $D\sigma_{mn}$, $D\Theta$, полученных в нашей модели. Наконец, важно подчеркнуть, что сама величина ϵ не входит в уравнения Бюргерса (4) и (5), равно как тензор деформации не появляется в представленной модели. Полученные уравнения относятся к гиперболическому типу. Это дает основание считать, что построенная модель описывает причинную релятивистскую термо-вязко–упругость. Мы полагаем, что построенная модель вскоре будет применена к моделированию термо-вязко–упругих процессов в астрофизических и космологических объектах.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 20-02-00280, 20-52-05009).

[1] *Седов Л.И.* // Механика сплошных сред. М.: Наука, 1983.
[2] *Работнов Ю.Н.* // Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Мир, 1980.
[3] *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* // Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1983.

[4] *Чёрный Л.Т.* // Релятивистские модели сплошных сред. М.: Наука, 1983.
[5] *Eringen A.C., Maugin G.A.* // Electrodynamics of Continua. New York: Springer-Verlag, 1989.
[6] *Maugin G.A.* // The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors. An Introduction. Singapore: World Scientific, 1999.
[7] *Maugin G.A.* // J. Math. Phys. 1978. **19**. P. 1198.
[8] *Christensen R.M.* // Theory of viscoelasticity. New York: Dover Publications Inc. Mineola, 2003
[9] *Reiner M.* // Advanced Rheology. London: H.K. Lewis & Co Ltd, 1971.
[10] *Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G.* // Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer Verlag, 1996.
[11] *Israel W., Stewart J.M.* // Ann. Phys. 1979. **118**. P. 341.
[12] *Maartens R., Triginer J.* // Phys. Rev. D. 1997. **56**. P. 4640.
[13] *Zimdahl W.* // Phys. Rev. D. 2000. **61**. P. 083511.
[14] *Zimdahl W., Pavon D., Maartens R.* // Phys. Rev. D. 1997. **55**. P. 4681.
[15] *Zimdahl W.* // Phys. Rev. D. 1996. **53**. P. 5483.
[16] *Herrera L., Pavon D.* // Physica A. 2002. **307**. P. 121.
[17] *Bittencourt E., Gomes L.G., Klippert R.* // Class. Quantum Grav. 2017. **34**. P. 045010.
[18] *Maartens R.* // arXiv:astro-ph/9609119.
[19] *Cruz N., Hernandez-Almada A., Cornejo-Perez O.* // Phys. Rev. D. 2019. **100**. P. 083524.
[20] *Cruz M., Lepe S., Odintsov S.D.* // Phys. Rev. D. 2018. **98**. P. 083515.
[21] *Cruz M., Cruz N., Lepe S.* // Phys. Rev. D. 2017. **96**. P. 124020.
[22] *Cataldo M., Cruz N., Lepe S.* // Phys. Lett. B. 2005. **619**. P. 5.
[23] *Mak M.K., Harko T.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2004. **13**. P. 273.
[24] *Maartens R., Triginer J.* // Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 123507.
[25] *Puetzfeld D., Obukhov Yu.N., Hehl F.W.* // Phys. Rev. D. 2019. **99**. P. 104013.
[26] *Brown J.D.* // Class. Quantum Grav. 2021. **38**. P. 085017.
[27] *Burgers J.M.* // Verh. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1935. **15(3)**. P. 5.
[28] *Balakin A.B., Ilin A.S.* // Phys. Lett. B. 2022. **826**. P. 136912.
[29] *Cattaneo C.* // Atti Del Semin. Matem. E Fis. Della Univ. Modena. 1948. **3**. P. 83-101.
[30] *Eckart C.* Phys. Rev. 1940. **58**. P. 919.

Nonlocal extension of relativistic causal thermodynamics and general relativistic Burgers equation

A. S. Ilin[a], **A. B. Balakin**[b]

Department of General Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kazan 420008, Russia
E-mail: [a]alexeyilinjukeu@gmail.com, [b]Alexander.Balakin@kpfu.ru

A phenomenological approach to the construction of a relativistic model of thermo-visco-elasticity is elaborated. The main element of presented approach is the generalized Burgers equation. As a key step, we have constructed a non-local generalization of the Israel-Stewart model for relativistic causal thermodynamics of a homogeneous, isotropic cosmic fluid, in which the coefficient at the integral operator is responsible for the elastic properties of the medium. Based on the second low of thermodynamics we derive the integro-differential equation for the evolution of non-equilibrium pressure scalar and we show that the differential version of this equation is a relativistic analog of the Burgers equation describing visco-elastic processes in classical media. Based on the obtained equations for a medium model with bulk visco-elasticity, we present a hypothesis that the equations for a model with shear visco-elasticity can also be represented using the corresponding relativistic generalization of the Burgers equation; in other words, the equation for the traceless shear part of the non-equilibrium pressure tensor was obtained phenomenologically using an analogy with the exact equation for the bulk part of this tensor.

PACS: 95.36.+x; 95.35.+d;98.80.-k.
Keywords: dark energy, dark matter, rheology.
Received 16 May 2022.

Сведения об авторах

1. Ильин Алексей Сергеевич — аспирант; e-mail: alexeyilinjukeu@gmail.com.
2. Балакин Александр Борисович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: Alexander.Balakin@kpfu.ru.