

## Правила отбора для рассеяния закрученных фотонов на спиральных средах

П. С. Королев\*

Томский государственный университет, физический факультет,  
кафедра квантовой теории поля. Россия, 634050, Томск, пл. Новособорная, д. 1.  
(Поступила в редакцию 19.05.2022; подписана в печать 04.07.2022)

В настоящей работе исследуется механизм взаимодействия закрученных фотонов со спирально-симметричными диэлектриками. В рамках квантовой электродинамики в диспергирующей среде решается задача рассеяния электромагнитной волны на спирально-симметричной пластинке. Рассматриваются высшие порядки теории возмущений по диэлектрической восприимчивости. Выявлены правила отбора для рассеянной волны. Показано, что среда передает фотону продольный импульс, а также дополнительную проекцию полного углового момента на ось спиральной симметрии среды. Показано, что правила отбора выполняются для всех порядков теории возмущений и, следовательно, верны в непертурбативном режиме, т.е. являются общим свойством рассеяния электромагнитных волн на пластине из спирально симметричной среды, погруженной в однородный изотропный прозрачный диэлектрик.

PACS: 42.50.-p, 03.70.+k, 11.30.-j, 81.05.Xj

УДК: 535.3.

Ключевые слова: закрученные фотоны, орбитальный угловой момент, жидкие кристаллы, холестерики.

### ВВЕДЕНИЕ

Закрученные фотоны — это стационарные состояния квантового электромагнитного поля с определенной энергией, спиральностью, продольным импульсом и проекцией полного углового момента на ось продольного импульса. Такие кванты света находят применение в квантовой телекоммуникации, оптоинформатике, оптических пинцетах, а также в фундаментальных исследованиях [1–6]. Закрученные фотоны могут создаваться различными способами в разных диапазонах частот (см. обзоры [1, 3–5, 7, 8]).

Спиральные среды представляют собой периодически неоднородные анизотропные диэлектрики со спирально-симметричным тензором диэлектрической проницаемости, т.е. тензором, инвариантным относительно одновременного поворота вокруг оси симметрии и сдвига вдоль нее. Такие среды широко распространены в природе и благодаря своим уникальным оптическим свойствам используются в качестве поляризаторов, преобразователей частот, режекторных фильтров и др. [9, 10]. Примерами таких сред являются холестерические жидкие кристаллы, хиральные нематики и смектики,  $q$ -пластинки, некоторые типы хиральных метаматериалов, хиральные рельефные тонкие пленки, а также спиральные дефекты в упорядоченных средах. Многие аспекты электромагнитных свойств этих структур были исследованы в работах [11–15]. Взаимодействию закрученного света с некоторыми специальными спиральными средами посвящены работы [7, 8, 16, 17]. В работе [18] рассматривается теория рассеяния плоских и закрученных фотонов на пластине из среды, обладающей наиболее общим тензором диэлектрической проницаемости со спиральной симметрией.

Закрученные фотоны, как и спиральные среды, обладают спиральной симметрией, поэтому взаимодействие этих объектов вызывает интерес. В недавней работе [18] в рамках квантовой электродинамики было показано, что при рассеянии закрученных фотонов на тонкой плоскопараллельной пластине из спиральной среды в первом борновском приближении верны правила отбора

$$k'_z = k_z - m_h q, \quad m' = m + m_h, \quad m_h \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Здесь  $k'_z, m'$  и  $k_z, m$  — продольный импульс и проекция полного углового момента рассеянного и падающего закрученных фотонов соответственно, а  $q$  характеризует периодичность среды. Т.е. спиральная среда передает фотону импульс и момент импульса. Этот механизм открывает путь к созданию компактных устройств генерации закрученных фотонов с большой проекцией полного углового момента.

Цель настоящей работы — обобщить результаты [18] и явно показать, что правила отбора (1) верны в каждом порядке теории возмущений и, следовательно, являются общим свойством рассеяния закрученных фотонов на спиральных средах.

Будем использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$  и  $e^2 = 4\pi\alpha$ , где  $\hbar$  — приведенная постоянная Планка,  $c$  — скорость света,  $e$  — заряд электрона, а  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. В работе взаимозаменяемо используются обозначения для пространственных осей  $x_1, x_2, x_3$  и  $x, y, z$ .

### 1. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В СПИРАЛЬНОЙ СРЕДЕ

В данном разделе, следуя [18], мы построим пертурбативное описание задачи рассеяния электромагнитной волны на тонкой плоскопараллельной спирально симметричной пластинке с тензором диэлектриче-

\* kizorph.d@gmail.com

ской проницаемости (2) в рамках квантовой электродинамики в диэлектрической среде. Для определенности будем считать, что пластинка заполняет область  $z \in [-L/2, L/2]$ , и ось спиральной симметрии среды совпадает с пространственной осью  $z$ . Будем также считать, что окружающее пластинку пространство заполнено однородной изотропной прозрачной средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_v(k_0)$ .

В работе [18], исходя из соображений симметрии, получено общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости спирально-симметричных сред

$$\varepsilon(\mathbf{x}; k_0) = \sum_{s=-2}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\varphi} e^{-iq(l+s)z} \varepsilon_{ls}. \quad (2)$$

Здесь параметр  $q$  характеризует периодичность среды,  $\varphi := \arg(x_1 + ix_2)$ , а  $\varepsilon_{ls}$  зависит только от  $r := |x_1 + ix_2|$  и энергии падающей волны  $k_0$ . Причем  $\varepsilon_{ls}$  является неприводимым тензором спина  $s$  группы вращений вокруг оси  $z$ , т.е.

$$R_\psi \varepsilon_{ls} R_\psi^{-1} = e^{is\psi} \varepsilon_{ls}. \quad (3)$$

Индексы  $l$  и  $s$  характеризуют орбитальный и спиновый угловые моменты соответственно (см. также [13, 19]). Явные выражения для тензоров  $\varepsilon_{ls}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l2} &= A_l \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{l,-2} = A_{-l}^* \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_{l1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_l \\ 0 & 0 & i\alpha_l \\ \beta_l & i\beta_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{l,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{-l}^* \\ 0 & 0 & -i\beta_{-l}^* \\ \alpha_{-l}^* & -i\alpha_{-l}^* & 0 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_{l0} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_l & -iy_l & 0 \\ iy_l & \varepsilon_l & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp l} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $A_l, \alpha_l, \beta_l$  — комплексные, а  $\varepsilon_l, \varepsilon_{\perp l}, y_l$  — вещественные функции от  $r$ . Отметим, что в случае среды, инвариантной относительно трансляций в ортогональной оси  $z$  плоскости, в выражении (2) выживают только слагаемые с  $l = 0$ , а все коэффициенты не зависят от точки пространства. В частности, к таким средам относятся холестерики и  $C^*$ -смектики.

Тот факт, что пластинка тонкая, позволяет описывать рассеяние пертурбативно по отношению к диэлектрической восприимчивости

$$\chi_{ij}(k_0) := \varepsilon_{ij}(k_0) - \varepsilon_v(k_0)\delta_{ij}. \quad (5)$$

Удобно строить квантовую электродинамику в среде в кулоновской калибровке (см. [20–26]). Гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия определяется как

$$\hat{H}_{int} = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \hat{E}_i \chi_{ij}(\hat{k}_0) \hat{E}_j, \quad \hat{k}_0 := i\partial_t, \quad (6)$$

где  $\hat{E}_i = \hat{A}_i$  оператор электрического поля, а  $\hat{A}_i$  оператор электромагнитного потенциала

$$\begin{aligned} \hat{A}_i(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\alpha} \hat{c}_{\alpha} f_{\alpha}^{1/2} \psi_{\alpha i}(\mathbf{x}) e^{-ik_0 \alpha t} + \\ &+ \sum_{\alpha} \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} f_{\alpha}^{1/2} \psi_{\alpha i}^*(\mathbf{x}) e^{ik_0 \alpha t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Нормировочные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{-1} &= [k_0^2 \varepsilon_v(k_0)]' |_{k_0=k_0\alpha} = 2[k_0 n_v(k_0) c_v^{-1}(k_0)]_{k_0=k_0\alpha}, \\ c_v^{-1}(k_0) &= [k_0 n_v(k_0)]', \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n_v(k_0) := \varepsilon_v^{1/2}(k_0)$  — коэффициент преломления среды, в которой находится пластинка, и  $c_v$  — групповая скорость электромагнитных волн в среде. Операторы рождения и уничтожения подчиняются стандартным коммутационным условиям,

$$[\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}] = 0, \quad [\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

а модовые функции являются стационарными решениями уравнений Максвелла. Модовые функции образуют полный ортонормированный набор в гильбертовом пространстве комплексных бездивергентных векторных полей. Считаем, что модовые функции нормированы на «ящик», т.е. модовые функции нормированы на единицу в области пространства достаточно большого объема  $V$ . Как будет видно в дальнейшем, наблюдаемые величины не зависят от  $V$  и допускают предел  $V \rightarrow \infty$ .

Пусть в начальный момент времени  $t = t_1$  фотоны приготовлены в состоянии

$$|\varphi_{in}\rangle := \sum_{\gamma} e^{-ik_0 \gamma t_1} \varphi_{\gamma}^{in} \hat{c}_{\gamma}^{\dagger} |0\rangle, \quad \sum_{\gamma} (\varphi_{\gamma}^{in})^* \varphi_{\gamma}^{in} = 1, \quad (10)$$

и регистрируются в момент времени  $t = t_2$  в состоянии

$$|\varphi_{out}\rangle := \sum_{\gamma'} e^{-ik_0 \gamma' t_2} \varphi_{\gamma'}^{out} \hat{c}_{\gamma'}^{\dagger} |0\rangle, \quad \sum_{\gamma} (\varphi_{\gamma}^{out})^* \varphi_{\gamma}^{out} = 1. \quad (11)$$

Функции  $\varphi_{\gamma}^{in}, \varphi_{\gamma}^{out}$  определяют форму соответствующих волновых пакетов в момент времени  $t = 0$ . Принимая во внимание коммутационные соотношения

$$\hat{U}_{0,t}^0 \hat{c}_{\alpha} \hat{U}_{t,0}^0 = e^{-ik_0 \alpha t} \hat{c}_{\alpha}, \quad (12)$$

и соотношения между оператором эволюции и оператором рассеяния  $S$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{t_2, t_1} &= \hat{U}_{t_2, 0}^0 \hat{S}_{t_2, t_1} \hat{U}_{0, t_1}^0, \\ \hat{S}_{t_2, t_1} &= T \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{H}_{int}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\hat{U}_{t_2, t_1}^0$  оператор свободной эволюции. Амплитуда перехода определяется как

$$\langle \varphi_{out} | \hat{U}_{t_2, t_1} | \varphi_{in} \rangle. \quad (14)$$

Отметим, что рассматриваемая теория допускает только двухвалентные вершины (6) в диаграммах Фейнмана. Следовательно, всего имеется два типа связанных диаграмм (см. рисунок). Все вакуумные поддиаграммы не вносят вклад в амплитуду рассеяния и могут быть просуммированы стандартным образом [27, 28], что приведет к появлению несущественного фазового множителя. Поэтому достаточно рассматривать только сквозные диаграммы.

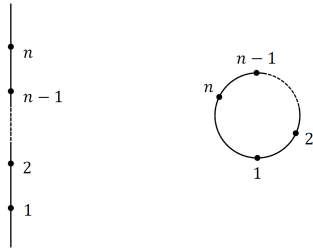


Рисунок. Два типа допустимых в теории связанных диаграмм с  $n$  вершинами: сквозная — слева и вакуумная — справа

## 2. РАССЕЙНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ФОТОНОВ

Анализ амплитуды перехода (14) для рассеяния плоско-волновых фотонов в первом борновском приближении был проведен в [13, 29] для частного случая  $C^*$ -сметтиков и холестериков, и в случае общего тензора спиральной среды в [18]. В этой же работе [18] разработан формализм для описания рассеяния произвольного волнового пакета. Из общих предположений симметрии и законов сохранения в [20] предсказано, что рассеяние закрученных фотонов на спиральной среде приводит к изменению проекции полного углового момента  $m$  на ось  $z$ .

Для описания рассеяния закрученных фотонов нам

понадобятся их модовые функции в однородной изотропной среде, которые согласно [20, 30] имеют вид

$$\psi(s, m, k_3, k_\perp; \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\psi_- \mathbf{e}_+ + \psi_+ \mathbf{e}_-) + \psi_3 \mathbf{e}_3, \quad (15)$$

где

$$\psi_3(m, k_3, k_\perp; \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2k_0 n_v}{RL_z}} \left( \frac{k_\perp}{2k_0 \varepsilon_v^{1/2}} \right)^{3/2} \times \\ \times J_m(k_\perp |x_+|) e^{im \arg x_+ + ik_3 x_3},$$

$$\psi_\pm(s, m, k_3, k_\perp; \mathbf{x}) = \frac{ik_\perp}{k_0 \varepsilon_v^{1/2} s \pm k_3} \psi_3(m \pm 1, k_3, k_\perp; \mathbf{x}). \quad (16)$$

Здесь  $s$  — спиральность фотона,  $m$  — проекция полного углового момента на продольный импульс,  $k_3$  — продольный импульс фотона и  $k_\perp$  — модуль перпендикулярной оси  $z$  компоненты волнового вектора. Величины  $R$  и  $L_z$  характеризуют нормировочный объем  $V = \pi R^2 L_z$ . Условие массовой оболочки принимает вид

$$k_0^2 \varepsilon_v(k_0) = k_\perp^2 + k_3^2, \quad k_\perp := |k_1 + ik_2|. \quad (17)$$

Более того,

$$\sum_\gamma \equiv \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{L_z dk_3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R dk_\perp}{\pi}, \quad (18)$$

$$\delta_{\gamma'\gamma} = \delta_{s's} \delta_{m'm} \frac{2\pi^2}{RL_z} \delta(k'_\perp - k_\perp) \delta(k'_3 - k_3).$$

В качестве примера, приведем результат работы [18] для амплитуды рассеяния (14) закрученных фотонов в первом борновском приближении. В этом случае удерживается только первый нетривиальный порядок разложения  $S$ -матрицы (13). Такая амплитуда соответствует сквозной диаграмме с одной вершиной:

$$\langle \varphi_{\text{out}} | \hat{U}_{\infty, -\infty} | \varphi_{\text{in}} \rangle = \sum_{\gamma'\gamma} (\varphi_{\gamma'}^{\text{out}})^* \left[ \delta_{\gamma'\gamma} + i \frac{(2\pi)^3}{RL_z} \left( \frac{n'_\perp n_\perp}{4} \right)^{3/2} c_v k_0^2 \delta(k'_0 - k_0) \times \right. \\ \left. \times \sum_{l_h=-\infty}^\infty \sum_{s_h=-2}^2 \delta_L(k'_3 - k_3 + (l+s)q) \delta_{m', m+l_h+s_h} \int_0^\infty dr r a_{\gamma'}^\dagger(r) \chi_{l_h s_h}(r) a_\gamma(r) \right] \varphi_{\gamma}^{\text{in}}, \quad (19)$$

где

$$\delta_L(k_3) := \frac{\sin(k_3 L/2)}{\pi k_3}, \quad (20)$$

и функции  $a_\gamma(r)$  определены как

$$\psi_{\gamma i}(\mathbf{x}) =: \sqrt{\frac{2k_0 n_v}{RL_z}} \left( \frac{n_\perp}{2} \right)^{3/2} e^{ik_3 z} e^{im\varphi} R_{ij}(\varphi) a_{\gamma j}(r), \\ \varphi := \arg(x_1 + ix_2), \quad r := |x_1 + ix_2|. \quad (21)$$

Здесь  $R_{ij}(\varphi)$  — матрица поворота вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ . Из аргументов  $\delta$ -образной функции  $\delta_L$  и  $\delta$ -символа видно, что в максимумах вероятности рассеяния выполняются правила отбора (1). Мы видим, что рассеяние фотонов на спиральной среде приводит к передаче  $z$  компоненты импульса и проекции полного углового момента на ось  $z$  от среды фотону.

Покажем теперь, что правила отбора (1) выполняются для высших порядков теории возмущений.

### 3. ПРАВИЛА ОТБОРА В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ

Как было отмечено выше, достаточно рассматривать только сквозные диаграммы. Сквозную диаграмму с  $n$  вершинами (см. левый рисунок) обозначим  $D_{\gamma'\gamma}^{(n)}$ . В результате, диаграмма без вакуумных поддиаграмм с  $n$  вершинами оказывается пропорциональна выражению

$$\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_n \psi_{\gamma'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \times \\ \times \chi(\mathbf{x}_1) D_F^E(x_1 - x_2) \chi(\mathbf{x}_2) D_F^E(x_2 - x_3) \cdots \\ \cdots D_F^E(x_{n-1} - x_n) \chi(\mathbf{x}_n) \psi_\gamma(\mathbf{x}_n). \quad (22)$$

Здесь  $D_F^E(x - y)$  — пропагатор электрических полей, который связан с обычным фотонным пропагатором  $D_F(x - y)$  соотношением

$$D_F^E(x - y) := \partial_{x_0} \partial_{y_0} D_F(x - y). \quad (23)$$

Заметим, что всего имеется  $n$  интегрирований и  $n - 1$  пропагатор. Основная идея дальнейшего доказательства заключается в том, чтобы отщепить один интеграл, который и даст искомые правила отбора. Для этого выделим явно множители, зависящие от угловых и продольных переменных. Подставляя модовые функции закрученных фотонов в виде (21) и разложение тензора диэлектрической проницаемости (2), получаем

$$D_{\gamma'\gamma}^{(n)} \sim \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_n \times \\ \times a_{\gamma'}^\dagger(r_1) R_{\varphi_1}^{-1} \chi_{l_1 s_1}(r_1) D_F^E(x_1 - x_2) \chi_{l_2 s_2}(r_2) D_F^E(x_2 - x_3) \cdots D_F^E(x_{n-1} - x_n) \chi_{l_n s_n}(r_n) R_{\varphi_n} a_\gamma(r_n) \times \\ \times e^{-ik'_3 z_1} e^{-iq(l_1 + s_1)z_2} \dots e^{-iq(l_n + s_n)z_n} e^{ik_3 z_n} e^{-im'\varphi_1} e^{il_1 \varphi_1} \dots e^{il_n \varphi_n} e^{im\varphi_n}. \quad (24)$$

Вставим теперь между каждым тензором  $\chi$  и пропагатором матричную единицу в виде  $1 = R_\varphi R_\varphi^{-1}$ . Тогда можно воспользоваться условием неприводимости  $\chi_{ls}$  (3). Появится  $n$  сомножителей вида  $e^{is_k \varphi_k}$ . Однако останется зависимость от угловых координат в виде матричных сомножителей

$$R_{\varphi_k}^{-1} D_F^E(x_k - x_{k+1}) R_{\varphi_{k+1}} = R_{\varphi_k}^{-1} R_{\varphi_{k+1}} R_{\varphi_{k+1}}^{-1} D_F^E(x_k - x_{k+1}) R_{\varphi_{k+1}} = \\ = R_{\varphi_{k+1} - \varphi_k} D_F^E(R_{\varphi_{k+1}}^{-1}(x_k - x_{k+1})), \quad (25)$$

где использовался тензорный закон преобразования пропагатора под действием группы Эвклида. Тогда

$$D_{\gamma'\gamma}^{(n)} \sim \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_n \times \\ \times a_{\gamma'}^\dagger \chi_{l_1 s_1} R_{\varphi_2 - \varphi_1} D_F^E(R_{\varphi_2}^{-1}(x_1 - x_2)) \cdots R_{\varphi_n - \varphi_{n-1}} D_F^E(R_{\varphi_n}^{-1}(x_{n-1} - x_n)) \chi_{l_n s_n} a_\gamma \times \\ \times e^{-ik'_3 z_1} e^{-iq(l_1 + s_1)z_2} \dots e^{-iq(l_n + s_n)z_n} e^{ik_3 z_n} e^{-im'\varphi_1} e^{i(l_1 + s_1)\varphi_1} \dots e^{i(l_n + s_n)\varphi_n} e^{im\varphi_n}. \quad (26)$$

Для краткости здесь и далее мы не пишем явно зависимость от радиальных координат  $r_k$ . Сделаем в этом выражении серию последовательных замен переменных интегрирования

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = R_{\varphi_{k+1}}^{-1} \mathbf{x}_k, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (27)$$

Эти повороты вокруг третьих осей приводят к тому, что

$$D_{\gamma'\gamma}^{(n)} \sim \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int d\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdots d\tilde{\mathbf{x}}_{n-1} d\mathbf{x}_n \times \\ \times a_{\gamma'}^\dagger \chi_{l_1 s_1} R_{-\tilde{\varphi}_1} D_F^E(\tilde{x}_1 - R_{\varphi_2}^{-1} x_2) \cdots R_{-\tilde{\varphi}_{n-1}} D_F^E(\tilde{x}_{n-1} - R_{\varphi_n}^{-1} x_n) \chi_{l_n s_n} a_\gamma A(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n) \times \\ \times e^{-ik'_3 z_1} e^{-iq(l_1 + s_1)z_2} \dots e^{-iq(l_n + s_n)z_n} e^{ik_3 z_n} e^{-im'\varphi_n} e^{i(l_1 + s_1)\varphi_n} \dots e^{i(l_n + s_n)\varphi_n} e^{im\varphi_n}. \quad (28)$$

В множитель  $A(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$  вынесены экспоненты, зависящие от  $\tilde{\varphi}$ , но не от  $\varphi_n$ . Заметим, что вся зависимость от  $\varphi_n$  содержится в виде экспонент в последней строчке. Комбинация  $R_{\varphi_n}^{-1} x_n$  в аргументе последнего пропагатора не зависит от  $\varphi_n$ , т.к.  $\varphi_n$  — это полярный угол вектора  $\mathbf{x}_n$ . По переменной  $\varphi_n$  легко проинтегрировать. Используя тот же прием, проведем серию замен переменных для  $z$  компонент векторов  $\tilde{\mathbf{x}}$  вида

$$\xi_k = \tilde{z}_k - \tilde{z}_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (29)$$

Каждый пропагатор тогда будет зависеть от своего  $\xi_k$ , но не от  $z_n$ . Вся зависимость от  $z_n$  будет вынесена в экспоненты. После этих замен получаем

$$\begin{aligned}
 D_{\gamma'\gamma}^{(n)} \sim & \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int d\tilde{r}_1^2 d\tilde{\varphi}_1 d\xi_1 \cdots d\tilde{r}_{n-1}^2 d\tilde{\varphi}_{n-1} d\xi_{n-1} dr_n d\varphi_n dz_n \times \\
 & \times a_{\gamma'}^\dagger \chi_{l_1 s_1} R_{-\tilde{\varphi}_1} D_F^E(\tilde{r}_1, \tilde{\varphi}_1, \xi_1, r_2) \cdots R_{-\tilde{\varphi}_{n-1}} D_F^E(\tilde{r}_{n-1}, \tilde{\varphi}_{n-1}, \xi_{n-1}, r_n) \chi_{l_n s_n} a_\gamma \times \\
 & \times e^{-ik'_3 z_n} e^{-iq(l_1+s_1)z_n} \dots e^{-iq(l_n+s_n)z_n} e^{ik_3 z_n} e^{-im'\varphi_n} e^{i(l_1+s_1)\varphi_n} \dots e^{i(l_n+s_n)\varphi_n} e^{im\varphi_n} \times \\
 & \times A(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}) B(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь  $B(\xi_1, \dots, \xi_n)$  содержит экспоненты, не зависящие от  $z_n$ . Для наглядности все интегрирования расписаны явно в цилиндрических координатах после соответствующих замен переменных, а в аргументах пропагаторов выписаны только те переменные, от которых они зависят. Как видно, по  $\varphi_n$  и  $z_n$  легко проинтегрировать. Эти интегралы дадут  $\delta$ -символ и  $\delta$ -функцию, соответственно. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 D_{\gamma'\gamma}^{(n)} \sim & \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{s_1, \dots, s_n} \delta_L(k'_3 - k_3 + (l_1 + s_1 + \dots + l_n + s_n)q) \times \\
 & \times \delta_{m', m+l_1+s_1+\dots+l_n+s_n} I_{\gamma'\gamma, l_1 s_1 \dots l_n s_n}, \tag{31}
 \end{aligned}$$

где  $I$  содержит в себе оставшиеся интегрирования. Из аргументов  $\delta$ -функции и  $\delta$ -символа мы видим выполнение правил отбора (1) для любого порядка теории возмущений, что и требовалось доказать.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развивая идеи работ [18, 20], в рамках квантовой электродинамики в диэлектрической среде мы показали, что правила отбора (1) выполняются в любом порядке теории возмущений в максимумах ин-

тенсивности рассеянной электромагнитной волны. Следовательно, эти правила являются непертурбативным свойством рассеяния закрученных фотонов на плоско-параллельной пластинке из спирально-симметричной среды, погруженной в однородной изотропный диэлектрик. В частности, правила отбора верны не только для тонких пластинок. Физическая интерпретация этих правил отбора заключается в том, что среда передает рассеянному фотону не только продольный импульс, но и угловой момент. Причем фотоны, рассеянные под определенным углом, получают строго определенный прирост углового момента. Это свойство спиральных сред можно использовать для создания компактного устройства генерации закрученных фотонов с большой проекцией углового момента за счет многократного отражения от спиральных пластинок. Принципиальная схема такого устройства описана в работе [18]. Похожий механизм реализован в  $q$ -пластинках [7, 8, 16, 31–33], но в этом случае нет передачи продольного импульса от среды фотону.

### Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору П.О. Казинскому за ценные комментарии и помощь при подготовке данной статьи.

---

[1] Rubinsztein–Dunlop H., Forbes A., Berry M.V., Dennis M.R. et al. // J. Opt. 2017. **19**. 013001.  
 [2] Erhard M., Fickler R., Krenn M., Zeilinger A. // Light Sci. Appl. 2018. **7**. 17146.  
 [3] Chen R., Zhou H., Moretti M., Wang X., Li J. // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2020. **22**. P. 840.  
 [4] Padgett M.J. // Opt. Express. 2018. **25**. 11265.  
 [5] Knyazev B.A., Serbo V. G. // Phys. Usp. 2018. **61**. P. 449.  
 [6] Shen Y., Wang X., Xie Z., Min C., Fu X., Liu Q., Gong M., Yuan X. // Light Sci. Appl. 2019. **8**. P. 90.  
 [7] Barboza R. // Adv. Opt. Photon. 2015. **7**. P. 635.  
 [8] Li Z.-X. et. al. // Chin. Opt. Lett. 2021. **19**. 112601.  
 [9] Jacobs S.D., Cerqua K.A., Marshall K.L., Schmid A., Guardalben M.J., Skerrett K.J. // J. Fusion Energy. 1986. **5**.  
 [10] Jacobs S.D., Cerqua K.A., Marshall K.L., Schmid A., Guardalben M.J., Skerrett K.J. // J. opt. Soc. Am. B. 1988. **5**.  
 [11] de Gennes P.G., Prost J. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Clarendon Press, 1993.  
 [12] Yang D.-K., Wu S.-T. Fundamentals of Liquid Crystal Devices. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.  
 [13] Belyakov V.A. Diffraction Optics of Complex-Structured Periodic Media. Cham: Springer, 2019.  
 [14] Lakhtakia A., Messier R. Sculptured thin films: Nanoengineered Morphology and Optics. Bellingham: SPIE, 2005.  
 [15] Mackay T.G., Lakhtakia A. // SPIE Reviews. 2010. **1**. 018003.  
 [16] Marrucci L., Manzo C., Paparo D. // Phys. Rev. Lett. 2006. **96**. 163905.  
 [17] Karimi E., Piccirillo B., Marrucci L., Santamato E. // Opt. Lett. 2009. **34**. 1225.  
 [18] Kazinski P.O., Korolev P.S. // arXiv:2202.04974. 2022.  
 [19] Ponti S., Reyes J.A., Oldano C. // J. Phys.: Condens.



- Matter. 2002. **14**. 10173.
- [20] Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. A. 2019. **100**. 043836.
- [21] Abrikosov A.A., Gorkov L.P., Dzyaloshinskii I.E. New Jersey: Prentice Hall Press, 1963.
- [22] Ginzburg V.L. Theoretical Physics and Astrophysics. London: Pergamon, 1979.
- [23] Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. A. 2018. **97**. 033837.
- [24] Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Korolev P.S., Lazarenko G.Yu. // J. Mol. Liq. 2021. **326**. 115278.
- [25] Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Korolev P.S., Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. E. 2021. **104**. 024701.
- [26] Kazinski P.O., Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. A. 2021. **103**. 012216.
- [27] Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. М., 2003.
- [28] Пескин М.Е. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: 2001.
- [29] Furs A.N., Alexeeva T.A. // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. **41**. 065203.
- [30] Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Lazarenko G.Yu. // Eur. Phys. J. Plus. 2020. **135**. P. 901.
- [31] Barboza R., et al // Phys. Rev. Lett. 2012. **109**. 143901.
- [32] Naidoo D. et al. // Nat. Phot. 2016. **10**. 327.
- [33] Brasselet E. // Phys. Rev. Lett. 2018. **121**. 033901.

## Selection rules for the scattering of twisted photons by helical media

P. S. Korolev

Department of Quantum Field Theory, Faculty of Physics, Tomsk State University, Tomsk 634050, Russia  
E-mail: kizorph.d@gmail.com

In the present paper, we study the mechanism of interaction of twisted photons with helically symmetric dielectrics. In the framework of quantum electrodynamics in a dispersive medium, the problem of scattering of twisted photons by a slab made of a helical medium is solved. High orders of perturbation theory are considered. The selection rules for the scattered wave are revealed. It is shown that the medium imparts a longitudinal momentum to the photon as well as an additional projection of the total angular momentum onto the axis of helical symmetry of the medium. It is shown that the selection rules are satisfied for all orders of the perturbation theory and, therefore, are valid in the nonperturbative regime, i.e., they are a general property of the scattering of electromagnetic waves on plates made of a helical medium placed into a homogeneous isotropic transparent dielectric.

PACS: 42.50.-p, 03.70.+k, 11.30.-j, 81.05.Xj.

Keywords: twisted photons, orbital angular momentum, liquid crystals, cholesterics.

Received 19 May 2022.

### Сведения об авторе

Королев Петр Сергеевич — лаборант-стажер; e-mail: kizorph.d@gmail.com .