

Планарное приближение в теории динамо со случайными коэффициентами при наличии вертикальных потоков спиральности

Е. А. Михайлов^{1,2,*}, М. Г. Сердюков^{1†}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Физический Институт имени П. Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский пр-т, д. 53

(Поступила в редакцию 14.05.2022; подписана в печать 21.07.2022)

Генерация магнитных полей в различных космических объектах описывается с помощью механизма динамо. В случае галактик одной из наиболее эффективных моделей является планарное приближение, созданное для тонких дисков. Оно характеризует эволюцию поля с помощью усредненных значений параметров, связанных с кинематическими характеристиками межзвездной среды. Между тем, в случае наличия ряда активных процессов необходимо рассматривать существенные флуктуации данных параметров, а также вертикальные потоки. В настоящей работе рассмотрены уравнения для динамо в тонком диске со случайными коэффициентами, исследованы различные случайные возмущения, представляющие как астрономический, так и математический интерес. Показано наличие перемежаемости, когда старшие моменты растут быстрее младших. Важно отметить, что в настоящей работе использовались большие выборки, на порядки превышающие те, которые применялись в предшествующих работах.

PACS: 02.50.-г.

УДК: 524.6-1/-7

Ключевые слова: магнитные поля, динамо, перемежаемость, уравнения со случайными коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящий момент практически не вызывает сомнений, что целый ряд космических объектов обладает крупномасштабными магнитными полями. Первые предположения о существовании магнитных полей на Солнце были сделаны еще в конце XIX века, что было подтверждено астрономическими наблюдениями солнечных пятен в 1908 году [1]. Магнетизм планет также известен достаточно давно (если говорить о Земле, то наличие у нее магнитного поля очевидно уже много веков, в дальнейшем подтверждено существование полей у ряда других объектов). При существовании крупномасштабных структур магнитного поля в галактиках было впервые предположено в середине XX века при изучении космических лучей. Так, заряженные частицы, ассоциируемые с космическими лучами, должны были бы «прошивать» Млечный Путь за времена, пренебрежимо малые по сравнению с продолжительностью существования галактики [2]. Вместе с тем, как интенсивность, так и пространственное распределение лучей свидетельствовало о том, что их траектории намного более сложны. Это можно было бы объяснить взаимодействием с магнитным полем. Первые оценки для величины магнитного поля были сделаны еще Э. Ферми [3], и они оказались удивительным образом близки к сегодняшним представлениям (были получены величины порядка 1 мкГс). В настоящее время магнитные поля галактик хорошо изучены, в первую очередь с помощью измерений мер фараде-

евского вращения для поляризованных электромагнитных волн, которое проводится на современных радиотелескопах [4–7].

С теоретической точки зрения генерация магнитных полей описывается с помощью механизма динамо. Он связан с переходом энергии турбулентных движений ионизированной среды в энергию магнитного поля. Первые примеры описания конкретного действия данного механизма были предложены Паркером [8] для Солнца и Эльзассером [9] для Земли в 1950-е годы, и представляли собой простые двумерные модели, представляющие возможность асимптотического анализа. Было показано, что генерация магнитного поля связана с совокупным действием альфа-эффекта и дифференциального вращения и возможна лишь при определенном соотношении между параметрами, когда данные процессы более интенсивны, чем разрушение поля за счет диффузионных явлений. Для галактик одним из наиболее эффективных подходов является планарное приближение, созданное в 1990-е годы [10, 11]. Оно предполагает, что галактический диск достаточно тонкий, поэтому поле целиком описывается с помощью радиальной и азимутальной составляющих, эволюционные уравнения для которых содержат коэффициенты, описывающие альфа-эффект, дифференциальное вращение и турбулентную диффузию. Они являются результатом усреднения кинематических характеристик по некоторым масштабам, и в целом хорошо описывают процесс генерации магнитного поля.

Между тем, нельзя не отметить, что описание поля с помощью подобных усредненных коэффициентов является достаточно затруднительным в случае галактик, характеризующихся сильно неоднородной средой. К подобным примерам можно отнести объекты с ин-

* ea.mikhajlov@physics.msu.ru

† serdiukov.mg19@physics.msu.ru

тенсивным звездообразованием, истечениями из звезд, областям в окрестности активных ядер и т.д. В таком случае могут возникать короткие по продолжительности, но при этом достаточно существенные изменения параметров. Хорошей моделью для описания влияния данных процессов на магнитное поле является использование уравнений со случайными коэффициентами, которые принимают одно из двух возможных значений [12, 13]. Одно из них может соответствовать «спокойной» межзвездной среде, второе — областям с интенсивными процессами. Подобные уравнения хорошо известны в теории вероятностей, и были исследованы как для космического магнетизма, так и для других процессов, таких как, например, распространение света во Вселенной [14–16]. Одной из ключевых особенностей подобных уравнений является перемежаемость: она заключается в том, что старшие моменты решения растут быстрее младших. Это связано с наличием редких, но больших по величине решений, которые гораздо сильнее влияют на среднеквадратичные, нежели на средние значения (также аналогичный механизм наблюдается и для последующих моментов).

Нельзя не отметить, что несмотря на то, что предшествующие результаты весьма интересны, они обладают рядом недостатков. Так, в большинстве указанных работ усреднение проводилось по выборкам, состоящим из $N \sim 10^{4..6}$ элементов. Хотя они и достаточно велики, типичную погрешность в вычислении средних значений можно оценить как $\sqrt{1/N}$, что уже составляет величины порядка десятых долей процента. Учитывая, что разница между показателями роста средних и среднеквадратичных значений составляет сопоставимые величины, подобные размеры выборок могут оказаться недостаточными. Расширение выборки требует более значительных вычислительных ресурсов, которые доступны при работе на суперкомпьютере.

Кроме того, нельзя не отметить, что при рассмотрении интенсивных процессов в межзвездной среде возрастает роль явлений, связанных с вертикальными потоками среды. Это приводит к «выносу» магнитного поля за пределы галактического диска и замедлению его роста (а в отдельных случаях можно и вовсе говорить о затухании). Подобные процессы можно учесть, включив в модель уравнение, описывающее потоки спиральности магнитного поля [17, 18]. Магнитная спиральность представляет собой скалярное произведение поля и его векторного потенциала. Можно показать, что она является интегралом движения, а ее эволюцию необходимо учитывать при рассмотрении поведения магнитного поля в объектах с интенсивными процессами [19].

В настоящей работе мы рассматриваем уравнения для магнитного поля, которые учитывают изменение его спиральности. Чтобы понять механизм влияния активных процессов на рост поля, мы используем стохастические закономерности для коэффициентов, которые учитывают модели для взаимосвязи между долей высокоионизованной компоненты межзвездного га-

за (ее можно ассоциировать с вероятностью, ассоциированной с соответствующим значением параметров) и управляющими параметрами динамо. Кроме того, мы также рассматриваем и некоторые абстрактные модели для коэффициентов, которые могут не иметь существенного астрономического значения, но представляют большой интерес с математической точки зрения. Использование суперкомпьютера «Ломоносов-2» [20] Московского государственного университета позволяет нам брать выборки размером порядка 10^8 .

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При исследовании магнитных полей космических объектов четко выражено разделение полного поля \mathbf{H} на крупномасштабную и мелкомасштабную компоненты [21]

$$\mathbf{H} = \mathbf{V} + \mathbf{b},$$

где \mathbf{V} и \mathbf{b} — крупномасштабная и мелкомасштабная компоненты, причем

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Такое усреднённое поле описывается уравнением Штеенбека–Краузе–Рэдлера [22]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \mathbf{V}) + \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{V}] + \beta \Delta \mathbf{V},$$

где α характеризует закрученность турбулентных движений среды, \mathbf{V} — средняя скорость турбулентно движущейся среды, а β отвечает за диффузию.

Для описания генерации магнитных полей галактик используется планарное приближение [10]. Галактика представляет собой тонкий диск, полутолщина h которого много меньше его радиуса R . В цилиндрической системе координат, если направить ось z перпендикулярно плоскости галактического диска и поставить начало координат в его центр, величина поля будет максимальной при $z = 0$ и минимальной при $z = \pm h$. Предполагается, что изменение происходит по закону косинуса вдоль оси z [23].

Магнитная спиральность [17, 18] — это интеграл по заданному объёму от скалярного произведения индукции магнитного поля и её векторного потенциала. Можно показать, что полная производная магнитной спиральности по времени равна нулю в случае, если проводимость среды стремиться к бесконечности, что с хорошей точностью выполняется для межзвёздной среды. Следовательно, для межзвёздной среды магнитную спиральность можно считать интегралом движения.

С учётом вышесказанного можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [17]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{2}{\pi} R_\alpha (1 + \alpha) B_\varphi - (R_u + k) B_r, \quad (1)$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = R_\omega B_r - (R_u + k)B_\varphi, \quad (2)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -R_u\alpha - C \left[(1 + \alpha)(B_\varphi^2 + B_r^2) + (1 + \alpha)^{1/2} \frac{3(-\pi D)^{1/2}}{8 R_\alpha} B_r B_\varphi + \frac{\alpha}{R_m} \right]. \quad (3)$$

Здесь $R_\alpha = \frac{\alpha_0 h}{\beta}$ — коэффициент, отвечающий за α -эффект, где α_0 — кинематическая составляющая α -эффекта и h — толщина галактического диска, $R_\omega = \frac{\Omega_0 h^2}{\beta}$ — характеризует дифференциальное вращение, Ω_0 — характерное значение угловой скорости, B_r и B_φ — радиальная и азимутальная составляющие магнитного поля, $C = 2(\frac{h}{l})^2$ связано с толщиной диска, $D = R_\alpha R_\omega$ — динамо число, $R_u = \frac{U_0 h}{\beta}$ — соотношение между характерными скоростями и турбулентной диффузией, U_0 — характерная скорость, R_m — магнитное число Рейнольдса, $k = \frac{\pi^2}{4} \frac{v}{v_0} (v_0$ — средняя скорость движения в галактике, v — скорость турбулентных движений в данной точке).

В системе (1)-(3) были выбраны следующие значения коэффициентов [18]:

$$R_\omega = -15, \quad C = 50, \quad R_m = 10^5, \\ B_{r0} = 0, \quad B_{\varphi0} = 10^{-3}, \quad \alpha_0 = -10^{-3}.$$

Активные процессы [12, 13, 24, 25] можно учесть следующим образом: будем полагать, что параметры, характеризующие турбулентные движения будут описываться одним из трех следующих случайных законов. Они могут принимать на каждом полуинтервале $\{n\Delta t; (n+1)\Delta t\}$ одно из двух случайных значений:

$$k = \begin{cases} 7.5, & \text{с вероятностью } p; \\ 2.5, & \text{с вероятностью } 1 - p; \end{cases} \quad (4)$$

$$R_\alpha = \begin{cases} 0.33, & \text{с вероятностью } p; \\ 1, & \text{с вероятностью } 1 - p; \end{cases} \quad (5)$$

$$R_u = \begin{cases} 0.3, & \text{с вероятностью } p; \\ 0.1, & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases} \quad (6)$$

Значение Δt было выбрано равным 0.01. После расчёта эволюции магнитного поля со временем данным методом, получившуюся зависимость необходимо усреднить по ансамблю решений.

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЙ

Так как одной из целей работы является расширение выборки для повышения точности получаемых результатов, численное решение [26] системы уравнений

(1)–(3) в модели со случайными коэффициентами было рассчитано на суперкомпьютере «Ломоносов-2» при помощи технологии MPI [27]. Усреднение проводилось на основе 10^8 типичных решений. Случайные коэффициенты генерировались с помощью генератора псевдослучайных чисел. В данной работе был использован алгоритм — вихрь Мерсена [28], период повторений для которого составляет приблизительно $10^{6 \cdot 10^3}$, что обеспечивает хорошую «случайность» нашим коэффициентам.

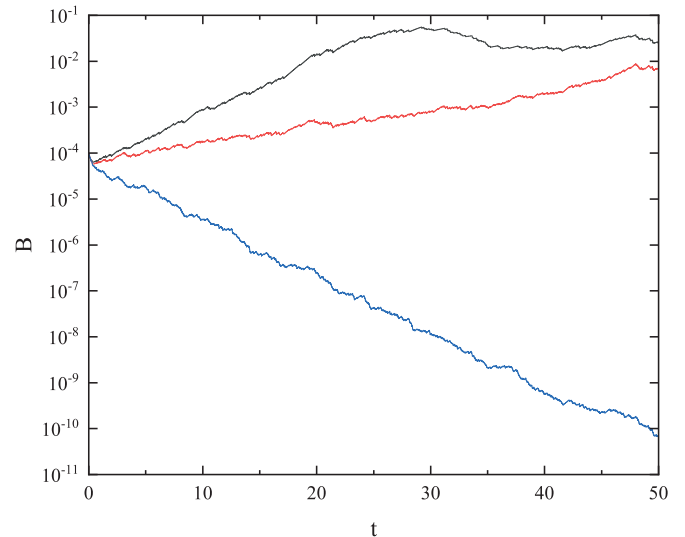


Рис. 1. Графики зависимости магнитного поля от времени со случайным параметром k при $R_\alpha = 1$ и $R_u = 0.1$: чёрная линия соответствует $p = 4\%$, красная — $p = 8\%$, синяя — $p = 15\%$

На рис. 1 можно увидеть типичные решения при случайном параметре k в (4). Когда параметр диссипации $p > p_{cr}$ больше своего критического значения, поле начинает разрушаться. Закон разрушения поля с точностью до константы $e^{\gamma t}$.

Если сделать случайным коэффициентом R_α (рис. 2) поле изменяется слабо, но всё ещё заметно уменьшение амплитуды и рост периода осцилляций поля при увеличении параметра p .

При изменении коэффициентов R_u (рис. 3) поле практически не изменяется и пронаблюдать, какие-либо эффекты становится затруднительным. Можно сказать что неоднородность вертикальных потоков вносит незначительный вклад в изменение магнитного поля.

При одновременном изменении всех трёх параметров k , R_α и R_u (рис. 4) можно видеть, что поле разрушается быстрее, чем в случае, где случайным был только коэффициент k [13], следовательно, критическое значение параметра p достигается при меньших значениях.

Характер решений на рис. 1 и 4 отличается от решений на рис. 2 и 3. Это можно объяснить тем, что в среде с активным звездообразованием параметр k

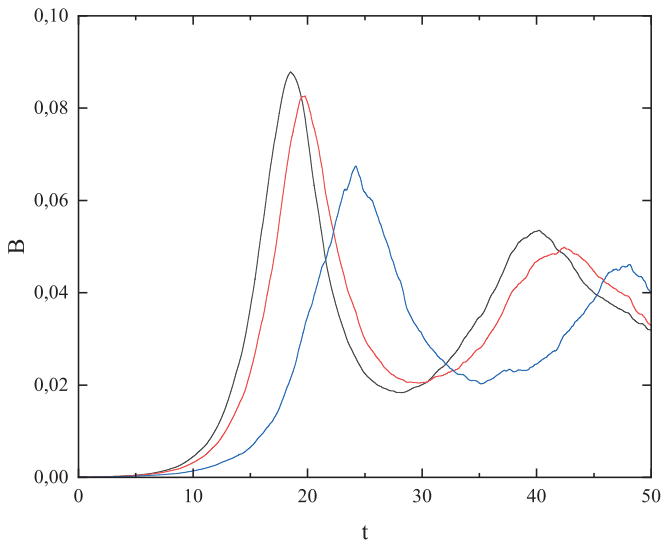


Рис. 2. Графики зависимости магнитного поля от времени со случайным параметром R_α , при $k = 2.5$ и $R_u = 0.1$: чёрная линия соответствует $p = 4\%$, красная — $p = 8\%$, синяя — $p = 15\%$

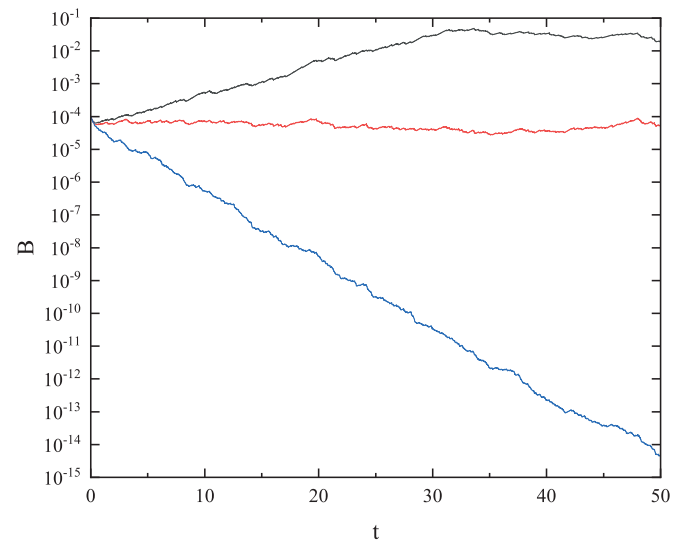


Рис. 4. Графики зависимости магнитного поля от времени со случайными параметрами k , R_α и R_u : чёрная линия соответствует $p = 4\%$, красная — $p = 8\%$, синяя — $p = 15\%$

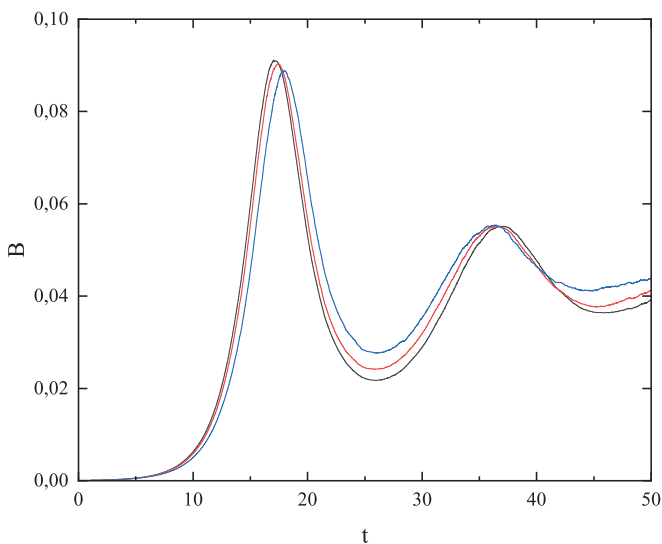


Рис. 3. Графики зависимости магнитного поля от времени со случайным параметром R_u , при $k = 2.5$ и $R_\alpha = 1$: чёрная линия соответствует $p = 4\%$, красная — $p = 8\%$, синяя — $p = 15\%$

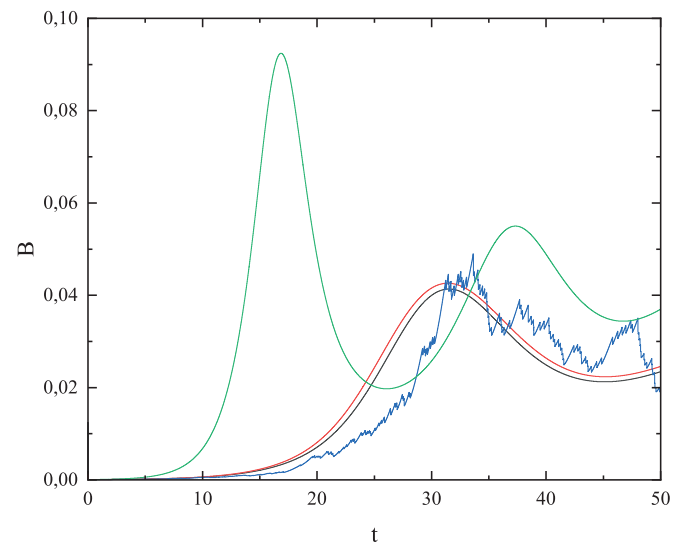


Рис. 5. Графики зависимости магнитного поля от времени со случайными параметрами k , R_u , R_α при $p = 4\%$: красная линия показывает среднее квадратичное значение, чёрная — среднее, синяя — типичное и зелёная соответствует спокойной среде ($p = 0\%$)

принимает значение при котором поле очень быстро разрушается. Более наглядно это можно увидеть, линеаризовав систему (1)-(3) и посмотрев на ее решение, что и будет проделано далее.

Отдельный интерес представляют статистические моменты решения и их сравнение. Из рис. 5 видно, что при учёте активных процессов резко уменьшилась амплитуда и увеличился период затухающих осцилляций магнитного поля. Также можно заметить, что типичное решение довольно сильно отличается от среднего, а среднее квадратичное значение начинает обгонять

среднее. Это является проявлением так называемой перемежаемости.

Перемежаемость — эффект, который широко встречается в задачах, связанных с мультипликативными случайными величинами. В качестве простой иллюстрации рассмотрим случайную величину Q , которая представляет собой произведение $Q = q_1 q_2 \dots q_N$, где каждый из сомножителей q_i принимает с вероятностью $1/2$ значение 0 или 2 . Нетрудно вычислить, что ее среднее значение будет равно $\langle Q \rangle = 1$. В то же время, среднее квадратичное значение будет состав-

Таблица. Значения коэффициента роста γ найденные из аппроксимации численного решения и рассчитанные по формуле (7)

| | γ_0 | γ_k | γ_{R_u} | γ_{R_α} |
|-----------------------------------|------------|------------|----------------|---------------------|
| Численный результат | 0.48921 | -4.51078 | 0.28986 | -0.81646 |
| Качественная аналитическая модель | 0.49019 | -4.50981 | 0.29019 | -0.81588 |

лять $\langle Q^2 \rangle^{1/2} = 2^{N/2}$. Данный элементарный пример наглядно демонстрирует, что редкие, но большие по своей величине реализации имеют гораздо более существенное влияние на среднеквадратичное значение, нежели на среднее. Подобный механизм имеет место в большом количестве задач теории вероятностей и статистической физики, в том числе при исследовании генерации магнитных полей [29].

Интересно было бы дать качественное аналитическое описание механизма перемежаемости в нашем случае. Система (1)–(3) имеет узел в точке $(\{0, 0, 0\})$, и производя процесс линеаризации в этой точке, можно получить новую систему, описывающую магнитное поле на ранних этапах эволюции. Линеаризованная система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dB_r}{dt} &= -\frac{2}{\pi}R_\alpha B_\varphi - (R_u + k)B_r; \\ \frac{dB_\varphi}{dt} &= R_\omega B_r - (R_u + k)B_\varphi; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\alpha\left(R_u + \frac{1}{R_m}\right).\end{aligned}$$

Теперь B_r и B_φ не зависят от α и представляют собой суммы из пары экспонент, одна из которых в условиях данной задачи всегда затухающая. Тогда в начальный момент времени:

$$B = (B_r^2 + B_\varphi^2)^{1/2} = B_0 e^{\gamma t},$$

где

$$\gamma = -R_u - k + \left(-\frac{2}{\pi}R_\alpha R_\omega\right)^{1/2}. \quad (7)$$

Аппроксимируя численные решения в спокойной галактике и галактике с активным звездообразованием ($p = 1$), так же можно найти коэффициенты роста γ . В таблице можно увидеть рассчитанные значения, где γ_0 — значение γ в спокойной галактике; γ_k — значение γ в галактике с активным звездообразованием при

случайном коэффициенте k ; γ_{R_u} — значение γ в галактике с активным звездообразованием при случайном коэффициенте R_u ; γ_{R_α} — значение γ в галактике с активным звездообразованием при случайном коэффициенте R_α .

Можно видеть, что численные значения показателя роста отличаются лишь в третьем знаке, и хорошо «ложатся» на аналитические результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был исследован вопрос о генерации магнитных полей в галактиках с активным звездообразованием с использованием модели с потоками спиральности. Для этого использовались уравнения, в которых основные параметры, характеризующие эволюцию магнитного поля, предполагались случайными. Отметим, что были рассмотрены не только физически значимые случайные флуктуации, но и примеры возмущений, которые достаточно интересны с теоретико-вероятностной точки зрения. С целью повышения статистической значимости результатов нами были использованы выборки размером порядка 10^8 , что потребовало использования суперкомпьютерных ресурсов. Были рассмотрены случайные возмущения различных случайных параметров, получены типичные значения показателей роста. В ряде случаев показано наличие перемежаемости. Вместе с тем, надо помнить, что уравнения носят принципиально нелинейный характер. Это обуславливает несколько иной характер поведения магнитного поля нежели тот, что был получен ранее.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

[1] Hale G.E. // *Astrophysical Journal*. 1908. **28**. P. 315.
 [2] Ginzburg V.L. // *Radio astronomy and the origin of cosmic rays*. Paris Symposium on Radio Astronomy, IAU Symposium. 1959. **9**. P. 589.
 [3] Fermi E. // *Physical Review*. 1949. **45**, № 8. P. 1169.
 [4] Manchester R.N. // *Astrophysical Journal*. 1972. **172**. P. 43.

[5] Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1996. **34**. P. 155.
 [6] Han J.L., Manchester R.N., Qiao G.J. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1999. **306**. P. 371.
 [7] Андреасян П.П., Михайлов Е.А., Андреасян А.Р. // *Астрономический журнал*. 2020. **97**, № 3. С. 179.

- [8] *Parker E.N.* // *Astrophysical Journal*. 1955. **122**. P. 29.
[9] *Elsasser W.M.* // *Reviews of Modern Physics*. 1950. **20**, № 2. P. 135.
[10] *Moss D.* // *MNRAS*. 1995. **275**. P. 191.
[11] *Subramanian K., Mestel L.* // *MNRAS*. 1993. **265**. P. 649.
[12] *Михайлов Е.А., Пушкарёв В.В.* // *Вычислительные методы и программирование*. 2016. **17**. С. 447.
[13] *Михайлов Е.А., Пушкарёв В.В.* // *Астрофизический бюллетень*. 2018. **73**. С. 451.
[14] *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* // *Астрономический журнал*. 2005. **49**. С. 584.
[15] *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**, № 2. С. 103.
[16] *Грачев Д.А.* // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**, № 2. С. 85.
[17] *Михайлов Е.А.* // *Письма в Астрономический журнал*. 2013. **39**, № 7. С. 474.
[18] *Sur S., Shukurov A. Subramanian K.* // *MNRAS*. 2007. **377**. P. 874.
[19] *Михайлов Е.А.* // *Письма в Астрономический журнал*. 2014. **40**, № 7. С. 445.
[20] *Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V.* // *Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale*. — Chapman & Hall/CRC Computational Science. — Boca Raton, United States: Boca Raton, United States, 2013. P. 283.
[21] *Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D.D.* // *Astron. Astrophys.* 2009. **494**. P. 21.
[22] *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* // *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, 1984
[23] *Phillips A.* // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2001. **94**. P. 135.
[24] *Mikhailov E.A., Modyaev I.I.* // *Magnetohydrodynamics*. 2015. **51**. P. 285.
[25] *Михайлов Е.А., Елистратов С.А., Грачев Д.А.* // *Вычислительные методы и программирование*. 2019. **20**. С. 88.
[26] *Калиткин Н.Н.* // *Численные методы*. 1984.
[27] *Антонов А.С.* // *Параллельное программирование с использованием технологии MPI*. 2004.
[28] *Matsumoto M., Nishimura T.* // *Modeling and Computer Simulation*. 1998. **8**, N 1. P. 3.
[29] *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // *УФН*. 1987. **152**, № 1. С. 3.

No-z approximation in dynamo theory with random coefficients in the presence of vertical helicity fluxes

E. A. Mikhailov^{1,2,a}, M. G. Serdyukov^{2,b}

¹*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*

²*P.N.Lebedev Physical Institute of RAS, Moscow, 119991, Russia*

E-mail: ^aea.mikhajlov@physics.msu.ru, ^bserdiukov.mg19@physics.msu.ru

Generation of magnetic fields in various cosmic objects is described using the dynamo mechanism. In the case of galaxies, one of the most effective models is the no-z approximation created for thin disks. It characterizes the field evolution by means of averaged values of parameters related to kinematic characteristics of the interstellar medium. Meanwhile, in the case of a number of active processes, it is necessary to consider significant fluctuations of these parameters, as well as vertical fluxes of the medium. In the present paper, the equations for dynamo in a thin disk with random coefficients are considered and various random perturbations of both astronomical and mathematical interest are investigated. The presence of intermittency is shown, where the higher moments grow faster than the lower ones. It is important to say that we used large random samples that are much larger than ones in previous works.

PACS: 02.50.-r.

Keywords: magnetic fields, dynamo, intermittency, equations with random coefficients.

Received 14 May 2022.

Сведения об авторах

1. Михайлов Евгений Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.
2. Сердюков Михаил Геннадьевич — студент бакалавриата; e-mail: serdiukov.mg19@physics.msu.ru.