Исследование устойчивости по Хайерсу–Уламу системы стохастических дифференциальных уравнений в модели автоволнового процесса видообразования в эволюции организмов

Е. П. Георгиевская,* Н. Т. Левашова†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 25.05.2022; подписана в печать 23.08.2022)

В настоящей работе представлены результаты исследования устойчивости стохастического дифференциального уравнения, использующегося в модели накопления генных мутаций в процессе эволюции организмов. В ходе численной реализации была выявлена необходимость в получении критерия, которому должны отвечать параметры задачи, для того, чтобы решение оставалось в границах, определяемых физическим смыслом. Для решения данной задачи было проведено исследование стохастического уравнения на устойчивость по Хайерсу–Уламу. Полученный в результате критерий хорошо согласуется с численным экспериментом.

PACS: 02.50.Fz. УДК: 51-7

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, лемма Ито, уравнение Ито, устойчивость по Хайерсу–Уламу.

ВВЕДЕНИЕ

Для построения и описания моделей эволюции зачастую используются стохастические подходы [1–3]. В частности, в работе [3] представлена следующая модель видообразования организмов:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -D_u U\left(U^2 - (f-\gamma V)^2\right), \\ \frac{dV}{dt} = D_v\left(-V+f\right), \quad t \in (0,T) \\ U(0) = u^0, \quad V(0) = v^0, \end{cases} \tag{1}$$

где U — функция изменчивости в ходе закрепления мутаций, способствующих видообразованию — активатор видообразования; V — функция ингибитора процесса видообразования; γ — кинетический коэффициент активатора, определяемый отношением вероятностей негативных мутаций к полезным мутациям, способствующим видообразованию, $0 < \gamma < 1$; D_v — коэффициент скорости активатора - средняя скорость замены пар оснований на геном за поколение; D_u — коэффициент скорости ингибитора; f — стохастическая величина, определяемая скачками размеров генома и его кодирующей части для рассмотренных выборок прокариотов, одноклеточных и многоклеточных от среднего значения $\overline{f}$.

По предположению модели, указанные стохастические величины D_u, D_v и f являются винеровскими. Это значит, что их дифференциалы связаны с дифференциалом времени следующим образом [4, 5]

$$df = b_f \varepsilon_f \sqrt{dt}, \quad dD_v = b_{D_v}\varepsilon_{D_v}\sqrt{dt},$$

где b_f и b_{D_v} — среднеквадратичные отклонения величин f и D_v соответственно, ε_f и ε_{D_v} — нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Поскольку некоторые из используемых параметров являются стохастическими, возникает вопрос исследования решения данной системы на устойчивость. В связи с особенностями, связанными со стохастичностью, исследование на устойчивость проводилось в терминах Хайерса-Улама [6, 7]. В настоящей работе применялся подход работы [7]. Отметим, что работы по устойчивости стохастических дифференциальных уравнений довольно редко встречаются в литературе ([8–10]).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Приведем некоторые основные утверждения, которые далее будут использованы в работе.

Лемма Ито [4, 5] Пусть случайный процесс $x(t)$ подчиняется уравнению Ито

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,\delta W,$$

где δW — бесконечно малый винеровский «шум» такой, что

$$\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}, \quad \varepsilon \in N(0,1).$$

Пусть $F(s)$ — дважды дифференцируемая функция. Тогда функция $F(x)$ случайной величины x также подчиняется уравнению Ито, а её дифференциал имеет вид

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{b^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + \\ + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}\delta W.$$

* georgievskaia.ep18@physics.msu.ru
† natasha@wanaku.net

Утверждение 1 [7]. Пусть $X_{1,t}$ и $X_{2,t}$ — два случайных процесса, подчиняющихся уравнению Ито. Рассмотрим их произведение: $F(X_t) = X_{1,t} \cdot X_{2,t}$. Тогда, согласно лемме Ито, дифференциал такой функции имеет вид

$$dF(X_t) = dX_{1,t} \cdot X_{2,t} + X_{1,t} \cdot dX_{2,t} + dX_{1,t} \cdot dX_{2,t}. \tag{2}$$

Если проинтегрировать полученное выражение, придем к равенству

$$X_{1t}X_{2t} = X_{10}X_{20} + \int_0^t \left(X_{2s}dX_{1s} + X_{1s}dX_{2s} + dX_{1s}dX_{2s}\right). \tag{3}$$

Устойчивость по Хайерсу–Уламу [7]. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = (a_t X_t + f_t)\, dt + h dB_t.$$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и для любого случайного процесса $Y_t \in \mathcal{L}_2\left([0,T]\right)$ верно неравенство

$$E\left(Y_t - \int_0^t (a_s Y_s + f_s)\, ds - \int_0^t h_s dB_s\right)^2 < \varepsilon, \qquad t \in (0,T),$$

где E означает математическое ожидание. Тогда, если существует решение X_t такое, что

$$|Y_t - X_t| \leqslant K\varepsilon,\ t \in (0,T),$$

то говорят, что уравнение устойчиво по Хайерсу–Уламу в среднем квадратичном на $(0,T)$ (здесь K — положительное вещественное число).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение из задачи (1), которое описывает ингибитор:

$$\frac{dv}{dt} = -D_v\left(-v + f\right).$$

Явное решение соответствующего детерминированного уравнения имеет вид

$$v = \left(v^0 - f\right) e^{-D_v t} + f.$$

Для того, чтобы учесть стохастический характер величин D_v и f в модели, используем эту зависимость для получения уравнения Ито для величины $v(t, D_v, f)$.

Для построения дифференциала функции ингибитора используем лемму Ито:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,f,D_v) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial D_v^2}(t,f,D_v) b_{D_v}^2\right) dt + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial f}(t,f,D_v) b_f \varepsilon_f + \frac{\partial v}{\partial D_v}(t,f,D_v) b_{D_v}\varepsilon_{D_v}\right), \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -D_v(v^0 - f)e^{-D_v t}, \quad \frac{\partial v}{\partial f} = -e^{-D_v t} + 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial D_v} = -t(v^0 - f)e^{-D_v t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial D_v^2} = t^2(v^0 - f)e^{-D_v t}.$$

Подставим частные производные в выражение для дифференциала (4) и перегруппируем слагаемые:

$$dv = \left(\frac{1}{2}t^2 b_{D_v}^2 v - \left(D_v(v^0 - f)e^{-D_v t} + \frac{1}{2}t^2 b_{D_v}^2 f\right)\right) dt + \\ + (1 - e^{-D_v t})df - t(v^0 - f)e^{-D_v t} dD_v. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения

$$a = \frac{1}{2}t^2 b_{D_v}^2, \quad \varphi = \left(D_v(v^0 - f)e^{-D_v t} + \frac{1}{2}t^2 b_{D_v}^2 f\right),$$
$$h_f = 1 - e^{-D_v t}, \quad h_{D_v} = -t(v^0 - f)e^{-D_v t}. \tag{6}$$

Перепишем уравнение (5) с использованием этих обозначений:

$$dv = avdt - \varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v. \tag{7}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Докажем теперь, что уравнение (7) устойчиво по Хайерсу–Уламу.

Утверждение 2. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и любого случайного процесса y из рассматриваемого вероятностного пространства справедливо следующее неравенство

$$E\left(dy - (ay - \varphi)dt - h_f dB_f - h_{D_v} dD_v\right)^2 < \varepsilon,\ t \in (0,T).$$

Тогда существует решение v уравнения (7), такое что

$$|y - v| \leqslant M \cdot \varepsilon,$$

где

$$M = 4\left(1 + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}}\right)^2.$$

Тем самым уравнение (7) устойчиво по Хайерсу–Уламу в среднем квадратичном на интервале $(0,T)$.

Доказательство. Введём функцию, которую далее будем называть невязкой

$$dg = du - (au - \varphi)dt - h_f dB_f - h_{D_v} dD_v.$$

Умножим это равенство слева и справа на величину $e^{-\int_0^t ads} = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}}$. В результате получим

$$e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(dg - \varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) = \\ = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(du - audt\right).$$

Рассмотрим дифференциал $d\left(e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot u\right)$. Преобразуем его, используя равенство (2) из утверждения 1:

$$d(e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} u) = de^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot u + e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot du + de^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot du = = -\frac{b_{D_v}^2 t^2}{2} e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} u dt + e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} du = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(du - a u dt\right).$$

Отсюда

$$e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(dg - \varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) = d\left(e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} u\right).$$

Проинтегрируем последнее выражение с дополнительным условием $u(t=0) = u_0$:

$$\int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dg(u_s, s) + \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} u - u_0.$$

Умножим полученное равенство слева и справа на $e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}}$:

$$u = u_0 \cdot e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dg(u_s, s). \tag{8}$$

Введем функцию

$$w := u_0 \cdot e^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} + e^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right).$$

Тогда $w(t=0) = u_0$ и

$$dw = u_0 \cdot \frac{b_{D_v}^2 t^2}{2} \cdot e^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} dt + de^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) +$$
$$+ e^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot d\left(\int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right)\right) + de^{+\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot d\left(\int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right)\right).$$

Используя равенство

$$d\left(\int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right)\right) = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(-\varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v\right),$$

получаем:

$$dw = u_0 a e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} + a e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) +$$
$$+ e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \left(-\varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v\right) =$$
$$= a\left(u_0 e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} \left(-\varphi ds + h_f df + h_{D_v} dD_v\right)\right) dt + h_f df + h_{D_v} dD_v - \varphi dt.$$

Используя введённое выше обозначение, можно переписать это уравнение как

$$dw = a w dt - \varphi dt + h_f df + h_{D_v} dD_v.$$

Тем самым, функция w удовлетворяет уравнению (7).

С учетом определения функции w, уравнение (8) можно записать в виде

$$u - w = e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dg.$$

Преобразуем интеграл в правой части с использованием равенства (3) из утверждения 1:

$$\int_0^t e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dg = e^{-\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \cdot g - g(u_0, 0) - \int_0^t \left(g d e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} + d e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dg \right) =$$

$$= e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} g - g(u_0, 0) + \int_0^t g a_s e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} dt.$$

Тогда придем к равенству

$$u - w = g - e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} g(u_0, 0) + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t g a_s e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} ds.$$

Потребуем, чтобы для невязки выполнялось неравенство

$$E\left(g(u_t, t)\right)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для математического ожидания квадрата разности функций u и w получим

$$E(u-w)^2 = E\left(g - e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} g(u_0, 0) + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t g a_s e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} ds \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} + \left| e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \int_0^t a_s e^{-\frac{b_{D_v}^2 s^3}{6}} ds \right| \right)^2 \cdot \varepsilon \leqslant 4 \left(1 + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}} \right)^2 \varepsilon \leqslant M\varepsilon.$$

Итак, уравнение (7) устойчиво по Хайерсу–Уламу в средне-квадратичном.

Отметим, что доказательство устойчивости позволило нам получить критерий условий применимости модели.

Полученная константа

$$M = 4\left(1 + e^{\frac{b_{D_v}^2 t^3}{6}}\right) \tag{9}$$

хорошо согласуется с данными из [3]: время $t = 1000$ млн лет, $b_{D_v} = 10^{-4}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение относительно функции трех аргументов, один из которых время, а два другие — независимые виннеровские процессы. Это уравнение возникло в ходе разработки биофизической модели, описывающей изменение размера генома живых организмов от прокариотов до многоклеточных. В ходе настоящего исследования был проведен анализ устойчивости указанного стохастического уравнения по Хайерсу–Уламу и получено условие, при котором решение сохраняет ограниченное значение в течении требуемого интервала времени. Это условие можно считать критерием применимости биофизической модели.

[1] *Paczuski M., Maslov S., Bak P.* // Phys. rev. E. 1996. **53**. P. 414. 10.1103/PhysRevE.53.414.

[2] *Sneppen K., Bak P., Flyvbjerg H., Mogens J.* // Proceedings of the National Academy of Sciences of

the United States of America. 1995 **92**. 5209-13. 10.1073/pnas.92.11.5209.

[3] *Sidorova A., Tverdislov V., Levashova N., Garaeva A.* // Biosystems. 2020. **198**. 104234.

[4] *Степанов А.А.* // Стохастический мир

[5] *Оксендаль Б.* // Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.:, 1998.

[6] *Hyers D.H.* // On the Stability of the Linear Functional Equation. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1941. **27**(4). P. 222.

[7] *Zhao Xiangkui* // Advances in Difference Equations. 2016. 10.1186/s13662-016-1002-4.

[8] *Ngo-Phuoc Ngoc* // Differential Equations & Applications. 2017. P. 183. 10.7153/dea-09-15.

[9] *Anguraj A., Ravikumar K., Nieto Juan* // Stochastics. 2020. **93**. P. 1. 10.1080/17442508.2020.1783264.

[10] *Dorel B., Constantin B., Afshan T.* // Hyers–Ulam stability and discrete dichotomy. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. **423**. P. 1738. 10.1016/j.jmaa.2014.10.082.

Mean square Hyers–Ulam stability for a system of stochastic differential equations

E. P. Georgievskaia[a], **N. T. Levashova**[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*georgievskaia.ep18@physics.msu.ru,* [b]*natasha@wanaku.net*

This paper presents the results of a study of the stochastic differential equation stability used in the model of accumulation of gene mutations during the evolution of organisms. In the course of numerical implementation, the need was revealed to obtain a criterion that the parameters of the problem must be in order for the solution to remain within the boundaries determined by the physical meaning. To solve this problem, a study of the stochastic equation for stability according to Hyers-Ulam was carried out. The resulting criterion corresponds well with the numerical experiment.

PACS: 02.50.Fz.
Keywords: stochastic differential equation, Ito's lemma, Ito's equation, Hyers–Ulam stability.
Received 25 May 2022.

Сведения об авторах

1. Георгиевская Екатерина Павловна — студент; e-mail: georgievskaia.ep18@physics.msu.ru.
2. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: natasha@wanaku.net.