

Критерий бесконечной гамма обратной связи в модели Дваера

А. С. Седельников^{1,2,*}, Д. И. Землянская^{1,3,†}, Е. М. Стадничук^{1,4,‡}

¹Московский физико-технический институт
Россия, 141701, Московская обл.,
Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

²Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН. Россия, 119991, Москва, Ленинский пр-т., д. 53

³Институт ядерных исследований РАН. Россия, 117312,
Москва, В-312, проспект 60-летия Октября, д. 7а

⁴Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
Россия, 101000, Москва, Мясницкая ул., д. 20

(Поступила в редакцию 26.05.2022; подписана в печать 19.08.2022)

Лавины убегающих электронов, ускоряемых электрическим полем в грозовых облаках, являются одним из источников гамма вспышек земного происхождения (Terrestrial Gamma-ray Flashes, TGF). Однако, электронов, образующихся в лавинном процессе, оказывается недостаточно для описания TGF, экспериментально наблюдаемых из космоса. На динамику лавин существенное влияние также оказывают механизмы обратной связи. Один из них излучательный механизм, вклад которого увеличивается с ростом напряжённости электрического поля. В его основе лежит явление разворота фотонов тормозного излучения, образующихся при ускорении электронов в поле облака. Эти фотоны могут рождают новые электроны в начале области образования лавины, что приводит к образованию вторичных лавин. Другими словами, это механизм гамма обратной связи. В настоящей работе получен критерий образования бесконечной обратной связи в модели Дваера за счёт разворота тормозных гамма квантов.

PACS: 92.60.Pw.

УДК: 53.01.

Ключевые слова: лавины убегающих электронов, гамма обратная связь.

ВВЕДЕНИЕ

После открытия земных гамма вспышек (Terrestrial Gamma-ray Flashes, TGF) [1] одной из важнейших задач в атмосферной физике высоких энергий стала задача построения модели этого явления. Одним из источников TGF являются лавины убегающих электронов.

Лавины убегающих электронов образуются в электрическом поле грозового облака. Сила, действующая на релятивистские электроны со стороны ускоряющего поля, может превышать силу торможения, связанную с взаимодействием с молекулами воздуха [2]. Такие электроны называются убегающими. Они могут рождают новые убегающие электроны [3], что приводит к формированию лавины. На динамику лавин существенно влияют механизмы обратной связи, которые изучал Джозеф Дваер. Подробное описание модели и симуляций Дваера содержится в [3]. В его модели рассматривается воздушный цилиндр с однородным электрическим полем, в котором рождаются релятивистские электроны и происходит образование лавин. В результате обратной связи возникают лавины новых поколений. Существует позитронный и излучательный механизмы обратной связи. Позитронная связь реализуется следующим образом. Лавина убегающих электронов излучает тормозные гамма кванты. Эти гамма

кванты рождают электрон-позитронные пары и позитроны начинают распространяться в направлении противоположном направлению электронной лавины. Затем позитроны ионизируют воздух в начале области, что приводит к образованию новых убегающих электронов. Излучательный механизм основан на том, что фотон тормозного излучения рассеивается назад и затем в начале ускоряющей области рождает новые убегающие электроны за счёт комптоновского рассеяния или фотоэффекта. Излучательный механизм в дальнейшем будет для краткости называться гамма обратной связью. Вклад гамма обратной связи увеличивается с ростом напряжённости поля [4].

Лавины убегающих электронов изучались с помощью численного моделирования [5] и Монте-Карло моделирования [6]. Аналитические решения представлены в [7]. Численные решения кинетических уравнений, включающих в себя механизмы обратной связи, описаны в [6]. Коэффициенты обратной связи и условия бесконечной обратной связи были получены в Монте-Карло симуляциях [4]. Критерий бесконечной позитронной обратной связи был выведен в работе [8].

В настоящей работе получен критерий бесконечной гамма обратной связи. То есть получено условие на размер ускоряющей области и величину поля, при выполнении которого число лавин с ростом поколения будет неограниченно расти. Также из моделирования в Geant4 получены некоторые параметры, необходимые для описания гамма обратной связи. Проводится сравнение критерия бесконечной позитронной обратной связи [8] и критерия бесконечной гамма обратной связи.

* sedelnikov.as@phsyetch.edu

† zemlianskay.d@phystech.edu

‡ yegor.stadnichuk@phystech.edu

1. ОПИСАНИЕ ГАММА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Будем рассматривать ячейку с напряжённостью поля E и размером L . Пусть λ_{RREA} - длина нарастания, а лавина рождается в точке z_0 . Будем считать, что напряжённость поля и плотность воздуха не изменяются и $L \gg \lambda_{RREA}$. Тогда, учитывая экспоненциальное нарастание, число убегающих электронов в точке z можно описать при помощи формулы:

$$N_{RREA}(z, z_0) = e^{\frac{z-z_0}{\lambda_{RREA}}}. \quad (1)$$

Введём длину пробега электрона до рождения гамма кванта λ_γ и вероятность разворота гамма кванта p_γ . Используя эти параметры, можно получить число фотонов, развернувшихся внутри отрезка $[z_0, z]$:

$$f_\gamma(z, z_0) = p_\gamma \frac{\lambda_{RREA}}{\lambda_\gamma} \cdot \left(e^{\frac{z-z_0}{\lambda_{RREA}}} - 1 \right). \quad (2)$$

$$\frac{df_2(z, z_0)}{dz} = \frac{p_\gamma \cdot p_e}{\lambda_\gamma \lambda_{\gamma \rightarrow e}} \cdot \left[\frac{\lambda_x \lambda_{RREA}}{\lambda_x - \lambda_{RREA}} \cdot e^{-\frac{z_0}{\lambda_{RREA}}} \cdot e^{\frac{z}{\lambda_x}} \left(e^{\frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} - e^{\frac{z(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} \right) \right], \quad (5)$$

$$\frac{df_2(z, z_0)}{dz} = \beta \cdot e^{-\frac{z_0}{\lambda_{RREA}}} e^{\frac{z}{\lambda_x}} \left(e^{\frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} - e^{\frac{z(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} \right), \quad (6)$$

$$\beta = \frac{p_\gamma p_e \lambda_{RREA} \lambda_x}{\lambda_{\gamma \rightarrow e} \lambda_\gamma (\lambda_x - \lambda_{RREA})}. \quad (7)$$

Пусть первоначальная лавина рождается в точке $z_0 = 0$. Тогда $\frac{df_2(\zeta, 0)}{d\zeta} d\zeta$ — число вторичных лавин внутри интервала $(\zeta, \zeta + d\zeta)$. Каждая лавина второго поколения рождает третье поколение лавин, распределение которых также описывается формулой (5), в предположении отсутствия взаимодействия между лавинами. Лавина начинает оказывать существенное воздействие на другие лавины, когда создаваемое ею и её ионным облаком поле становится сравнимым с внешним полем:

$$E \approx \frac{eN_{RREA}}{\varepsilon_0 \Delta_\perp^2}, \quad (8)$$

где Δ_\perp среднеквадратичное отклонение электронов лавины в перпендикулярном направлении, которое может быть найдено по формуле

$$\Delta_\perp^2 = 4LD_\perp/\nu. \quad (9)$$

Согласно [9] отношение коэффициента поперечной

диффузии и средней скорости электронов может быть определено по эмпирической формуле $D_\perp/\nu = (5.86 \times 10^4)E^{-1.79}$ м. Отсюда можно найти условие на плотность воздуха, при которой можно пренебречь взаимодействием между лавинами. Так для напряжённости поля $E = 400$ кВ/м и длины ускоряющей области $L = 500$ м $\rho \ll 0.69$ кг/м³. Это условие выполняется уже для высоты 7 км над уровнем моря. Таким образом, в большом диапазоне высот, в котором детектируется TGF и способны развиваться лавины убегающих электронов, можно считать, что лавины не взаимодействуют друг с другом.

$$\frac{dN}{dz} = \frac{1}{\lambda_{\gamma \rightarrow e}} e^{-\frac{z}{\lambda_x}}. \quad (3)$$

Используя формулы (2), (3) и вероятность разворота электрона p_e получим количество вторичных электронных лавин, рождённых в координате z в интервале $(z, z + dz)$ при условии, что первичная лавина родилась в координате z_0 :

$$df_2(z, z_0) = dz \cdot \frac{p_\gamma \cdot p_e}{\lambda_{\gamma \rightarrow e}} \cdot \int_{z_0}^L d\zeta \frac{\partial f_\gamma(\zeta, z_0)}{\partial \zeta} e^{\frac{z-\zeta}{\lambda_x}}. \quad (4)$$

В результате интегрирования получаем следующее выражение:

Полное число лавин третьего поколения можно получить учитывая вклады от всех лавин второго поколения. Что приводит к формуле

$$\frac{df_3(z, 0)}{dz} = \int_0^L d\zeta \frac{\partial f_2(z, \zeta)}{\partial z} \frac{\partial f_2(\zeta, 0)}{\partial \zeta}. \quad (10)$$

Подставляя формулу для распределения лавин второго поколения и интегрируя получим:

$$\frac{df_3(z, 0)}{dz} = \beta^2 \frac{\lambda_{RREA} \lambda_x}{\lambda_x - \lambda_{RREA}} \left(e^{\frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} - 1 - \frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}} \right) \times e^{\frac{z}{\lambda_x}} \left(e^{\frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} - e^{\frac{z(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} \right) = \Gamma \cdot \frac{df_2(z, 0)}{dz}. \quad (11)$$

где Γ — это коэффициент, не зависящий от z . Аналогично третьему поколению лавин убегающих электронов получаем, что распределение лавин в поколении $i + 1$ связано с распределением i -го поколения формулой:

$$\frac{df_{i+1}(z, 0)}{dz} = \int_0^L d\zeta \frac{\partial f_2(z, \zeta)}{\partial z} \frac{\partial f_i(\zeta, 0)}{\partial \zeta}. \quad (12)$$

По индукции получаем выражение для числа лавин в поколении i :

$$\frac{df_i(z, 0)}{dz} = \Gamma^{i-2} \cdot \frac{df_2(z, 0)}{dz}. \quad (13)$$

Коэффициент Γ описывает изменение числа лавин от поколения к поколению в результате гамма обратной связи. Будем называть его коэффициентом гамма обратной связи:

$$\Gamma = \frac{p_\gamma \cdot p_e}{\lambda_{\gamma \rightarrow e} \lambda_\gamma} \left(\frac{\lambda_{RREA} \lambda_x}{\lambda_x - \lambda_{RREA}} \right)^2 \times \left(e^{\frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}}} - 1 - \frac{L(\lambda_x - \lambda_{RREA})}{\lambda_x \lambda_{RREA}} \right). \quad (14)$$

Если $\Gamma > 1$, то обратная связь будет бесконечной. То есть при стремлении номера поколения к бесконечности число лавин в нём также будет стремиться к бесконечности. При $\Gamma = 1$ число лавин в любом поколении будет оставаться одинаковым. Если же $\Gamma < 1$, то число лавин будет уменьшаться.

2. ПАРАМЕТРЫ ГАММА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Длину экспоненциального нарастания числа электронов в лавине можно вычислить по эмпирической формуле [4, 5]:

$$\lambda_{RREA} = \frac{7300 \text{ кВ}}{E - 276 \text{ кВ/м} \cdot n}. \quad (15)$$

где $n = \frac{\rho}{\rho_0}$ - отношение плотности воздуха на рассматриваемой высоте к плотности воздуха на уровне моря. Согласно [8], вероятность разворота электрона, рождённого гамма-квантом, можно описать при помощи формулы:

$$p_e = 3.2 \cdot 10^{-4} n \cdot \left[\frac{E}{1000 \text{ кВ/м} \cdot n} - \left(\frac{E}{2500 \text{ кВ/м} \cdot n} \right)^2 \right]^{5.5}. \quad (16)$$

Согласно [4], длина пробега электрона до рождения гамма кванта может быть получена по формуле

$$\lambda_\gamma = \frac{202.53 \text{ м}}{n}. \quad (17)$$

Для получения вероятности разворота, длины затухания и длины пробега гамма кванта до рождения

электрона было проведено моделирование в Geant4. Для определения процессов, которые нужно учитывать, в Geant4 можно выбрать физический лист. В данной работе был выбран G4EmStandartPhysics option4, в который входят все необходимые процессы [10], включая комптоновское рассеяние и фотоэффект. В ячейке, заполненной воздухом с плотностью, соответствующей высоте 10 км над уровнем моря $\rho = 0,41 \text{ кг/м}^3$, из одной точки в одном направлении запускались фотоны с одинаковой энергией. В выходной файл записывались координаты электронов, рождённых фотонами. Такое моделирование было проведено для различных начальных энергий гамма квантов. В результате были получены распределения электронов, рождённых фотонами после разворота. Эти распределения аппроксимировались следующей формулой:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{p_\gamma}{\lambda_{\gamma \rightarrow e}} e^{-\frac{z}{\lambda_x}}. \quad (18)$$

Пример такого распределения электронов, рождённых развернувшимся фотоном с энергией $\varepsilon = 0.1 \text{ МэВ}$ приведён на рис. 1.

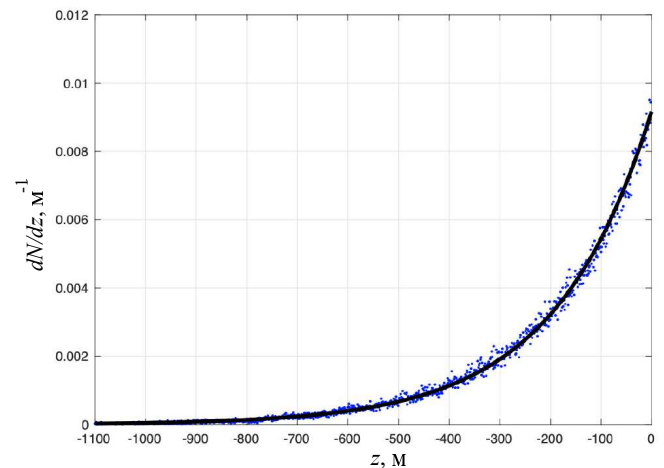


Рис. 1. График распределения электронов, рождённых развернувшимся фотоном. Синие точки — результат моделирования. Чёрная линия — аппроксимация формулой (18)

Таким образом, были получены значения длины затухания гамма квантов λ_x и отношения вероятности разворота к длине пробега до рождения электрона $\frac{p_\gamma}{\lambda_{\gamma \rightarrow e}}$ для различных начальных энергий фотонов. Затем эти параметры усреднялись с использованием формулы для распределения родившихся в лавине фотонов по энергии [11]:

$$f_{ph} \propto \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{7.3 \text{ МэВ}}\right). \quad (19)$$

В результате было получено, что для высоты 10 км над уровнем моря длина затухания гаммы $\lambda_x = 294.26$

м, а отношение вероятности разворота к длине пробега до рождения электрона $\frac{p_\gamma}{\lambda_{\gamma \rightarrow e}} = 7.23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. Известно, что длины процессов, связанных с гамма квантами не зависят от напряжённости поля, однако обратно пропорциональны плотности воздуха [12]. Поэтому справедливы следующие формулы:

$$\frac{\lambda_{\gamma \rightarrow e}}{p_\gamma} = \frac{46.69 \text{ м}}{n} \quad (20)$$

$$\lambda_x = \frac{99.33 \text{ м}}{n} \quad (21)$$

3. СРАВНЕНИЕ ПОЗИТРОННОЙ И ГАММА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

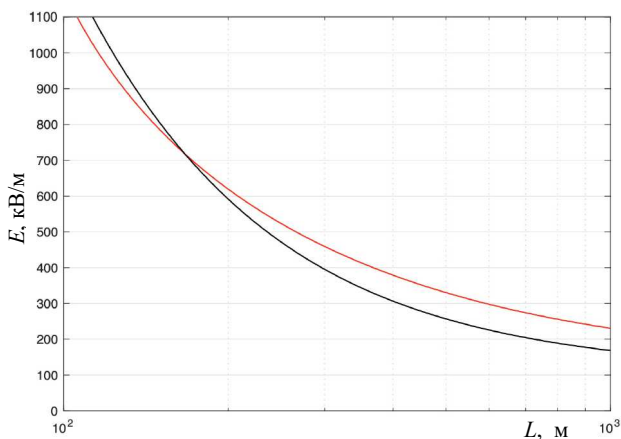


Рис. 2. График зависимости напряжённости поля от размера ячейки, при которых коэффициент обратной связи равен 1. Красная линия соответствует гамма обратной связи, а чёрная — позитронной обратной связи

Перейдём к сравнению критериев позитронной и гамма обратной связи. Критерий бесконечной позитронной обратной связи был получен в работе [8]. Для

этого механизма изменение числа лавин с ростом поколения также может быть описано через некоторый коэффициент позитронной обратной связи. На рис. 2 представлена зависимость напряжённости электрического поля от размера ускоряющей области, при которых коэффициенты позитронной и гамма обратной связи равны 1.

Из графика видно, что для маленьких полей для бесконечной позитронной обратной связи требуется ячейка меньших размеров, чем для гамма обратной связи. Для больших полей — наоборот. Это согласуется с результатами [4]. Такой результат объясняется тем, что для маленьких полей длина нарастания лавины превышает длину затухания развернувшихся гамма квантов, при этом длина затухания позитронов (из-за аннигиляции) превышает сотни метров, что позволяет позитронному механизму работать при низких полях. При высоких полях размер ячейки слишком мал для образования электрон-позитронных пар, а на разворот гамма квантов размер ячейки не влияет, так как фотоны, в отличие от позитронов, могут разворачиваться и вне ускоряющей области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В модели Дваера бесконечная гамма обратная связь возникает, когда коэффициент $\Gamma > 1$. Коэффициент гамма обратной связи может быть описан формулой (14). Он зависит от различных характерных длин, которые должны быть точно вычислены, чтобы формула (14) давала хорошее предсказание бесконечной гамма обратной связи. В данной работе приведены приближенные выражения для всех, участвующих в критерии параметров. Однако необходимы дальнейшие исследования, чтобы получить более точные зависимости характерных длин от плотности воздуха. Из сравнения позитронной и гамма обратной связи видно, что для низких полей, которые преобладают в грозовых облаках, вклад позитронной обратной связи выше.

[1] Fishman G.J. et al. // Science. 1994. **264**. N 5163. P. 1313.
[2] Wilson C.T.R. // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press. 1925. **22**. N 4. P. 534.
[3] Dwyer J.R. // Geophys. Res. Lett. 2003. **30**. N 20. **33**. P. 1.
[4] Dwyer J.R. // Physics of plasmas. 2007. **14**. N 4. P. 042901.
[5] Бабич Л.П. // УФН. 2020. **190**. N 12. P. 1261.
[6] Dwyer J.R. // J. of Geophys. Res.: Space Physics. 2012. **117**. N A2.
[7] Lehtinen N.G. et al. // J. of Geophys. Res.: Space Physics.

1999. **104**. N A11. P. 24699.
[8] Stadnichuk E., Svechnikova E. // Atmospheric Research. 2022. **277**. P. 106329.
[9] Dwyer J.R. // J. of Geophys. Res.: Space Physics. 2010. **115**. N A3.
[10] Agostinelli S. // Nuclear instruments and methods in physics research. section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. **506**. N 3. P. 250.
[11] Sarria D. et al. // Geophys. Res. Lett. 2021. **48**. N 9. P. e2021GL093152.
[12] Stadnichuk E. et al. // J. of Geophys. Res.: Atmospheres. 2021. **126**. N 24. P. e2021JD035278.

The criterion for infinite gamma feedback in the Dwyer model

A. S. Sedelnikov^{1,2,a}, D. I. Zemlianskaya^{1,3,b}, E. M. Stadnichuk^{1,4,c}

¹*Moscow Institute of Physics and Technology (national research university), Dolgoprudny 141701, Russia.*

²*Lebedev Physical Institute, Moscow 119991, Russia.*

³*Institute for Nuclear Research, Moscow 117312, Russia.*

⁴*National Research University Higher School of Economics, Moscow 101000, Russia.*

E-mail: ^asedelnikov.as@phsyetch.edu, ^bzemlianskay.d@phystech.edu, ^cyegor.stadnichuk@phystech.edu

Avalanches of runaway electrons accelerated by an electric field in thunderclouds are one of the sources of Terrestrial Gamma-ray Flashes (TGF). However, electrons produced in the avalanche process are not enough to describe TGF, which experimentally observed from space. Joseph Dwyer proposed a feedback model that increases the number of particles in avalanches. One of the key mechanisms in the Dwyer model is the radiative mechanism, the contribution of which increases with the electric field strength. It is based on the phenomenon of reversal of bremsstrahlung photons, which are formed during the acceleration of electrons in the cloud field. These photons can give new electrons at the beginning of the avalanche formation region, which leads to the formation of secondary avalanches. In other words, it is a gamma feedback mechanism. In this work, a criterion for the formation of infinite feedback due to the reversal of bremsstrahlung gamma quanta in the Dwyer model was derived.

PACS: 92.60.Pw.

Keywords: avalanche of runaway electrons, gamma feedback.

Received 26 May 2022.

Сведения об авторах

1. Седелников Александр Сергеевич — студент бакалавриата; e-mail: sedelnikov.as@phsyetch.edu.
2. Землянская Дарья Ильинична — студентка бакалавриата; e-mail: zemlianskay.d@phystech.edu.
3. Стадничук Егор Михайлович — аспирант; e-mail: yegor.stadnichuk@phystech.edu.