

## Численное решение уравнения Кортевега–де Вриза на подвижной сетке с использованием двухслойных разностных схем

Е. Н. Быковская\*

*Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша» Российской академии наук  
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4*

(Поступила в редакцию 21.06.2021; подписана в печать 13.07.2021)

В данной работе приводятся результаты численного и аналитического исследования двухслойных явных и неявных разностных схем для уравнения Кортевега–де Вриза. На эйлеровых расчетных сетках удовлетворительное численное решение было получено только при использовании явно-неявной разностной схемы типа Кранка–Николса 2-го порядка аппроксимации по временной  $t$  и пространственной  $x$  переменным. Полностью неявная двухслойная схема 1-го порядка по времени  $t$  и 2-го по пространству  $x$ , хотя и является абсолютно устойчивой, но наличие большой схемной вязкости приводит к существенному искажению решения.

Применение подвижных сеток с динамической адаптацией позволило получить численные решения высокой точности не только для схем типа Кранка–Николса, но и для семейства полностью неявных двухслойных схем 1-го порядка по времени  $t$  и 2-го по пространству  $x$ .

Важным достоинством рассматриваемых схем является их простота и прозрачность базовых математических конструкций.

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Lj

УДК: 519.63

Ключевые слова: разностные схемы, аппроксимация, численное решение, динамическая адаптация, адаптирующиеся к решению сетки, подвижные сетки, уравнение Кортевега–де Вриза, солитонное решение, нелинейные волны.

### ВВЕДЕНИЕ

Теория нелинейных волн является довольно молодой наукой, несмотря на то что первые исследования велись еще в XIX веке и были связаны с задачами газо- и гидродинамики, включающими в себя ряд интересных проблем прикладного и фундаментального характера [1]. Основное становление теории нелинейных волн, как науки произошло в 60-х–70-х годах прошлого века в связи с развитием вычислительной техники и математики в целом, что сделало возможным анализ огромных и растущих данных, сопровождающих многомерную нелинейную динамику.

Первоначально уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ) возникло из потребностей гидродинамики [2, 3], связанных с распространением нелинейных уединенных волн на мелкой воде [4, 5], закончившихся открытием солитона [6].

Солитонами называют уединенные волны, сохраняющие свою форму и скорость с течением времени. При взаимодействии между собой солитоны сначала деформируются, а потом восстанавливают свои исходные параметры. При этом единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз. Отличительной особенностью уравнения КдВ является тот факт, что любое начальное возмущение, экспоненциально спадающее на бесконечности, с течением времени эволюционирует в конечный набор солитонов, разнесенных в пространстве.

В настоящее время процессам возникновения и развития уединенных волн уделяется повышенное внимание, что определяется обширной областью существования подобных явлений.

Актуальность исследований определяется тем, что подобные волновые явления изучаются во многих областях современной физики: гидродинамики [7], нелинейной оптики [8], физика плазмы [9, 10] и твердого тела [11]. Сложность исследуемых проблем приводит к необходимости разработки новых методов и подходов.

Методы решения уравнения КдВ активно развиваются, поскольку солитоны используются в исследовании и решении нелинейных волновых уравнений [12] во многих областях [13]. Для численного решения уравнения КдВ использовались различные методы: Галеркина [14–16], коллокаций [17, 18], конечных элементов [19–21], конечно-разностные [22–30] и др. Выбор того или иного метода численного решения не только во многом определяет качество численного моделирования, но и сложность или простоту реализации того или иного вычислительного алгоритма, что тоже является весьма важным.

Уравнение КдВ представляет собой важный инструмент изучения нелинейных волн, поэтому способ построения оптимальной технологии решения данного уравнения в различных условиях остается актуальным.

В работах [31, 32] уже было представлено численное и аналитическое исследование семейства двухслойных разностных схем на эйлеровой сетке для уравнения КдВ, включающее в себя как явную, так и неявные схемы. В связи с необходимостью повышения точности численного решения уравнения КдВ возникла необхо-

\* bykovel54@yandex.ru

димось применения подвижных сеток с динамической адаптацией [33]. До настоящего времени данный вопрос практически не был исследован.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение Кортевега–де Вриза можно представить следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1)$$

По общепринятой терминологии второй член в уравнении (1) называют нелинейным, а третий — дисперсионным. В целом уравнение КдВ описывает эволюцию слабо нелинейных длинноволновых возмущений в среде с дисперсией в области высоких частот.

Воспользовавшись спектральным подходом [34], можно показать, что дисперсия, как и диссипация, может препятствовать опрокидыванию волны. Физически это связано с тем, что различные спектральные компоненты распространяются с различными скоростями, что ограничивает накопление нелинейных эффектов, которые приводят к появлению бесконечно быстрых изменений профиля. В итоге, солитон образуется, когда нелинейный член в уравнении (1) уравновешивается дисперсионным:

$$\alpha \frac{u^2}{2} \sim \beta u_{xx}$$

и представляет собой стационарный бегущий однополярный импульс

$$u(x, t) = \frac{A}{\operatorname{ch}[(x - x_0 - Vt)/\delta]^2} \quad (2)$$

с амплитудой  $A = 3V/\alpha$ , полушириной  $\delta = \sqrt{4\beta/V}$  на уровне  $0.42A$ , движущийся в направлении оси  $X$  со скоростью  $V$ . В дальнейшем именно солитонное решение (2) будет использоваться в качестве начального условия.

В случае преобладания нелинейного члена, начальное возмущение эволюционирует в группу солитонов, количество которых зависит от конкретного вида начального условия. Если преобладает дисперсионный член, то начальное возмущение тоже эволюционирует в солитон, но при этом образуются кноидальные волны — периодические решения уравнения КдВ.

С учетом граничных и начальных условий задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

$$t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$t = 0: \quad u(x, 0) = \frac{A}{\operatorname{ch}[(x - x_0)/\delta]^2},$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$x = x_R: \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Для удобства была выбрана достаточно большая расчетная область  $[0, x_R]$ , исключая влияние границ на решение.

Поскольку основной целью данной работы был поиск оптимальной технологии решения во всевозможных условиях, то было решено воспользоваться методом динамической адаптации.

### 2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В основе метода динамической адаптации лежит процедура перехода из физического пространства  $\Omega_{x,t}$  с декартовой системой координат и переменными  $(x, t)$  в некоторое пространство  $\Omega_{q,\tau}$  с произвольной нестационарной системой координат и переменными  $(q, \tau)$ . Произвольность нестационарной системы координат означает, что скорость этой системы координат заранее неизвестна и должна быть определена в ходе решения. Переход к произвольной нестационарной системе координат позволяет сформулировать задачу построения и адаптации расчетных сеток на дифференциальном уровне, в связи с чем в полученной математической модели часть дифференциальных уравнений описывает физические процессы, а другой описывает поведение узлов сетки [35, 36]. Это позволяет адаптировать сетки к различным особенностям решения, такие как: большие градиенты [35, 37, 38] перемещение границ [39–43] и разрывные решения [33, 36, 44, 45]. Особенностью рассматриваемого уравнения КдВ является наличие солитонного решения, перемещающегося на большие расстояния с постоянной скоростью  $V$ . Именно эта особенность будет учтена при построении динамически адаптирующейся сетки, используемой для численного решения нелинейного уравнения КдВ.

Пусть  $(x, t)$  исходные независимые переменные, определяющие эйлерову систему координат. Переход из физического пространства с независимыми переменными  $(x, t)$ , определяющими эйлерову систему координат  $\Omega_{x,t} : x_0 \leq x \leq x_R, t > 0$  к произвольной нестационарной системе координат с переменными  $(q, \tau)$  некоторого расчетного пространства  $\Omega_{q,\tau} : q_0 \leq q \leq q_R, \tau > 0$  осуществляется с помощью замены переменных общего вида  $x=f(q, \tau), \quad t = \tau$ , которой соответствует однозначное невырожденное обратное преобразование  $q=\varphi(x, t)$  и  $t=\tau$ .

Дифференциальные операторы при переходе из одной системы в другую связаны между собой следующим образом:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial \cdot}{\partial q}; \quad \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \cdot}{\partial q};$$

$$\frac{\partial^3 \cdot}{\partial x^3} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \cdot}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

где  $\psi$  — метрический коэффициент,  $Q$  — функция, в общем случае зависящая от искомого решения и, имеющая смысл скорости:

$$Q = \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad \psi = \frac{\partial x}{\partial q}. \tag{3}$$

Из (3) следует уравнение непрерывности для метрического коэффициента:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \tag{4}$$

представляющее собой уравнение обратного преобразования.

Тогда с учетом (4) уравнение (1) в новой системе координат может быть представлено в недивергентной форме совместно с уравнением обратного преобразования

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{(\alpha u - Q)}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\beta}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right] = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial Q}{\partial q}.$$

В дивергентной форме уравнение (5) имеет вид

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \alpha \frac{u^2}{2} - Qu \right] + \beta \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right] = 0. \tag{6}$$

В методе динамической адаптации уравнение в недивергентной форме обычно используется для определения функции  $Q$ , а в дивергентной — для построения консервативных разностных схем.

Подчеркнём, что особенностью солитонного решения уравнения КдВ является распространение возмущения на большие расстояния без изменения (т.е. с сохранением первоначального пространственного профиля) с постоянной скоростью  $V$ .

Основываясь на этой особенности, метрический коэффициент может быть принят постоянным  $\psi = \text{const}$  в течение всего процесса решения. Для удобства постоянную выбирают равной единице:

$$\psi = 1.$$

В этом случае уравнения обратного преобразования координат приобретает вид

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = Q. \tag{7}$$

При этом уравнения (5), (6) преобразуются к более простому виду:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (\alpha u - Q) \frac{\partial u}{\partial q} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \alpha \frac{u^2}{2} - Qu \right] + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} = 0. \tag{9}$$

Определим функцию преобразования исходя из принципа квазистационарности [38], согласно которому в недивергентном уравнении (8) предполагается выполнение равенства  $\partial u / \partial \tau = 0$ . В итоге получаем в явной форме выражение для определения скорости  $Q$ :

$$Q = \alpha u + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} / \frac{\partial u}{\partial q}. \tag{10}$$

Для упрощения полученного выражения воспользуемся аналитической записью солитонного решения в форме

$$u(q, \tau) = \frac{3V}{\alpha \text{ch} \left[ q \sqrt{V/(4\beta)} \right]^2}.$$

Подставляя его в (10), и, выполняя необходимое дифференцирование, получим простое равенство  $Q = V$ , характеризующее собой подвижную систему координат,двигающуюся со скоростью солитона  $V$ .

Подобное проявление динамической адаптации встречалось в задаче о взаимодействии аннигилирующих импульсов [45].

Окончательная постановка задачи в переменных  $(q, \tau)$  с использованием дивергентной формы уравнения (9), уравнения обратного преобразования (7) и необходимых краевых условий принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \left( \alpha \frac{u^2}{2} \right)}{\partial q} - \frac{\partial (Qu)}{\partial q} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = Q, \tag{12}$$

$$0 < q < q_R, \quad \tau > 0$$

Граничные и начальные условия:

$$\tau = 0 : \quad u(q, 0) = \frac{A}{\text{ch} [(q - q_0) / \delta]^2},$$

$$q = 0 : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0, \quad Q(0, \tau) = V,$$

$$q = q_R : \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad Q(q_R, \tau) = V$$

### 3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В расчетном пространстве  $\Omega_{q, \tau}$  рассмотрим вычислительную сетку  $\omega_{\Delta q}^{\Delta \tau}$ :

$$\omega_{\Delta\tau}^{\Delta q} = \left\{ \begin{array}{l} (q_m, \tau^k), \left(q_{m+\frac{1}{2}}, \tau^k\right) : q_{m+1} = q_m + \Delta q, \quad q_{m+\frac{1}{2}} = q_m + \frac{\Delta q}{2}, \\ \tau^{k+1} = \tau^k + \Delta\tau, \quad m = 0, \dots, N; \quad k = 0, \dots, K \end{array} \right\} \quad (13)$$

При этом функции  $x_m^k, u_m^k$  относятся к целым узлам сетки.

На сетке (13) запишем семейства разностных схем для уравнений (11), (12) в виде:

$$\begin{aligned} (u_m^{k+1} - u_m^k) - Q \frac{\Delta\tau}{\Delta q} (u_{m+1/2}^{k+\sigma} - u_{m-1/2}^{k+\sigma}) + \alpha \frac{\Delta\tau}{\Delta q} \left( \frac{(u_{m+1/2}^{k+\sigma})^2}{2} - \frac{(u_{m-1/2}^{k+\sigma})^2}{2} \right) + \\ + \frac{\beta}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta q^3} (u_{m+2}^{k+\sigma} - 2u_{m+1}^{k+\sigma} + 2u_{m-1}^{k+\sigma} - u_{m-2}^{k+\sigma}) = 0, \\ x_m^{k+1} = x_m^k + Q\Delta\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

где  $u_{m-1/2} = \frac{u_m + u_{m-1}}{2}$ ,  $u_m^{k+\sigma} = (1 - \sigma)u_m^k + \sigma u_m^{k+1}$ ,  $\sigma$  – весовой множитель, определяющий степень неявности разностной схемы.

При всех значениях  $\sigma \neq 0.5$  схема (14) имеет 1-й порядок аппроксимации по времени. В случае  $\sigma = 0.5$  выражение (14) представляет собой неявную схему типа Кранка–Николсона со 2-м порядком аппроксимации по времени. При всех значениях  $\sigma$  реализован 2-й порядок аппроксимации по пространству.

Таким образом, была построена равномерная вычислительная сетка, где все узлы двигаются с одинаковой скоростью  $Q$  равной скорости солитона  $V$ , найденной исходя из аналитического решения (2).

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для численного тестирования использовались следующие параметры:

- параметры уравнения:  $\alpha = 6, \beta = 1$ ;
- параметры начального условия солитона (2):  $x_0 = 10, V = 4, A = 2, \delta = 1$ ;
- размер изначальной расчетной области  $L = 20$ , число узлов  $N = 80$ , т.е. величина пространственного шага  $\Delta q = 0.25$ ;
- шаг интегрирования выбирался автоматически исходя из заданной точности равной  $10^{-9}$  и максимального числа итераций равного 3.

На рис. 1, б показано решение с использованием схемы типа Кранка–Николсона ( $\sigma = 0.5$ ) на момент времени  $t = 100$ , когда солитон сместился из начального положение на расстояние  $400\delta$ . Численный эксперимент показал, что, выбирая функцию  $Q$  из соотношения (2) можно значительно улучшить качество решения. Отставание от аналитического решения составило примерно  $\delta$ , в то время как на эйлеровой сетке [31, 32] отставание составило  $\approx 4\delta$ . Таким образом, было показано, что численное решение с гораздо лучшей точностью сохраняет амплитуду солитона в течение всего расчетного времени.

Применение подвижных сеток с динамической адаптацией [33] позволило получить численные решения высокой точности не только для схем типа Кранка–

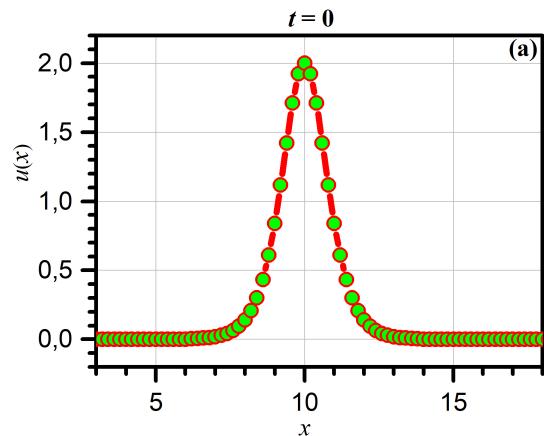


Рис. 1. а – начальное условие ( $t=0$ ); Сравнение численного решения с использованием схемы (14) с аналитическим на момент времени  $t=100$  при  $\sigma = 0.5$  (б) и  $\sigma = 1$  (в)

Николса, но и для семейства полностью неявных 2-хслойных схем 1-го порядка по времени  $t$  и 2-го по пространству  $x$ . Численные решения, представленные на рис. 1, б и рис. 1, в практически не различаются.

При этом удалось значительно, примерно в 8.5 раз, увеличить величину шага по времени (рис. 2).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе метода динамической адаптации построено семейство двухслойных разностных схем, эффективность которых исследовалась численно. Если на эйлеровых расчетных сетках приемлемое решение удалось получить только для схем типа Кранка–Николса [31, 32], то с помощью применения подвижных сеток удалось существенно повысить точность решения и получить хорошие результаты в том числе для семейства полностью неявных двухслойных схем 1-го

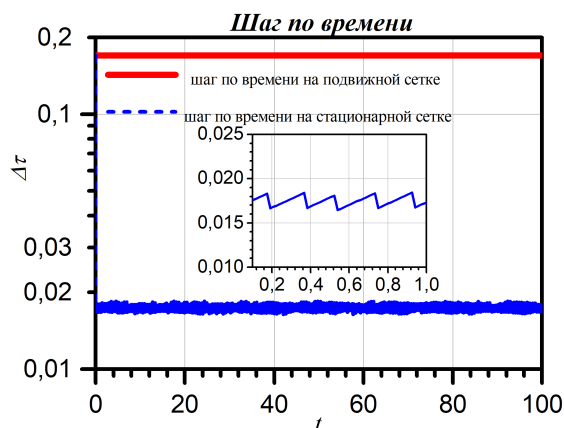


Рис. 2. Сравнение шага по времени при использовании схемы (14) на подвижной сетке при  $\sigma = 0.5$  со схемой типа Кранка–Николсона на стационарной сетке

порядка по времени  $t$  и 2-го по пространству  $x$ . Также удалось значительно увеличить величину шага по времени, что в свою очередь приводит к уменьшению времени счета. Еще одним из достоинств, предложенных схем является их простота и прозрачность базовых математических конструкций.

Автор выражает благодарность профессору доктору физ.-мат. наук В.И. Мажукину и канд. физ.-мат. наук А.В. Шапранову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант:19-07-01001.

Статья была представлена на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» и рекомендована к печати.

- [1] Zeytounian R.Kh. // Phys. Usp. 1995. **38**, N 12. P. 1333.
- [2] Boussinesq J. // Comptes Rendus l'Académie des Sci. 1871. **72**. P. 755.
- [3] Burgers J.M. // Adv. Appl. Mech. 1948. **1**. P. 171.
- [4] Lord Rayleigh D.C.L., F.R.S. // Philos. Mag. 1876. **XXXII**. 1:4, P. 257.
- [5] Korteweg D.J., G. de-Vries. // Philos. Mag. 1895. **39**. P. 422.
- [6] Zabusky N.J., Kruskal M.D. // Phys. Rev. Lett. 1965. **15**. P. 240.
- [7] Su C.H., Gardner C.S. Korteweg–de Vries equation and generalizations: III. Derivation of the Korteweg–de Vries equation and Burgers equation. // J. Math. Phys. 1969. **10**. P. 536–539.
- [8] Kivshar Y. // Phys. Rev. A. 1991. **44**. R1446.
- [9] Berezin Y.A., Karpman V.I. // Soviet Physics JETP. 1967. **24**. P. 1049.
- [10] Gurevich A.V., Pitaevski L.P. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1973. **65**. P. 590.
- [11] Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. 2nd ed. Academic Press, 2008.
- [12] Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. and Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic, 1982.
- [13] Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, NY, 1974.
- [14] Yi N., Huang Y., Liu H. // J. Comput. Phys. 2013. **242**. P. 351.
- [15] Bona J., Chen H., Karakashian O., Xing Y. // Mathematics of Computation. 2013. **82**, N 283. P. 1401. <https://www.jstor.org/stable/42002703>.
- [16] Zhang Q., Xia Y. // Commun. Comput. Phys. 2019. **25**, N 2. P. 532.
- [17] Kalisch H., Raynaud X. // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2007. **41**, N 1. P. 95.
- [18] Geyikli Turabi. // J. Appl. Math. Phys. 2020. **8**. P. 1123. <https://www.scirp.org/journal/jamp>.
- [19] Karczewska A., Rozmej P., Szczecicki M., Boguniewicz B. // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2016. **26**, N 3. P. 555.
- [20] Karczewska A., Szczecicki M., Rozmej P., Boguniewicz B. // Computational Methods in Science and Technology. 2016. **22**, N 1. P. 19.
- [21] Amein N.K., Ramadan M.A. // J. Egyptian Math. Society. 2011. **19**, N 3. P. 118.
- [22] Vliegenthart A.C. // J. Eng. Math. 1971. **5**. P. 137.
- [23] Goda K. // Journal of the Physics Society of Japan. 1975. **39**, N 1. P. 229.
- [24] Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П., Михайлик И.А. // ДАН. 1997. **357**, № 4. С. 458.
- [25] Mazhukin V.I., Matus P.P., Mikhailiuk I.A. // Differential Equations. 2000. **36**, N 5. P. 789.
- [26] Головизин В.М., Карабасов С.А., Суходулов Д.А. // Матем. Моделирование. 2000. **12**, № 4.
- [27] Zhu S.H. // Appl. Math. Lett. 2001. **14**, N 1. P. 17.
- [28] Hui-Ping Wang, Yu-Shun Wang, and Ying-Ying Hu. // Chinese Phys. Lett. 2008. **25**, N 7. P. 2335.
- [29] Holden H., Koley U., Risebro N.H. // IMA Journal of Numerical Analysis. 2014. **35**, N 3. P. 1047.
- [30] Kolebaje O.I., Oyewande E. O.I. // International Journal of Basic and Applied Sciences. 2012. **1**, N 3.
- [31] Быковская Е.Н., Шапранов А.В., Мажукин В.И. Анализ погрешности аппроксимации двухслойных разностных схем для уравнения Кортевега–де Вриза. / Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 1. С. 17.
- [32] Mazhukin V.I., Shapranov A.V., Vykovskaya E.N. Two-layer finite-difference schemes for the Korteweg-de Vries equation in Euler variables. // Mathematica Montisnigri. 2020. **XLIX**.
- [33] Breslauskii P.V., Mazhukin V.I. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. **47**, N 4. P. 687.
- [34] Рысиков Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны, 2013.
- [35] Мажукин В.И., Самарский А.А., Шапранов А.В. // Докл. РАН. 1993. **333**, № 2. С. 165.
- [36] Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. // Докл.

- АН СССР. 1988. **302**, № 5. С. 1078.
- [37] *Mazhukin A.V., Mazhukin V.I.* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. **47**, N 11. P. 1833.
- [38] *Мажукин В.И., Самарский А.А., Кастельянос О., Шапранов А.В.* // Математическое моделирование. 1993, **5**, № 4. С. 32.
- [39] *Mazhukin V.I., Demin M.M., Shapranov A.V., Smurov I.* The method of construction dynamically adapting grids for problems of unstable laminar combustion // Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals. 2003. **44**, № 4. С. 387.
- [40] *Мажукин В.И., Мажукин А.В., Шапранов А.В.* Динамическая адаптация в дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа, Энциклопедия низкотемпературной плазмы // Математическое моделирование в низкотемпературной плазме, Часть 1, Москва, Янус-К, Серия Б. 2008. **7**. С. 190–216.
- [41] *Мажукин В.И., Самарский А.А., Чуйко М.М.* // Докл. РАН. 1993. **368**, № 3. С. 307.
- [42] *Mazhukin V.I., Chuiko M.M.* // Mathematical Modeling and Analysis. 2001, **6**, N 1. P. 129.
- [43] *Mazhukin V.I., Koroleva O.N., Chuiko M.M.* Modeling of formation of deep 2D channels in metal targets via laser irradiation // SPIE «Laser Processing of Advanced Materials and Laser Microtechnologies». 2002. 5121, P. 87.
- [44] *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. **48**, № 11. С. 2067.
- [45] *Breslavskii P.V., Mazhukin V.I.* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. **48**, N 11. P. 2102.
- [46] *Мажукин В.И., Бреславский П.В., Шапранов А.В.* Динамическая адаптация в дифференциальных уравнениях в частных производных гиперболического типа, Энциклопедия низкотемпературной плазмы // Математическое моделирование в низкотемпературной плазме, Часть 1, Москва, Янус-К, Серия Б. 2008. **7**. С. 217–247.

## Numerical solution of the Korteweg–de Vries equation on a moving grid using two–layer difference schemes

E. N. Bykovskaya

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (KIAM RAS)*

*Moscow, 125047 Russia*

*E-mail: bykovel54@yandex.ru*

This paper presents the results of a numerical and analytical study of 2-layer explicit and implicit difference schemes for the KdV equation. On Eulerian computational grids, a satisfactory numerical solution was obtained only when using an explicit-implicit difference scheme of the Crank-Nichols type of the second order of approximation in time  $t$  and spatial  $x$  variables. A completely implicit 2-layer scheme of the 1st order in time  $t$  and 2nd in the space  $x$ , although it is absolutely stable, but the presence of a high schematic viscosity leads to a significant distortion of the solution. The use of moving grids with dynamic adaptation made it possible to obtain high-precision numerical solutions not only for Crank-Nichols-type schemes, but also for a family of completely implicit 2-layer schemes of the 1st order in time  $t$  and 2nd in space  $x$ . An important advantage of the considered schemes is their simplicity and transparency of the basic mathematical constructions.

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Lj

*Keywords:* difference schemes, approximation, numerical solution, dynamic adaptation, grids adapting to the solution, moving grids, Korteweg-de Vries equation, Soliton solution, nonlinear waves.

*Received 21 June 2021.*

### Сведения об авторе

Быковская Елена Николаевна — мл. науч. сотрудник; e-mail: bykovel54@yandex.ru.