Влияние скорости кровотока на динамические процессы в сосудах

Б. Н. Клочков*
Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
(Поступила в редакцию 02.07.2021; подписана в печать 13.10.2021)

Проведен анализ распределенных колебаний мягкого упругого сосуда с протекающей в нем кровью и рассмотрены условия существования волновых эффектов. Получены дисперсионные характеристики динамических процессов. Показана возможность существования фиксированных структур, описаны условия возникновения неустойчивости.

PACS: 43.20.Hq, 43.80.Cs УДК: 532.5.013.4:539.4.
Ключевые слова: упругий кровеносный сосуд, характерные скорости течения крови, неустойчивость, структуры, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Основной важной функцией кровеносных сосудов справедливо считается транспортная функция. В сосудах могут происходить волновые и колебательные процессы, статические изменения формы, параметры которых могут служить диагностике состояния сосудистой системы [1–6]. При этом существенным является построение адекватной математической модели распределенных движений крови в отдельном сосуде с учетом накопленного экспериментального материала [7–12]. В работе [7] предложен нелинейный акустический подход к задачам кровообращения. Модель включает уравнения движения крови, неразрывности и зависимости давления в сосуде от его просвета. При этом учитывается изменение площади сечения сосудов и упругости вдоль их длины. Рассмотрена пульсовая волна, и представлены ее давления и скорости с расстоянием. Решены задачи о влиянии локальных неоднородностей сечения и упругости сосуда. В [8] предложен пространственно-корреляционный метод восстановления вектора скорости кровотока в нелинейной томографии. В [9] дан расчет нестационарного течения вязкой жидкости в жесткой трубке под действием переменного перепада давления. Показана возможность в процессе венепункции оценить вязкость. В [10–12] представлен цикл работ по ударному возбуждению звука при схлопывании створок полулунных клапанов сердца, моделированию их колебаний при помощи упругой натянутой мембраны в жидкости и частотно-временному анализу звуков второго тона сердца для оценки давления в легочной артерии. Кровеносные сосуды в экспериментальных условиях часто моделируются мягкими упругими трубками, через которые прокачивается жидкость; при превышении скоростью потока некоторого критического значения наблюдались осцилляции трубки [1, 13, 14]. Имеют место распределенные гидродинамические модели течения крови в артериях, причем для конечной мягкой трубки, с обоих концов соединенной с жесткими трубками, приведено громоздкое выражение для квадрата критической скорости, и без детального анализа сделаны некоторые оценки неустойчивости [4].

В настоящей работе представлен линейный волновой подход к проблеме динамической биомеханики сосудов. Получены дисперсионные характеристики и выражение для частоты колебаний. Упрощенный аналитический подход позволил получить наглядные формулы и выражения в явном виде, проанализировать их и сделать оценки.

1. МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ

Рассмотрим волновые и колебательные процессы в системе сосуд-жидкость и исследуем их параметры. Используем математическую модель сосуда с учетом упругости сосудистого русла, наличия продольного и окружного натяжений, скорости потока жидкости. Модель учитывает осесимметричные и неосесимметричные деформации. Движение стенки сосуда описываем уравнениями тонкостенной оболочки [15]. Материал стенки считаем несжимаемым. Пренебрегаем продольными и угловыми смещениями элемента оболочки по сравнению с радиальными. Это связано с функциональной спецификой биососудов в живом организме. Биососуд достаточно жестко закреплен в ткани в осевом и азимутальном направлениях с целью экономии энергетических ресурсов. Практически перемещения стенки сосуда осуществляются лишь радиально под действием давления, что вполне достаточно для изменения внутреннего просвета биососуда, в частности, для регуляции кровоснабжения тканей и органов. Вместе с тем, существуют задачи вращательно-поступательного движения крови и феномен скручивания сосудов. Эти задачи безусловно важны для биомеханики кровообращения, они требуют специального рассмотрения и исследования. В рамках представленной статьи изучается влияние скорости потока крови на динамическое поведение и устойчивость кровеносных сосудов. Уравнение движения элемента стенки

* klochkovbn@gmail.com

в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{Eh^3}{9}\left(\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 R}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 R}{\partial\theta^4}\right)+\frac{4Eh\,(R-R_0)}{3R^2}- \\ -S\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{T}{R^2}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}=P-\rho h\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где t — время; x — продольная, θ — азимутальная координаты; E — модуль упругости материала стенки; S — продольное, T — окружное постоянные натяжения; h — толщина стенки; R — текущий, R_0 — недеформированный радиусы; $P=p-p_0$, p — текущее, p_0 — постоянное внутренние давления; ρ — плотность материала стенки. В стенку сосуда могут входить гладкомышечные волокна, и параметры E, S, T могут меняться как в сторону увеличения, так и уменьшения в зависимости от уровня активации волокон.

Уравнение для разности давлений $p-p_0$ в (1) следует из анализа гидродинамических уравнений [15]. Считаем жидкость несжимаемой. Векторная скорость жидкости $\mathbf{V}=\nabla\varphi+\mathbf{U}$, где φ — потенциал скоростей, $\mathbf{U}$ — постоянная составляющая скорости. Используем уравнение Лапласа для потенциала скоростей, граничное условие непроницаемости на внутренней поверхности стенка–жидкость, интеграл Коши–Лагранжа (ρ_f — плотность жидкости). Решая уравнение Лапласа в виде $\varphi=f(r)\times\exp[i(\Omega t-kx-n\theta)]$, где Ω — частота, k — волновое число, n — номер азимутальной моды, получим модифицированное уравнение Бесселя для $f(r)$. Его ограниченное решение представляется в виде модифицированной функции Бесселя первого рода I_n с точностью до постоянного множителя: $f(r)\sim I_n(kr)$. Из условия непроницаемости на стенке следует выражение для давления, причем $\alpha=kR_0$, ($'$) — производная:

$$p-p_0=-\rho_f R_0\Phi(\alpha,n)\left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial t}+U^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right), \\ \Phi(\alpha,n)=\frac{I_n(\alpha)}{\alpha I_n'(\alpha)}. \tag{2}$$

Нелинейное уравнение (1) линеаризуем, то есть рассматриваем случай достаточно малых отклонений $\tilde R$, $\tilde p$ от стационарного состояния $R=R_0$, $p=p_0$ ($\tilde R=R-R_0$, $\tilde p=p-p_0$, причем R_0, p_0 не зависят от координат и времени). Анализ линейной стадии важен для биососудов, поскольку позволяет получить необходимые аналитические выражения и их зависимости от параметров рассматриваемой системы. Сделаем преобразования, переходя к безразмерным: частоте $\zeta=\Omega R_0/c$, волновому числу $\alpha=kR_0$ и другим параметрам. Приходим к искомому дисперсионному уравнению, причем $\rho\approx\rho_f$:

$$[1+\varepsilon(\alpha,n)]\,\zeta^2-2\varepsilon(\alpha,n)\alpha W\zeta+\varepsilon(\alpha,n)\alpha^2W^2- \\ -\delta(\alpha^2+n^2)^2-1-\beta\alpha^2-\gamma n^2=0, \tag{3}$$

$$\varepsilon(\alpha,n)=\frac{\sigma}{q}\Phi(\alpha,n),\ \ \sigma=\frac{\rho_f}{\rho},\ \ q=\frac{h}{R_0},\ \ \delta=\frac{q^2}{12}, \\ W=\frac{U}{c},\ \ c=\sqrt{\frac{4E}{3\rho}},\ \ \beta=\frac{3S}{4Eh},\ \ \gamma=\frac{3T}{4Eh}. \tag{4}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение квадратного уравнения (3) с выражениями (4) имеет два корня:

$$\zeta(\alpha,n)=\frac{\varepsilon(\alpha,n)\alpha W}{1+\varepsilon(\alpha,n)}\pm\sqrt{N(\alpha,n)}, \\ N(\alpha,n)=-\frac{\varepsilon(\alpha,n)(\alpha W)^2}{[1+\varepsilon(\alpha,n)]^2}+ \\ +\frac{\delta(\alpha^2+n^2)^2+1+\beta\alpha^2+\gamma n^2}{1+\varepsilon(\alpha,n)}.$$

Полученные решения описывают колебательные эффекты изменения просвета сосуда в распределенной модели упругой трубки с жидкостью, подобной артерии, вене или другому сосуду, причем знак (+) соответствует устойчивой ветви, а знак (−) — неустойчивой. При возникновении неустойчивости ($N<0$) частота нарастающих колебаний $Re\zeta$ линейно растет со скоростью потока W, что соответствует экспериментальным данным [2]. При определенных условиях возможны неподвижные структуры. В качестве основного параметра возьмем гидродинамический —скорость жидкости $U(W)$. Существуют по крайней мере две характерные U, приводящие к существенным эффектам.

Во-первых, получим выражение для критической скорости потока жидкости U_{cr} и частоты колебаний Ω_{cr} при возникновении неустойчивости в трубке с жидкостью в случае $N\le 0$ при $U\ge U_{cr}$. Это — проявление неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. При этом размерная критическая скорость потока U_{cr}, когда $N=0$, равна:

$$U_{cr}(\alpha,n)= \\ =c\sqrt{\frac{1+\delta(n^2+\alpha^2)^2+\gamma n^2+\beta\alpha^2}{\alpha^2\varepsilon(\alpha,n)}[1+\varepsilon(\alpha,n)]}. \tag{5}$$

Величина U_{cr} (5) монотонно растет с ростом продольного натяжения S и окружного натяжения T, а также (при $S=T=0$) с ростом модуля упругости Юнга E и толщины стенки сосуда h. Безразмерная критическая скорость $W_{cr}(\alpha,n)$ при пренебрежении продольным и окружным постоянными натяжениями ($\beta\approx 0$, $\gamma\approx 0$), а также с учетом близких значений плотностей протекающей жидкости и материала стенки сосуда ($\sigma\approx 1$) имеет упрощенный вид. Характерной особенностью этой зависимости является то, что $W_{cr}(\alpha,n)$ определяется в основном только одним параметром q (относительная толщина стенки сосуда) и растет с ним, а она же размерная $U_{cr}(\alpha, n)$ — еще и упругостью материала стенки E. В частном случае $n = 0$ и $\alpha \ll 1$ можно получить, что $W_{cr}(\alpha, 0) \approx 1/\alpha$. При $U = U_{cr}$ имеем критическую частоту осцилляций в безразмерном виде:

$$\zeta_{cr}(\alpha, n) = \\ = \sqrt{\frac{12 + q^2(n^2+\alpha^2)^2}{12} \cdot \frac{\Phi(\alpha, n)}{q + \Phi(\alpha, n)}}. \quad (6)$$

Минимальные частоты соответствуют длинам волн $\lambda_{min}^{cr} \approx (2 \div 3)R_0$. При $n = 0$ и $\alpha \ll 1$ получаем, что $\zeta_{cr}(\alpha, 0) \approx 1$. Дисперсионные зависимости в комплексном виде можно представить как $\zeta(\alpha, n) = \mathrm{Re}\zeta(\alpha, n) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\zeta(\alpha, n)$. Неустойчивость имеет место в некотором диапазоне волновых чисел $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, причем $N(\alpha_{1,2}, n) = 0$, при этом длина волны в этой области лежит в пределах $\lambda_{1,2} \approx R_0 \div 1.4R_0$. При увеличении номера моды n (при фиксированных остальных параметрах) характер зависимостей сохраняется, но область неустойчивости сужается, величины инкремента и декремента уменьшаются, причем в дальнейшем неустойчивая и затухающая мнимые ветви обращаются в нуль, а частотные действительные ветви становятся непересекающимися. Выражение для инкремента колебаний при $W > W_{cr}$ имеет вид: $\mathrm{Incr}(\alpha, n) = \mathrm{Im}[\zeta(\alpha, n)] = \sqrt{-N(\alpha, n)}$, откуда видно, что $\mathrm{Incr}(\alpha, n)$ растет монотонно с увеличением скорости потока крови W.

Существует зависимость безразмерной фазовой скорости распространения возмущений $C(\alpha, n) = \mathrm{Re}\zeta(\alpha, n)/\alpha$ от безразмерного волнового числа α и номера моды n. Это — обобщение частного случая формулы Юнга–Моенса–Кортевега для скорости пульсовой волны. При этом для реальной пульсовой волны ее длина сравнима с размером тела из-за достаточно низкой частоты сердечного пульса, однако для вынужденного волнового воздействия частоту можно увеличить. Из полученной формулы в приближении $\alpha \ll 1$ следует простое бездисперсионное выражение для размерной скорости пульса (при $W = \gamma = \beta = n = 0$): $C = \sqrt{2hE/(3R_0\rho_f)}$.

Во-вторых, рассмотрим случай нулевой скорости распространения волны или, что тоже самое, случай нулевой частоты $\zeta(\alpha, n) = 0$. При $C(\alpha, n) = 0$ (остановившаяся волна, инкремент и декремент — тоже нулевые) существует эффект статики. Здесь возможны: редкая, пространственно низкочастотная гофра (для $n \ge 1$) и частая, пространственно высокочастотная гофра (для $n \ge 0$). Получаем выражение для своеобразной безразмерной критической скорости структурирования W_{0cr} (достижения стоячей гофры):

$$W_{0cr} = \sqrt{q\frac{12+q^2(n^2+\alpha^2)^2+12\gamma n^2+12\beta\alpha^2}{12\alpha^2\Phi(\alpha,n)}}. \quad (7)$$

Критическая скорость кровотока W_{0cr} (7) для остановленных мод меньше, чем критическая скорость возникновения неустойчивости W_{cr} для неустойчивых мод: $W_{cr} = W_{0cr}\sqrt{1 + \varepsilon(\alpha, n)}$ примерно в 2 раза по минимуму. То есть в реальности легче (при меньших скоростях) получить фиксированную динамическую извитость сосуда, чем его колебания. В приближении $\alpha \ll 1$ и при $\gamma = \beta = n = 0$ получаем выражение для $W_{0cr} \approx \sqrt{q/2}$.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В нормальных условиях скорость течения крови в крупных артериях может достигать $1.5 \div 2.9$ м/с, а при некоторых патологиях может значительно увеличиваться [3–6]. Кроме того, существуют заболевания, связанные с уменьшением модуля Юнга материала стенки сосуда, что приводит к снижению критической скорости U_{cr}. Максимальная скорость крови в крупных венах может составлять 0.5 м/с. Частоты звуковых колебательных эффектов в системе сосуд-кровь составляют 25–500 Гц [3, 4]. Необходимо различать условия хранения фрагмента сосуда при проведении экспериментов *in vitro*, у сосудистых препаратов из-за их физико-химической обработки значения модуля упругости могут существенно превышать соответствующие в живом действующем состоянии. В [3, 16–18] приведены довольно низкие значения модуля упругости $E \cong 10^2 \div 5 \times 10^4$ Н/м^2. Вместе с этим существуют и данные значительно большие приведенных. Характерные значения радиуса для рассматриваемых сосудов лежат в пределах $(0.1 \div 1.2) \times 10^{-2}$ м. Критические скорости существенно падают с уменьшением q, минимальные значения составляют $q \cong 0.02 \div 0.04$.

Оценки можно сделать при помощи полученных в настоящей статье формул и выражений для нулевой моды ($n = 0$) и нулевых продольных и азимутальных напряжениях ($\beta = \gamma = 0$), близких значениях плотностей биожидкости и водоподобной ткани стенки сосуда ($\rho \approx \rho_f \approx 1000$ кг/м^3). Так, при $q = 0.02$, $E = 4 \times 10^3$ Н/м^2, $R_0 = 3 \times 10^{-3}$ м минимальная критическая скорость неустойчивости (при $\alpha = 13$) равна $U_{cr} = 0.28$ м/с согласно формуле (5), соответствующая частота $f_{cr} = \Omega_{cr}/2\pi = 153$ Гц (6), минимальная критическая скорость структурирования (при $\alpha = 10$) $U_{0cr} = 0.12$ м/с (7). Измеренная скорость распространения пульсовой волны составляет: $4 \div 14$ м/с для крупных артериальных сосудов и $1 \div 2$ м/с для крупных венозных сосудов [5, 6]. Оценка скорости пульса в области устойчивости согласно формуле при $q = 0.04$, $E = 5 \times 10^4$ Н/м^2, $U = 0.1$ м/с, $\alpha = 0.1$ составляет $C = 1.25$ м/с. Сделанные оценки соответствуют и близки экспериментальным результатам для венозных и артериальных сосудов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен линейный волновой подход к проблеме динамической биомеханики сосудов. Получены дисперсионные характеристики и выражение для частоты колебаний. Выведены формулы для двух критических скоростей потока биожидкости: для структурирования сосуда и для его неустойчивости. Проведенные для крупных кровеносных сосудов оценки показывают возможность возникновения в них как статического и квазистатического режима (малые частоты), так и режима колебаний (относительно высокочастотные вибрации). Широкий разброс количественных характеристик можно использовать при анализе получаемых результатов. Ценность упрощенного аналитического подхода заключается в том, что удалось получить наглядные формулы и выражения в явном виде, проанализировать их и сделать оценки. Данная работа является определенным этапом в исследовании сосудистой системы.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПФ РАН, проект № 0035–2019–0014.

[1] *Cancelli C., Pedley T.J.* // J. Fluid. Mech. 1985. **157**. P. 375.
[2] *Gavriely N., Shee T.R., Cugell D.W.* // J. Appl. Physiol. 1989. **66**, № 5. P. 2251.
[3] *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* // Механика кровообращения. 1981.
[4] *Педли Т.* // Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. 1983.
[5] Физиология кровообращения: Физиология сосудистой системы. 1984.
[6] Физиология человека (в 4-х томах). 1986. **3**.
[7] *Розанов В.В., Руденко В.О., Сысоев Н.Н.* // Акуст. жур. 2009. **55**, № 4. С. 594.
[8] *Буров В.А., Матвеев О.В., Румянцева О.Д.* // Акуст. жур. 2010. **56**, № 2. С. 268.
[9] *Руденко О.В., Маков Ю.Н., Гурбатов С.Н.* // Акуст. жур. 2013. **59**, № 1. С. 115.
[10] *Андреев В.Г.* и др. // Акуст. жур. 2019. **65**, № 2. С. 232.
[11] *Андреев В.Г.* и др. // Акуст. жур. 2019. **65**, № 6. С. 847.
[12] *Андреев В.Г.* и др. // Акуст. жур. 2020. **66**, № 5. С. 556.
[13] *Griffiths D.J.* // Med. Biol. Engng. and Comput. 1977. **15**, N 4. P. 357.
[14] *Brower R.W., Scholten C.* // Med. Biol. Engng. 1975. **13**, N 6. P. 839.
[15] *Вольмир А.С.* // Оболочки в потоке жидкости и газа. 1979.
[16] *Ohhashi T., Azuma T., Sakaguchi M.* // Amer. J. Physiol. 1980. **239**. P. 88.
[17] *Березовский В.А.* // Биофизические характеристики тканей человека. Киев, 1990.
[18] *Клочков Б.Н.* // Акуст. жур. 2018. **64**, № 3. С. 389.

Acoustical studies of biovessels

B.N. Klochkov

Applied Physics Institute, Russian Academy of Sciences. Nizhny Novgorod, 603950 Russia
E-mail: klochkovbn@gmail.com

Analysis of distributed oscillations of soft elastic vessel with blood flow in it is supplied and the conditions of wave effects existence are considered. Dispersion characteristics of acoustic processes are given. The possibility of the existence of fixed structures is shown, the conditions of instability rise are described.

PACS: 43.20.Hq, 43.80.Cs
Keywords: elastic vessel with fluid, characteristic velocities of stream, instability, structures, mathematical modeling, bioapplications.
Received 02 July 2021.

Сведения об авторах

Клочков Борис Николаевич — доктор физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотрудник; e-mail: klochkovbn@gmail.com.