# Фотонные топологические изоляторы типа Руднера на языке трехцветных клеточных автоматов

Д. П. Федченко[1,2,*] В. В. Новиков[1,†] И. В. Тимофеев[1,2‡]
[1]*Сибирский федеральный университет*
*Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, д. 79*
[2]*Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН,*
*обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН*
*Россия, 660036, Красноярск, ул. Академгородок, д. 50*
(Поступила в редакцию 15.10.2021; подписана в печать 20.10.2021)

Топологический изолятор — это материал, одновременно проявляющий свойства проводника на поверхности и изолятора в объеме. Игрой Руднера называют упрощенную модель топологического изолятора, экспериментально реализованную на двумерных фотонных решетках и описывающуюся как клеточный автомат, подобный игре жизнь Конвея. Трехцветным клеточным автоматом называют регулярную решетку ячеек, каждая из которых окрашена в один из трех цветов и задано правило перекрашивания ячеек. В данной работе два цвета клеточного автомата соответствуют отсутствию и наличию фотона в резонаторе, а третий цвет — границе области. Игра Руднера обобщается на случай трехмерного массива оптических резонаторов и демонстрируются определяющие свойства топологического изолятора. Вводится класс клеточных автоматов, сохраняющих границу и количество фотонов, а также нулевую групповую скорость для фотонов, удаленных от поверхности.Ожидаются физические реализации в фотонике, электронике, механике и акустике.

PACS: 42.60.Da, 42.25.Fx, 42.70.Qs УДК: 535.015, 535.016, 535.3
Ключевые слова: топологическая фотоника, топологические изоляторы типа Руднера, трехцветные клеточные автоматы, код Вольфрама.

## ВВЕДЕНИЕ

Термин «топологическая фотоника» [1] ознаменовал новый этап развития топологических идей в электродинамике сплошных сред. Обзорные статьи определяют предмет топологической фотоники как топологические состояния электромагнитного поля в фотонных (оптических) системах [2, 3] Яркий пример таких состояний дают фотонные топологические изоляторы, на поверхности которых образуются волны, несущие ненулевой целочисленный топологический заряд и тем самым защищенные от рассеяния на неточностях изготовления структуры [4] Топологические состояния наблюдались в технологически важных ближнем инфракрасном и видимом диапазонах частот, с использованием решетки спиральных волноводов и решетки кольцевых резонаторов [5] Активно исследуется широкий спектр других платформ, включая поляритонные цепи, антенные решетки резонаторов и метаповерхности. Изощренный аппарат для описания топологических состояний волны пришел из теории твердого тела [6–8] Подобное заимствование 30 лет назад породило концепцию фотонных кристаллов [9] С другой стороны, в сингулярной оптике локализованных волн и вращающихся пучков с ненулевым орбитальным угловым моментом продолжает активно формироваться свой язык для описания топологических явлений, каустик [10], вихревых и седловых точек [11, 12], закономерностей изменения поляризации вблизи исключительных точек [13]

Топологические изоляторы стали активно изучаться после открытия квантового эффекта Холла [14] Такие структуры являются изоляторами, то есть не пропускают волны в свою глубину, в то же время допуская прохождение световых волн по краю или поверхности.Наличие поверхностных проводящих состояний объясняется при помощи топологических инвариантов на дисперсионной диаграмме периодической структуры. Плавное изменение параметров структуры делает ее изолятором, то есть приводит к образованию запрещенных зон, щелей в частотном спектре. В случае различия величины топологического инварианта по разные стороны запрещенной зоны, по свойству объемно-краевого соответствия запрещенная зона смыкается посредством состояний, которые не проникают вглубь структуры и локализованы вблизи ее края. В случае *бесщелевых* изоляторов состояния в объеме существуют, но не распространяются по причине нулевой групповой скорости. Это также приводит к локализации проводящих состояний вблизи края структуры.

Пожалуй, простейшей моделью бесщелевого топологического изолятора является игра Руднера. Эта двумерная модель описана в статье [15] на квантовом языке операторов рождения и уничтожения (вторичное квантование). В обзоре [16] дается новый язык описания топологических изоляторов, обсуждается связь двумерных топологических изоляторов с клеточными автоматами.

Клеточный автомат (КА) — это регулярная решетка ячеек, каждая из которых может находиться в одном из конечного числа состояний, например, 0, 1 и 2.

* fdp@iph.krasn.ru
† work_vladimir_novikov@mail.ru
‡ tiv@iph.krasn.ru

На каждой итерации новое состояние определяется по состояниюсоседних ячеек исходя из правила, одинакового для всех ячеек.Правило записывается в числовом формате и называется кодом Вольфрама.

КА стали популярны после изобретения игры «Жизнь» математиком Джоном Конвеем в 1970 г. В 1983 г. Стивен Вольфрам опубликовал первую работу, посвященную классу элементарных клеточных автоматов [17] В 2002 вышла в свет книга Вольфрама [18], которая стала настоящим манифестом клеточных автоматов. Их чарующая красота заставляет все новых и новых исследователей обращаться к этой, пока еще весьма абстрактной, области математики. В работах Вольфрама описывается класс элементарных клеточных автоматов, которые эволюционируют в бесконечной решетке, заполненной нулями и единицами.

В данной работе задается клеточный автомат, описывающий поведение фотонного топологического изолятора (рис. 1). Здесь существенно наличие края решетки, поэтому вводится третье состояние, обозначающее границу.Два цвета клеточного автомата соответствуют отсутствию и наличию фотона в оптическом резонаторе, а третий цвет — границе области, то есть отсутствию в ячейке самого резонатора. В такой постановке удается задать автомат для двумерной игры Руднера, после чего он естественно обобщается на случай трехмерного массива оптических резонаторов. Далее делаются утверждения, общие для целого класса КА типа Руднера на квадратных, трех- и шести угольных решетках. Алгоритм рассмотренных КА реализуется программно. Теория сопоставляется с прямыми численными расчетами.

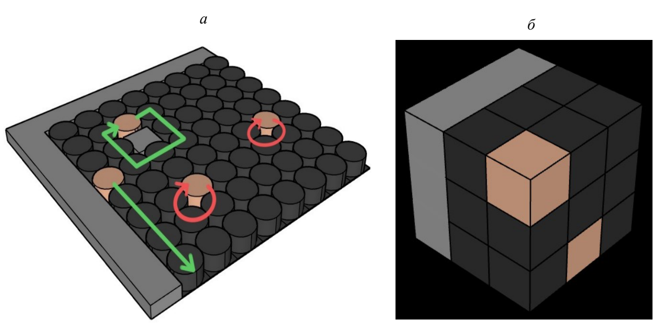


Рис. 1. Двумерный (слева) и трехмерный (справа) фотонный топологический изолятор типа Руднера. Ячейки массива соответствуют оптическим резонаторам. Светлый цвет говорит о наличии фотона в резонаторе. Серым цветом обозначено отсутствие резонаторов за границей массива. Циклическое движение обозначено красной стрелкой и соответствует изоляции в объеме. Распространение волны обозначено зеленой стрелкой и соответствует проводимости вдоль поверхности изолятора

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Зададим клеточный автомат, описывающий поведение фотонного топологического изолятора, соответствующего двумерной игре Руднера. Рассмотрим квадратную решетку из оптических резонаторов. Состоянию 0 поставим в соответствие невозбужденный резонатор. Состояние 1 — резонатор, содержащий фотон. Состояние 2 — отсутствие резонатора. Итого — три состояния, поэтому такой КА назовем *трехцветным*

В приближении жесткой связи фотоны могут перепрыгивать только на соседние резонаторы. Поэтому для динамики КА важно состояние множества из *пяти* ячеек: самой ячейки и четырех смежных с данной по ребру — окрестность Неймана нулевого и первого порядка, далее — просто *окрестность*

Зададим правило изменения КА исходя из состояния окрестности. Окрестность может принимать 35 различных состояний. Для упорядочения множества состояний, каждому состоянию сопоставим пятизначное число, записываемое в троичной системе исчисления. Каждому состоянию окрестности сопоставим получаемое состояние клетки. Это можно сделать 3ˆ(3ˆ5) способами. Каждый способ записывается в числовом формате и называется кодом Вольфрама.

Шахматная раскраска игры Руднера означает, что массив резонаторов разделяется на четные и нечетные. Причем четные соседствуют с нечетными и обмениваются фотонами.

Такты игры Руднера. В двумерном случае у каждого резонатора есть четыре соседа противоположной четности. Он по очереди обменивается фотонами с каждым соседом. Эти обмены назовем четырьмя тактами, которым соответствует четыре кода Вольфрама. Причем на каждом такте для четных и нечетных резонаторов применяются различные коды согласно следующей таблице:

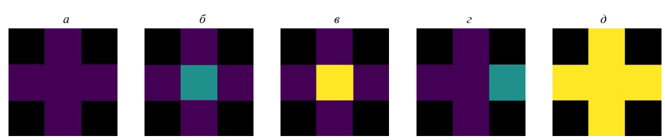


Рис. 2. Окрестность Неймана для трехцветного КА. Состояние 0 — фиолетовый цвет, 1 — голубой цвет, 2 — желтый цвет. Упорядочение 35 состояний окрестности

Правила четырехтактового КА на плоскости имеют вид:

**Правило 1** = 871896424859609582029110705858
607716968581963006295292858847170257072451 8
495546151456735013464276196047539746313522 1;

**Правило 2** = 871896424859609582029110705858
607716968656290069375168566464205353070837 4
884700951168846670480711418749217815512465 3;

Таблица I. Соответствие тактов и кодов Вольфрама для двумерного КА

| Код Вольфрама | Такт 1 | Такт 2 | Такт 3 | Такт 4 |
|---|---|---|---|---|
| Четные резонаторы | Правило1 | Правило 2 | Правило 3 | Правило 4 |
| Нечетные резонаторы | Правило 3 | Правило 4 | Правило 1 | Правило 2 |

**Правило 3** = 87189642485960958202911070585860771696865758879240222128254776164230511032271591445048493784239863824054082719415381;

**Правило 4** = 87189642485960958202911070585860771696865758879493973628716181482036815078820525046538331816246773325439025350595533.

Рассмотрим узкий класс клеточных автоматов типа Руднера со следующими свойствами топологического изолятора:

1. Форма решетки неизменна в процессе работы КА. То есть резонаторы сохраняют свои положения, не исчезают и не возникают в новых ячейках.
2. Выполняется закон сохранения энергии, то есть количество фотонов постоянно. Если фотон в резонаторе исчезает, то он появляется в соседнем резонаторе. 2б. При этом динамика обратима во времени, как в игре Руднера. То есть у всякого КА типа Руднера есть обратный из этого же класса, возвращающий состояние данного КА к начальному.2в. Из обратимости динамики следует невырожденность траекторий фотонов. Если бы две различные траектории вырождались в одну, то есть два различных фотона переходили в одно и то же состояние, то обратимость была бы невозможна.
3. Приповерхностные фотоны остаются вблизи поверхности и не проникают вглубь решетки. Прочие фотоны, удаленные от поверхности, имеют нулевую групповую скорость. Для этого они перемещаются по циклической траектории, длина которой равна числу тактов. В двумерной игре Руднера четыре такта, в трехмерной их может быть шесть.

Исходя из этих свойств КА Руднера обобщается на трехмерный случай.

Правила шеститактового КА в пространстве имеют вид:

**Правило 1** = 2911951061431853478955454112249826614240059401469953371709926139121252613956183112265882813242072824017801119664039108405662372233665847748766553351641406167979787637120374189234649152934977342766611121737153603111434389055563756946616627822664344707740397122197963408810855547786798833873433474391923321724146240999687184170790568119725979161932468308527287350468940626606888457651495503955321986222822500161099508070191786005678111347712419770260086612456144542109425333742207399071597444321916689372275435165660269470327092572689490784803685305328303705962614687602926300079616194846808578271563786665594929370516036198034676098665194256263909605931723437581380217238811862928114737001435554583774816953078989262275638971851642386318731678697062462151594771568338379169381199701849666205207195160781537094791351957411754520551129322193936279266440716537097371973713116577529314257447155661504395357170254318570864703008277958537181725630389427666473425605040613529342732992996435254605269612938079308214555706040784051751733727561245822491941;

**Правило 2** = 291195106143185347895545411224982661424005940146995337170992613912125261395618311226588281324207282401780111966403910840566237223366584774876655335164140616797978763712037418923464915293497734276661112173715360311143438905556375694661662782266434470774039712219796340881085554778679883387343347439192332172414624099968718417079056811972597916193246847459801529995042695591917292917984514888961183673713644311784329749553498796911584701291462670402058590098792568203348137701136224546515237240799328691304602118264434088258219402163459891568437749531086990018525879018987449902957628354874184556832502627628938562587146879902502751907543262036469417604418451942152427998895771315762958802626924436592810723679084416402828304179889229296550678092002610149294217940274334001172869568712761494991240749950878958826442331841906531314615329339074608053595930233690212537326790560860155813437334275416543705179011327614973191813370455458425881927098622496739816535439424203964673831731129642797874683380880775654828834031776641333755085787998362158173;

**Правило 3** = 291195106143185347895545411224982661424005940146995337170992613912125261395618311226588281324207282401780111966403910840566237223366584774876655335164140616797978763712037418923464915293497734276661112173715360311143438905556375694661662782266434470774039712

Таблица II. Соответствие тактов и кодов Вольфрама для трехмерного КА

| Код Вольфрама | Такт 1 | Такт 2 | Такт 3 | Такт 4 | Такт 5 | Такт 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Четные резонаторы | Правило 1 | Правило 2 | Правило 3 | Правило 1 | Правило 2 | Правило 3 |
| Нечетные резонаторы | Правило 4 | Правило 5 | Правило 6 | Правило 4 | Правило 5 | Правило 6 |

221979634088108555477867988338734334743919233
217241462409996871841707905681197259791619324
684774997831025557571410157164007679163866163
891696748130682597447711994518272481616192095
562333522292444897959843127800298422370395094
408569397632522359947982816990705380605696985
023891766545007469525461778742786548954934088
411628579401011862813725832947645852916994844
603387356811452553972848312704457269253894659
824018121474505531917293178751367257615203262
224136955000473882171051138876105969377686529
556789087354658538414745304731191759416542864
412271217790801507958058347692351788462044875
108513383294783641669215995063206651065300920
246680497137667929351526603454261711285826168
459872816439639663711127106931117806271128584
638933900147153261740635261446801883854382460
1086190690593391053701;

**Правило 4** = 29119510614318534789554541122498
266142400594014699533717099261391212526139561
831122658828132420728240178011196640391084056
623722336658477487665533516414061679797876371
203741892346491529349773427666111217371536031
114343890555637569466166278226643447077403971
221979634088108555477867988338734334743919233
217241462409996871841707905681197259791619324
684774997887721859905611356132424414914080910
686015997070035072093270004569867761852818758
305310418523963748930296564928876549257114802
200273721596617722220944291567255490586181747
997633519696508567216763858455422291446491924
118819384363387403146960615312143774174085944
024353445585304589444090945795952431083735115
218090281396787514019965914220956183144794994
288175774261075736126346655027611578598856208
464337521338685658446416933018380374500537643
990358058151098509608825030108711133663940414
614458598832213059076996329181501275417806508
637451481482515876004407200550840612980297952
908807166018493576389682019444299118365859119
015314753384291500190425253989041675433444577
6512450081261411312253;

**Правило 5** = 29119510614318534789554541122498
266142400594014699533717099261391212526139561
831122658828132420728240178011196640391084056
623722336658477487665533516414061679797876371
203741892346491529349773427666111217371536031
114343890555637569466166278226643447077403971
221979634088108555477867988338734334743919233
217241462409996871841707905681197259791619324
684774997887721859905611356510180640770647285
174389638650469598294120957089955191333281033
076838606759502955602797921329281373614862271
543638339779818992543885465458578320282335974
034768159378398826038999918794637102829156470
532377054427124260426479648230150732484919781
393924628241007889626558564267789069754927953
965377695744722795314843828647142256983733603
068773127590328928044637745837884224186378561
757761820764572465098300823396292747542663357
396890555677479421165303239323607961829678778
055095231226912992847540753487135907675095671
151765330332865180725932336826323497858692109
670934812971592314189031375017264950477426514
313037908810626678660698006557124610352799870
1770207154076653453541;

**Правило 6** = 29119510614318534789554541122498
266142400594014699533717099261391212526139561
831122658828132420728240178011196640391084056
623722336658477487665533516414061679797876371
203741892346491529349773427666111217371536031
114343890555637569466166278226643447077403971
221979634088108555477867988338734334743919233
217241462409996871841707905681197259791619324
684774997887721859905611356510180640770647285
174389638650469598294120957089955303049472328
711168789384440874810885245321543992727856500
392333052912177435905057222824034711626350385
361994999986164326007809953847617297220899152
605703683079720120065311154888056628988451088
521295086778673772789392781626985166875984384
271936388670837171916900774895799685082906482
037816502758998514366714438881609065949348309
798432435045535599036351761269755684936426992
350396815586023744793121756989356109047873993
388415355398485395423854158170460344147165958
853139844420583022958653595181656362503955587
432561042681205306615640391026543893768496280
297462288682018172176048030617831425844473067
1823872251986896962973.

Таким образом, в найденном частном случае шеститактовый автомат является трехтактовым.

**Примеры динамики КА**

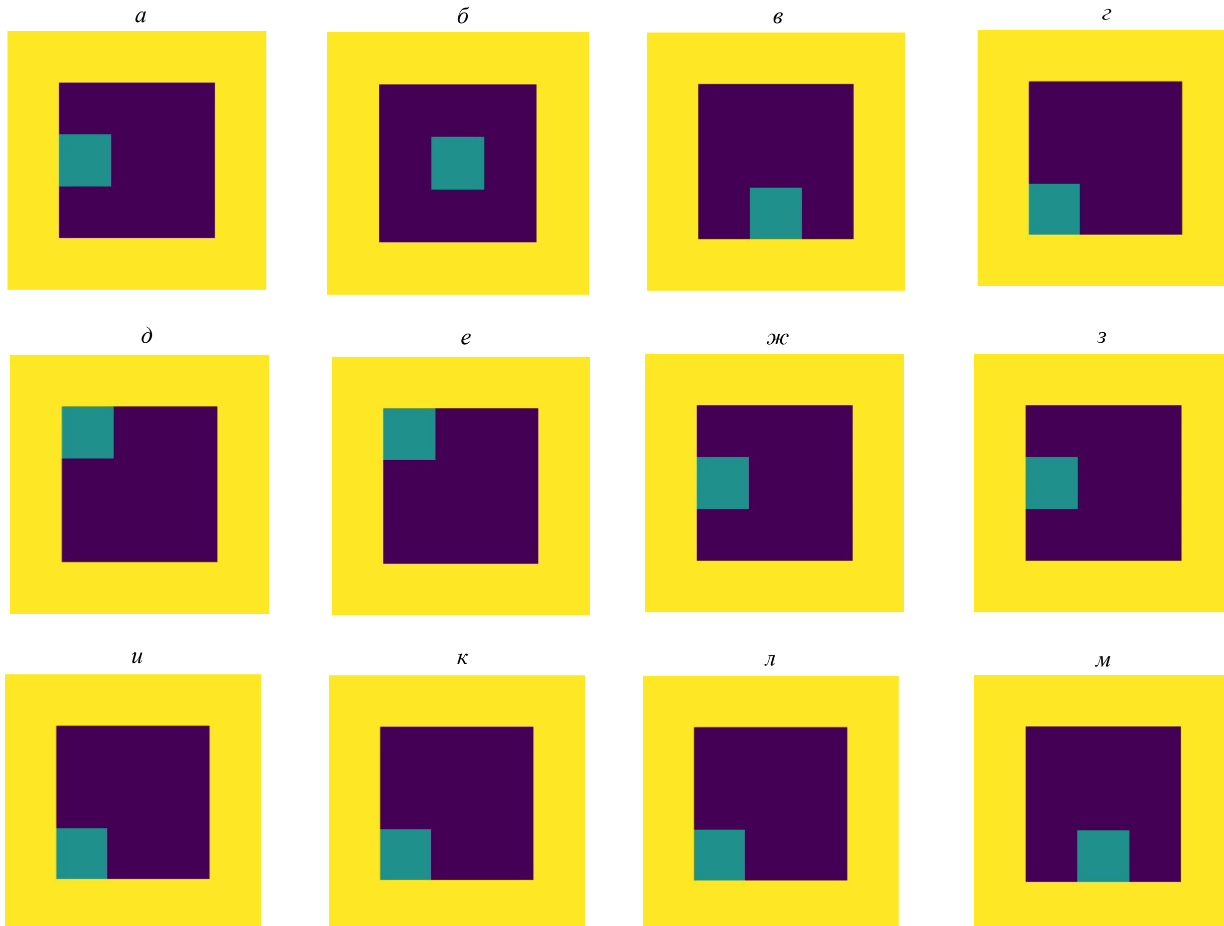

Рис. 3. *а–г* — Перемещение регулярного фотона по циклу из четырех резонаторов (вдоль движения секундной стрелки). *д–м* — Перемещение поверхностного фотона по траектории из поверхностных резонаторов (против движения секундной стрелки). Совпадение многих соседних картинок объясняется тем, что на некоторых тактах фотон стоит на месте

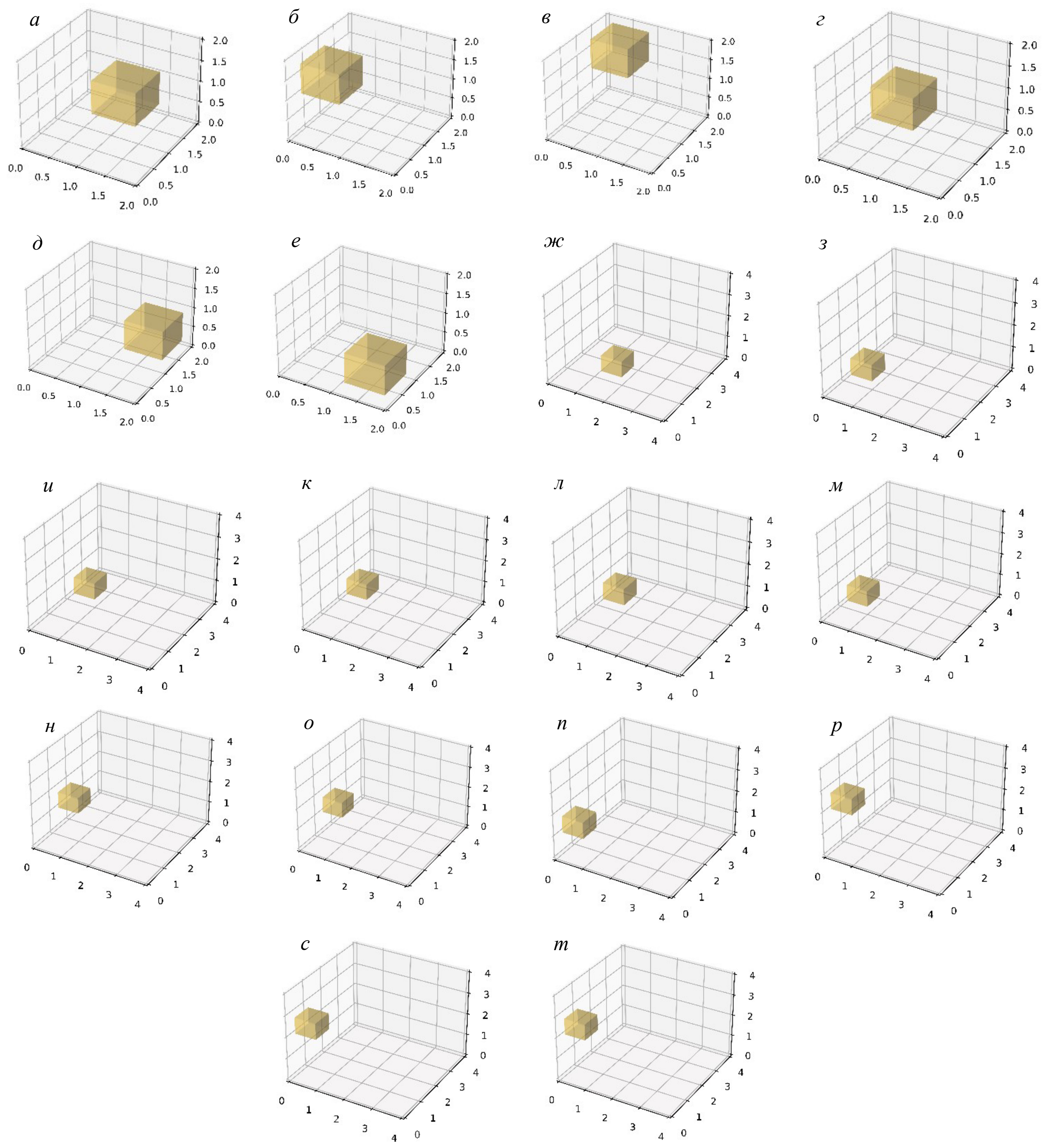


Рис. 4. а–е — Перемещение регулярного фотона по циклу из шести резонаторов. Здесь желтым цветом обозначен резонатор, содержащий фотон — состояние 1. Невозбужденные резонаторы в массиве обозначены прозрачным цветом — состояние 0. Массив резонаторов окружен клетками (декартовы координаты которых меньше 0 или больше 2), находящимися в состоянии 2. ж–т — Перемещение поверхностного фотона с начальными координатами (2, 2, 1) по траектории из поверхностных резонаторов. Как и в двумерном случае фотон может стоять на месте несколько тактов подряд. На показанных тактах видно, что фотон не проникает вглубь массива резонаторов

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены двумерные и трехмерные упрощенные модели топологических изоляторов в двумерном и трехмерном пространстве на языке трехцветных клеточных автоматов. Решена задача определения правил для КА на плоскости и в пространстве.Прямые численные расчеты подтверждают теорию качественно и количественно. Модель может бытьфизически реализована в фотонике, электронике, механике, акустике и гидродинамике [19].

Статья докладывалась на конференции «Волны 2021», секция «Математическое моделирование в задачах волновой физики - 2».

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-52-52006.

[1] *Lu L., Joannopoulos J. D. , Soljačić M.* // Nat. Photonics. 2014. **8**, P. 821.
[2] *Lu L., Joannopoulos J. D., Soljačić M.* // Nat. Phys. 2016.**12**, P. 626.
[3] *Ozawa T., Price H. M., Amo A., Goldmanet N.* // Rev. Mod. Phys. Am. Phys. Soc. 2019. **91**, № 1. P. 15006.
[4] *Haldane F. D. M. Raghu S.* // Phys. Rev. Lett. 2008. **100**, P. 013904.
[5] *Khanikaev A.B., Shvets G.* T // Nat. Photonics. 2017. **11**, № 12. P. 763.
[6] *Hasan M. Z., Kane C. L.* // Rev. Mod. Phys. 2010.**82**, P. 3045.
[7] *Volovik G. E.* // Uspekhi Fiz. Nauk. 2018. **61**, P. 89.
[8] *Lifshitz I. M.* // Zhurnal. Eksp. i Teor. Fiz. 1960. **11**, P. 1130.
[9] *Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N., Meade R. D.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light (Second Edition). Princeton University Press, 2008.
[10] *Nye J. F.* Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations // Institute of Physics Pub, 1999.
[11] *Bekshaev A., Bliokhand K. Y., Soskin M.* // J. Opt. 2011. **13**.
[12] *Gao D., Gao L., Novitsky A., Chen H., Luk'yanchuk B.* // Opt. Lett. 2015. **40**, P. 4162.
[13] *Bykov D. A., Doskolovich L. L.* // Phys. Rev. 2018. **97**, P. 013846.
[14] *Klitzing K. V., Dorda G., Pepper M.* // Phys. Rev. Lett. 1980. **45**, P. 494.
[15] *Rudner M. S., Lindner N. H., Berg, E. Levin M.* // Phys. Rev. X. 2013. **3,** P. 1.
[16] *Farrelly T.* // Quantum. 2020. **4**, P. 1.
[17] *Wolfram S.* // Los Alamos Science. 1983. **9**, P. 42.
[18] *Wolfram S.* A new kind of science // Champaign, IL: Wolfram media, 2002. **5**, P. 130.
[19] *Зуев А.С., Пыхтин Д.А., Бикбаев Р.Г., Тимофеев И.В.* // Труды школы–семинара «Волны-2021». Гидродинамические волны и течения. 2021. P. 1.

# Photonic topological insulators of the Rudner type in terms of of tricolor cellular automata

**D. P. Fedchenko**[1,2,a], **V. V. Novikov**[1,b], **I. V. Timofeev**[1,2,c]

[1]*Siberian Federal University. Krasnoyarsk, 660041 Russia*
[2]*Kirensky Institute of Physics Siberian Branch Russian Academy of Sciences Krasnoyarsk, 660036 Russia*
*E-mail: [a]fdp@iph.krasn.ru, [b]work_vladimir_novikov@mail.ru, [c]tiv@iph.krasn.ru*

A topological insulator is a material that simultaneously exhibits the properties of a conductor on the surface and an insulator in volume. Rudner's game is a simplified model of a topological insulator, experimentally implemented on two-dimensional photonic lattices and described as a cellular automaton similar to Conway's game of life. A three-color cellular automaton is a regular lattice of cells. Each cell takes one of three colors according to the specified cell recoloring rule. In this work, two colors of the cellular automaton correspond to the absence and presence of a photon in the resonator, and the third color corresponds to the boundary of the region. The Rudner game is generalized to the case of a three-dimensional array of optical cavities and the defining properties of a topological insulator are demonstrated. A class of cellular automata is introduced that preserve the boundary and the number of photons, as well as zero group velocity for photons far from the surface. Physical realizations are expected in photonics, electronics, mechanics, and acoustics.

PACS: 42.60.Da, 42.25.Fx, 42.70.Qs.
*Keywords*: topological photonics, topological insulators of the Rudner type, tricolor cellular automata, Wolfram code.
*Received 15 October 2021.*

**Сведения об авторах**

1. Федченко Дмитрий Петрович — канд. физ.-мат. наук; e-mail: fdp@iph.krasn.ru.
2. Новиков Владимир Владимирович — студент 3 курса бакалавриата; e-mail: work_vladimir_novikov@mail.ru.
3. Тимофеев Иван Владимирович — доктор физ.-мат. наук; e-mail: tiv@iph.krasn.ru.