

Мультисхемный алгоритм численного решения динамических уравнений модели Власова–Дарвина

Л. В. Бородачев,^{*} С. С. Анненков[†]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 09.07.2021; подписана в печать 02.08.2021)

Сформулирован (и методически разработан) подход к оптимизации процедуры решения уравнений движения частиц дискретной самосогласованной модели разреженной плазмы на основе сопряжения разных по характеру и вычислительным свойствам динамических схем. Концепция алгоритмически реализована и опробована в математическом (по методу макрочастиц) моделировании низкочастотной кинетической неустойчивости Вайбеля. Показано существенное сокращение времени симуляции при использовании указанной методики оптимизации по сравнению с традиционным счетом на основе только одной (явной или неявной) динамической схемы. В ходе компьютерных экспериментов выявлены особенности поведения вайбелевской раскачки на стадии ее насыщения: присутствие затухающих низкочастотных колебаний плотности энергии магнитного поля — ключевого параметра неустойчивости.

PACS: 52.65

УДК: 519.6:533.9

Ключевые слова: модель Власова-Дарвина, PIC-алгоритм, динамические схемы, неустойчивость Вайбеля

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает тематику публикации [1] и посвящена развитию методики численного решения динамических схем в «дарвинских алгоритмах». Это обусловлено актуальностью использования при численном анализе низкочастотных явлений плазмифизики дискретного моделирования на основе самосогласованного формализма Власова [2] с безылучательным (магнитоиндукционным) приближением Дарвина [3] для внутренних электромагнитных полей. Последнее позволяет рассматривать плазму как систему с мгновенным дальним действием, что исключает наличие в ней свободных электромагнитных волн. В контексте конечно-разностной аппроксимации аналитической модели это приводит к снятию актуальной для дискретных плазменных алгоритмов проблемы устойчивости (а вместе с ней и ограничений на временной шаг, обусловленных критерием Куранта [4]) при численном решении полевых уравнений полной электромагнитной модели [5, 6].

Теперь временной шаг эволюции самосогласованной (Власов-Дарвин) дискретной системы, по сути определяющий экономичность численного алгоритма, обусловлен именно процедурой разностного интегрирования уравнений движения частиц, выбор которой обусловлен как физическими соображениями, так и условиями ее устойчивости. В этой связи представляет интерес использование не одной, а нескольких динамических схем в рамках одного плазменного кода, позволяющее существенно минимизировать численные затраты, что особенно актуально для компьютерных

экспериментов в области крупномасштабных явлений физики плазмы.

Предлагаемая методика оптимизации процедуры численного решения уравнений движения заключается в рациональном использовании в счете и явной (экономичной, но условно устойчивой), и неявной (безусловно устойчивой, но менее экономичной) схем, в соответствии с характером конкретной стадии развития исследуемого процесса.

Ранее, в публикации [1], был сформулирован (и реализован в виде параметра) критерий переключения динамических схем и приведена процедура их сопряжения в процессе текущего счета. Продемонстрирована эффективность предложенной методики оптимизации в рамках кинетического моделирования хорошо известной электромагнитной неустойчивости Вайбеля [7].

В данной работе нас интересовала практическая эффективность рассматриваемого мультисхемного подхода. В этой связи, прежде всего были проведены исследования трех разностных динамических схем: явной схемы «с перешагиванием», полной неявной схемы и неявной редуцированной схемы [5, 6, 8] на тестовых задачах движения частиц в электрическом, магнитном, и скрещенных (электрический дрейф) полях. Здесь получены количественные оценки экономичности и точности редуцированной неявной схемы (в сравнении с полной неявной) для обоснования корректности ее использования в предлагаемой методике.

Далее, развита методика динамического совмещения процедур численного интегрирования уравнений движения частиц. В частности, введен дополнительный параметр переключения, связанный с требуемыми вычислительными затратами (по каждой схеме) для продвижения самосогласованной модельной системы на временной интервал, диктуемый физически необходимым уровнем разрешения текущей фазы ее эволюции. Указанный параметр активизируется при выходе

* borodach2000@mail.ru

† annenkov97@gmail.com

исследуемого процесса на квазилинейный (слабовозмущенный или стагнирующий) этап развития.

Наконец, в рамках моделирования уже представленной выше кинетической неустойчивости Вайбеля был продемонстрирован корректный подход к выбору критерия (и параметров) переключения динамических схем. Отметим, что в результате компьютерных экспериментов получены новые данные об этапе стагнации (насыщения) вайбелевской раскачки: присутствие затухающих низкочастотных колебаний плотности энергии магнитного поля с выходом последней на стационарный уровень.

Подчеркнем, что предложенный подход особенно актуален, как нам представляется, при численной (по методу частиц) симуляции явлений разреженной магнитоактивной плазмы (ярким представителем которых и является означенная выше неустойчивость), т.е. там, где наиболее эффективно приложение именно дарвинских алгоритмов.

В целях преемственности данной публикации напомним основные моменты концепции дискретного дарвинского моделирования, приведенные в работе [1].

1. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ВЛАСОВА–ДАРВИНА

В случае разреженной полностью ионизованной плазмы, где столкновения играют роль малых возмущений на фоне коллективных взаимодействий, самосогласованный подход, лежащий в основе дискретного моделирования, представляется системой:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

где источники определяются следующим образом:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v}.$$

Таким образом, динамика частиц обуславливается внутренним (самосогласованным) электромагнитным полем, которое, в свою очередь, порождается неоднородными плотностями заряда и тока.

С позиций практического приложения важно отметить следующее.

Динамическая и полевая части представления формально равноправны, и, следовательно, могут быть представлены в различных приближениях: уравнения поля в интересующем нас далее дарвинском [3], адекватно описывающем низкочастотные процессы физики плазмы, а гладкая одночастичная функция распределения в виде дискретной $f^D(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ для конечного ($j = 1, 2, \dots$) числа частиц, траектории которых являются характеристиками кинетического уравнения Власова [9].

Модель принципиально нелинейна, что требует активного использования численного анализа, в частности, по методу частиц (макрочастиц) — наиболее эффективного в дискретной аппроксимации кинетического представления разреженной плазмы [5].

Метод макрочастиц (ММ) развивает идеи дискретной аппроксимации одночастичной функции распределения и самосогласованного подхода, базируясь на предпосылке Власова [9] об адекватном описании эволюции начального состояния любой заданной в области D через $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ совокупности заряженных частиц $\int_{-\infty}^{\infty} \int_D f d\mathbf{r} d\mathbf{v} \gg 1$ малым ансамблем N макрочастиц, движущихся в порождаемых ими электромагнитных полях.

Таким образом, если уравнения движения макрочастиц (пакетов реальных частиц, где под $\mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t)$ понимаются фазовые координаты центра масс) дополнить уравнениями коллективных (самосогласованных) полей, мы получим замкнутую систему — дискретную модель:

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j; \quad \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E}_j + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}_j]), \quad j = \overline{1, N}$$

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{E} = 4\pi \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Очевидно, что степень физической достоверности такого представления обусловлена количеством используемых макрочастиц. Отметим, что в современной практике их число достигает величин порядка 10^8 , так что львиную долю численных затрат в компьютерных экспериментах по ММ составляет именно расчет динамических траекторий. Следовательно любая оптимизация процедуры решения уравнений движения частиц даст существенную экономию вычислительных ресурсов. Последнее особенно актуально для реализации дискретных плазменных алгоритмов на малых платформах, в частности персональных компьютерах, в виде PIC-кодов [10].

Дарвинское приближение по сути состоит в максимально точном представлении электромагнитного поля

в системе заряженных частиц с мгновенным дальним действием.

Используя в этих целях теорему Гельмгольца о разложении векторного поля на продольную (потенциальную) и поперечную (вихревую) составляющие [11]

$$\nabla \times \mathbf{a}_l = 0; \quad \nabla \mathbf{a}_t = 0; \quad \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_t = \mathbf{a}$$

можно получить следующие уравнения дарвинской модели [12]:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{E}_l = 4\pi\rho, & \nabla \mathbf{E}_t = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_l = 0, & \nabla \times \mathbf{E}_t = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_l}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Как легко видеть, единственное отличие дарвинского описание полей от максвелловского — отсутствие поперечной составляющей тока смещения. Однако, что важно, его (тока смещения) оставшаяся продольная компонента обеспечивает выполнение уравнения непрерывности заряда, обеспечивая физическую корректность формализма.

В контексте настоящей работы здесь отметим следующее.

Дарвинские уравнения не описывают свободную электромагнитную волну (излучение), но сохраняют связь электрического и магнитного полей (индукционные эффекты), оправдывая терминологию «безызлучательное» или «магнитоиндукционное» приближение.

Расщепление полей и токов на продольные и поперечные части позволяет в рамках самосогласованной модели естественным образом реализовывать дробномерные (с редукцией конфигурационного пространства) постановки. В экспериментах по ММ — это существенное уменьшение количества частиц при сохранении их эффективной [5] дебаевской плотности.

Несоответствие гиперболической формы уравнений поля и незапазывающего характера приближения требует эллиптической редакции дискретного дарвинского формализма [12], что естественно выполнено для используемого ниже плазменного кода.

2. МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ СЧЕТА

Характерной чертой дискретной (по ММ) полной электромагнитной модели является наличие быстрого (со скоростью света c в полевой части) и медленного (с тепловой скоростью $v_T \ll c$ в динамической части) движений. При этом условие устойчивости явного (наиболее экономичного) численного решения модели [5]:

$$v_{\text{сет}} = h/\tau > v_{\text{фаз}},$$

$v_{\text{фаз}} = v_T$, для медленного или c для быстрого движений.

И общий шаг эволюции выбирается по более жесткому условию устойчивости:

$$\tau = \tau_f (v_{\text{фаз}} = c).$$

Таким образом в традиционной (полной электромагнитной) постановке временной шаг решения динамических уравнений τ_p существенно занижен и явная модель Власова-Максвелла крайне неэкономична для численных исследований низкочастотных процессов плазмы (как правило, долговременных и крупномасштабных).

Для указанного круга задач весьма эффективна самосогласованная дарвинская модель, поскольку полностью снимает условие Куранта $\tau < h/c$ в силу незапазывающего характера. Теперь величина временного шага эволюции $\tau = \tau_p$ обусловлена именно процедурой разностного интегрирования уравнений движения частиц, выбор которой обусловлен физическими соображениями и условиями ее устойчивости.

В этой связи представляет интерес использование не одной, а нескольких динамических схем в рамках одного дискретного плазменного алгоритма, позволяющее детальное временное разрешение процесса на «активных» стадиях и крупные шаги интегрирования в остальное время, что существенно минимизирует вычисленные затраты.

Общий подход состоит в мониторинге резкого характера изменений величины базового параметра (параметров) моделируемого процесса как критерий перехода на другую, более экономичную и физически адекватную схему. При этом вопрос о его выборе должен решаться в каждой конкретной постановке компьютерного эксперимента отдельно. Вместе с тем, учитывая характер исследуемых процессов на базе модели Власова-Дарвина, в основе которых лежат различного вида кинетические неустойчивости, легко понять, что роль такого параметра может с успехом играть плотность энергии того или иного вида или амплитуда характерной моды процесса, рост которой, как правило, соотносится с теоретическими оценками инкремента. Справедливость этого положения будет показана на конкретном примере решения демонстрационной задачи.

2.1. Мультисхемный алгоритм

Как указывалось выше предлагаемая методика оптимизации заключается в рациональном текущем сопряжении явной (экономичной, но условно устойчивой) и неявной (безусловно устойчивой, но менее экономичной) схем, обусловленном величиной временного шага τ , физически адекватного конкретной стадии исследуемого процесса.

В качестве базовых динамических схем использовались: явная и неявная схемы 2-ого порядка точности. Приведем их вид в терминах послыого перехода $t^0 \rightarrow t^1 = t^0 + \tau$.

Явная схема с перешагиванием (также известна как Leap-Frog [5]):

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^{1/2} - \mathbf{v}^{-1/2}}{\tau} = \frac{q}{m} \left\{ \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}^{1/2} + \mathbf{v}^{-1/2}}{2} \times \mathbf{B}^0 \right\}, \\ \frac{\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^0}{\tau} = \mathbf{v}^{1/2}. \end{cases}$$

Симметрия схемы обеспечивает второй порядок точности, а явный характер обуславливает экономичность и простоту реализации. Существенным недостатком

является ограничение шага по времени, связанное с условием устойчивости $\tau\omega_{pe} < 2$.

Редуцированная неявная схема [8]:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^{1(\nu+1)} - \mathbf{v}^0}{\tau} = \frac{q}{2m} \left\{ (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{1\nu}) + \frac{1}{c} [(\mathbf{v}^0 \times \mathbf{B}^0) + (\mathbf{v}^{1\nu} \times \mathbf{B}^{1\nu})] \right\}, \\ \frac{\mathbf{r}^{1(\nu+1)} - \mathbf{r}^0}{\tau} = \frac{\mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^{1(\nu+1)}}{2}. \end{cases}$$

Схема безусловно устойчива, но имеет более высокую вычислительную стоимость, связанную с необходимостью итерационной процедуры решения с заданной точностью, как правило, определяемой в сеточной норме L_2 (как было ранее показано [13] схема безусловно сходится, причем для умеренно неоднородной плазмы достаточно быстро, всего за 3–4 итерации).

Отдельно коснемся вопросов сопряжения базовых схем, обусловленных процедурой их динамического переключения в процессе текущего счета. Особенность схемы Leap-Frog заключается в центрировании по времени за счет нахождения координат на целых слоях по времени, а скоростей — на полуцелых; неявная же редуцированная схема подразумевает нахождение фазовых координат на целых слоях. Это приводит к необходимости «сшивания» скоростей при переключении динамического блока с одной схемы на другую, которое выглядит следующим образом:

$$\mathbf{v}^{1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^1), \quad \mathbf{v}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{1/2} + \mathbf{v}^{-1/2}).$$

2.2. Сравнение динамических систем

Перед тем как приступить к практическому применению методики было проведено сравнение точности и эффективности упомянутых схем. При этом нас прежде всего интересовало методическое (количественное) обоснование выбора в качестве неявной схемы именно редуцированной [8].

В качестве тестовой задачи использовалось моделирование вращения заряженной частицы в экспоненциально возрастающем магнитном поле ($\lambda = 1$) — процессе, типичном для определенной выше области оп-

тимального приложения дарвинских кодов:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, & \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \mathbf{B} = \{0, 0, B_0 e^{\lambda t}\}, & B_0 = 2\pi mc/q, \\ \mathbf{v}(0) = \{0, 0.1, 0\}, & \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \\ q/m = 1, & c = 1, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Константа B_0 здесь выбрана таким образом, чтобы период обращения частицы в постоянном магнитном поле численно равнялся единице, а угловая частота в начальный момент времени была 2π . Симулирование выполнялось для различных значений временного шага τ , удовлетворяющих условию устойчивости явной схемы.

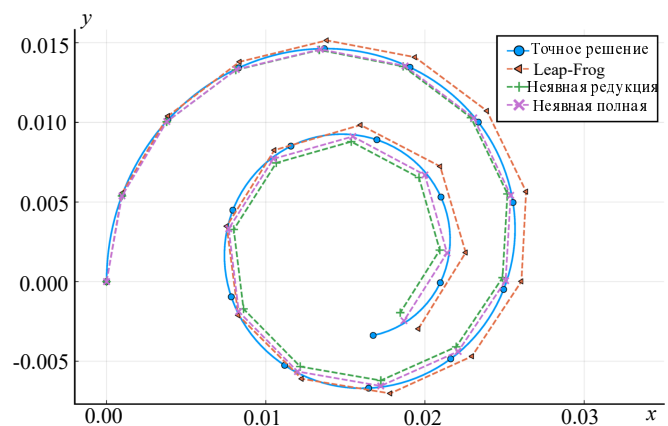


Рис. 1. Траектория заряженной частицы в экспоненциально возрастающем магнитном поле

В виде иллюстрации на рис. 1 показано точное решение задачи, а также численные решения, полученные

с помощью явной (LF), полной неявной (IF) и неявной редуцированной (IR) схем при шаге $\tau = 0.056$, который соответствует ошибке численного решения по схеме с перешагиванием (LF) величиной 15% от нормы точного решения.

Можно заметить, что полная версия неявной схемы дает решение, визуально несколько более близкое к точному по сравнению с редуцированной. Чтобы оценить, насколько это существенно, была исследована зависимость от шага интегрирования разности ошибок численных решений обеих неявных схем в сеточной норме L_2 .

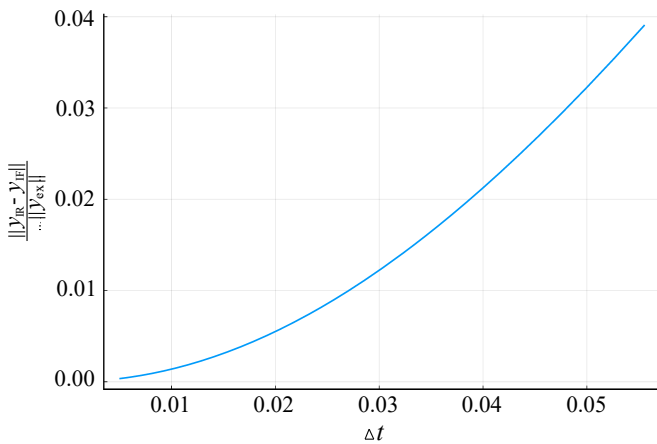


Рис. 2. Нормированные разности численных решений полной и редуцированной схем

Нетрудно видеть (рис. 2), что в среднем (для всей серии проведенных методических расчетов) редуцированная схема всего на 2% менее точна полной.

Таким образом, в представленном диапазоне временных шагов явная схема менее адекватна в сравнении с неявными (полной и редуцированной). При этом последние практически эквивалентны, за исключением меньшей вычислительной стоимости редуцированной. Дополнительно к этому в редуцированной схеме, в отличие от полной, магнитное поле текущего временного слоя во время итераций не требуется, что допускает запись итерационных полевых значений на основной сетке. Это позволяет экономить оперативную память и сокращает временные издержки на работу с ней. Наконец отметим, что процедуры численного решения по полной неявной и редуцированной неявной схемам даже в рассмотренном здесь сильно нелинейном случае сходятся (в рамках ошибки явной схемы) всего за две итерации.

2.3. Практическая реализация методики

Для апробации указанной методики оптимизации использовался программный код, реализующий дискретную модель Власова-Дарвина в модифицированном гамильтоновом представлении с геометрией фазо-

вого пространства (x, v_x, v_y, v_z) и периодическими граничными условиями [14], где в виде базовых схем динамического блока использовались указанные выше Leap-frog (LF) и неявная редуцированная (IR).

В качестве модельной задачи, как и ранее (работа [1]), была выбрана электромагнитная неустойчивость по Вайбелю.

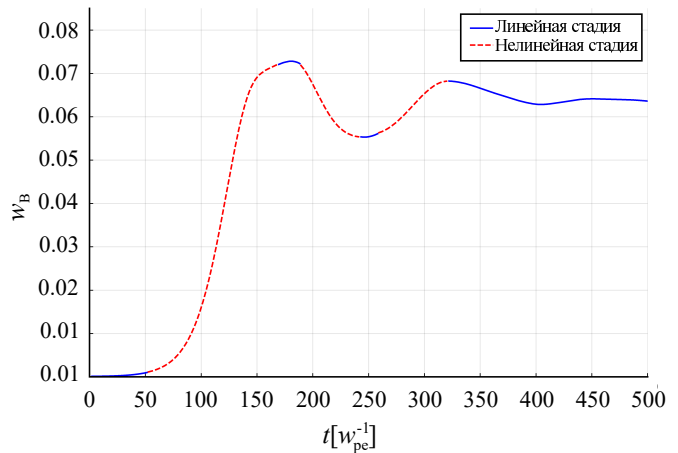


Рис. 3. Временной профиль средней плотности энергии магнитного поля в единицах начальной кинетической энергии частиц

Напомним, что ее вызывает анизотропия функции распределения частиц по скоростям. Возникающие при этом токовые слои сфазированы так, что усиливают спонтанно возникшее вначале магнитное поле, способствуя росту возмущений, имеющему линейную и нелинейную стадии с последующим этапом стагнации (рис. 1).

В контексте методического обоснования были взяты параметры близкие постановке численных исследований однокомпонентной вайбелевской неустойчивости [18]:

$$T = 500 [\omega_{pe}^{-1}], \quad \tau = 0.1 [\omega_{pe}^{-1}],$$

$$h = 0.2 [c \omega_{pe}^{-1}], \quad N_x = 125, \quad N_e = 125000,$$

$$u_z = 0.07071c, \quad u_x = u_y = 0.02236c, \quad A = 9,$$

где соответственно указаны время моделирования, шаг по времени (для явной схемы), размер ячейки, количество узлов сетки, количество электронов, их тепловые скорости, показатель анизотропии ($A \equiv \frac{u_z^2}{u_x^2} - 1$) (ионы представлены стационарным положительным фоном).

Рассмотрим основной вопрос практической реализации методики — формализация перехода с одной схемы на другую в процессе счета. Для этого получим критерий указанного перехода в рамках настоящей задачи.

Представляя в виде $F \exp(i(k_x x - \omega t))$ величину возмущенной компоненты магнитного поля, можно записать:

$$B_y(t + \Delta t) = \exp(\gamma \Delta t) B_y(t),$$

где $\gamma = -i\omega$ — инкремент вайбелевской неустойчивости (в последующих формулах индекс компоненты для простоты опустим).

Выразим его значение через плотность магнитного поля, учитывая пропорциональность этой величины квадрату напряженности ($w_B(t) \sim B^2(t)$):

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta t} \ln \frac{w_B(t + \Delta t)}{w_B(t)} \simeq \frac{1}{2w_B(t)} \frac{w_B(t + \Delta t) - w_B(t)}{\Delta t}.$$

Воспользовавшись далее дисперсионным уравнением в виде [18]:

$$k_x^2 c^2 - \omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(A + (A + 1) \frac{\omega}{k_x u_x} Z \left(\frac{\omega}{k_x u_x} \right) \right),$$

где $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$, а Z — дисперсионная функция плазмы [16]:

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{s - \zeta} ds = e^{-\zeta^2} \left(i\sqrt{\pi} - 2 \int_0^{\zeta} e^{-x^2} dx \right),$$

$$\begin{cases} |w_B(t + \tau) - w_B(t)| / \tau < \delta\omega, & \text{— неявная схема с увеличенным шагом,} \\ |w_B(t + \tau) - w_B(t)| / \tau > \delta\omega, & \text{— явная схема с базовым шагом,} \end{cases}$$

где $\delta\omega = 2\hat{\gamma}w_B(t)$, $\tau = \tau_{ex}$ или $\tau = \tau_{im}$ в зависимости от того, явная или неявная схема использовалась на данном шаге. Полученная таким образом очередность динамических схем графически отображена на рис. 3.

Отметим, что величина шагов квазилинейной стадии процесса или фазы его обострения (обусловленная их физически требуемым разрешением) дополнительно к аналитическому прогнозу уточняется в серии предварительных просчетов — составной части любого корректного численного исследования по методу частиц.

Важно подчеркнуть, что прирост скорости вычислений имеет место только при соотношении модельных временных шагов τ_{im} / τ_{ex} , превышающем соотношение временных затрат, приходящихся на выполнение одной итерации цикла моделирования (с расчетом самосогласованных полей):

$$\tau_{im} / \tau_{ex} > Q_{im} / Q_{ex} = k_{mod},$$

где Q_{ex} и Q_{im} — затраты, приходящиеся на один шаг симуляции исследуемого процесса при использовании явной и неявной схемы соответственно. Поэтому при возможном выходе динамики на «квазистационарность» (например, режим стагнации) к основному критерию добавляется критерий экономичности перехода с явной схемы (LF) на неявную (IR) при выбранном шаге τ_{im} — переход происходит (выгоден) лишь в случае:

$$\tau_{im} > \tau_{ex} k_{mod}.$$

где ζ — в общем случае комплексное число, найдем аналитические зависимости $\gamma(k)$ (рис. 4) и тем самым количественную оценку величины инкремента роста γ_{max} .

Следовательно, для выделения условно линейной стадии достаточно ограничить временную производную плотности энергии магнитного поля:

$$\left| \frac{w_B(t + \Delta t) - w_B(t)}{\Delta t} \right| < 2\hat{\gamma}w_B(t) < 2\gamma_{max}w_B(t),$$

где пограничная величина инкремента $\hat{\gamma}$ выбирается в виде 2–3% от γ_{max} .

Таким образом, базовый критерий переключения схем имел следующий вид:

Оценка величины k_{mod} зависит от вычислительной мощности конкретного оборудования и должна быть получена из методического обеспечения компьютерного эксперимента. В частности, на персональном компьютере средней мощности (с процессором Intel Core i7-2670QM) авторы получили $k_{mod} \simeq 5.3$.

Подводя краткий итог практического приложения методики, отметим, что совокупное снижение времени симуляции (текущего прогона) при чередовании базовых схем динамического блока (в сравнении со счетом лишь по явной схеме) для временных шагов $\tau_{ex} = 0.1[\omega_{pe}^{-1}]$, $\tau_{im} = 1.0[\omega_{pe}^{-1}]$ составило около 60%, что весьма существенно в контексте дискретного (по методу макрочастиц) моделирования крупномасштабных явлений нелинейной плазмифики.

Отдельно остановимся на полученных в ходе математического эксперимента физических результатах, выявляющих характер поздней стадии развития однокомпонентной электромагнитной неустойчивости Вайбеля. Здесь на протяжении $\approx 300 \omega_{pe}^{-1}$ наблюдается режим установления, сопровождающийся затухающими низкочастотными колебаниями (периодом $\approx 150 \omega_{pe}^{-1}$) и выходом на стационар плотности энергии магнитного поля w_B — ключевого параметра неустойчивости. Установившееся значение w_B составляет примерно 85% от максимальной величины, достигаемой на этапе обострения неустойчивости и приблизительно 6% от величины исходной кинетической энергии электронов. Последнее хорошо согласуется с оценками

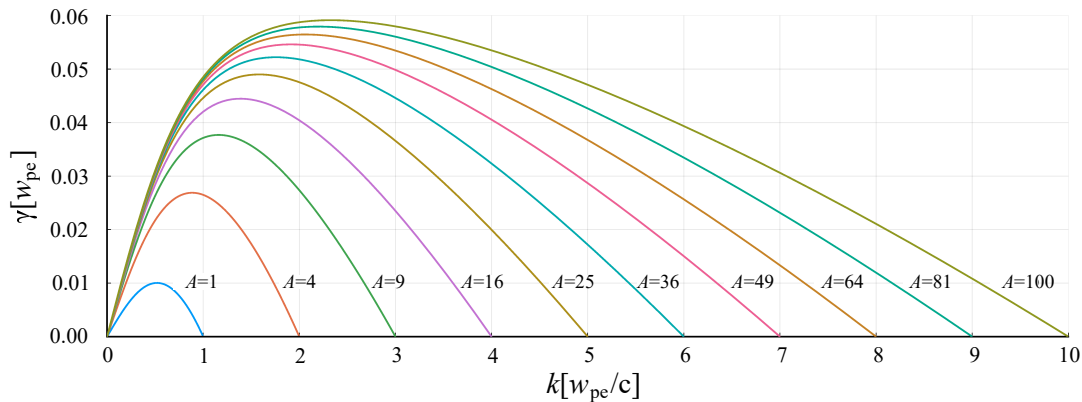


Рис. 4. Инкремент вайбелевской неустойчивости для различных значений параметра анизотропии при постоянном значении $u_z = 0.1 [c]$

возможной доли передаваемой полю энергии частиц, полученными в результате численного эксперимента [15, 17, 18] и аналитического расчета [18–20]. Отметим, что приведенные данные существенно дополняют общую картину этапа стагнации электронной вайбелевской неустойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и методически оформлен подход к оптимизации счета в компьютерных экспериментах по методу крупных (макро) частиц, основанный на мультисхемной реализации алгоритма численного решения уравнений движения в дискретной плазменной модели Власова-Дарвина.

В рамках кинетического моделирования низкочастотной электромагнитной неустойчивости (Вайбеля)

показана практическая эффективность разработанной методики оптимизации с наблюдаемым сокращением времени симуляции примерно вдвое.

Получены новые данные о поздней стадии (этапе насыщения) однокомпонентной вайбелевской неустойчивости: сопровождается низкочастотными затухающими колебаниями плотности энергии самосогласованного магнитного поля, возникающего в результате перекачки исходной «энергии анизотропии» электронов.

Можно полагать, что использование мультисхемных дарвинских PIC алгоритмов в области численных исследований низкочастотных процессов разреженной плазмы позволит существенно экономить реальные вычислительные затраты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00690 А).

-
- [1] Бородачев Л.В., Анненков С.С. // *Ученые записки физического ф-та* Московского ун-та. 2019. №5. 1950402.
- [2] Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. // *Физика плазмы для физиков*. М.: Атомиздат. 1979.
- [3] Darwin C.G. // *Phil. Mag.* 1920. **39**. P. 537.
- [4] Поттер Д. // *Вычислительные методы в физике*. М.: Мир. 1975.
- [5] Hockney R.W., Eastwood J.W. // *Computer Simulation Using Particles*. N.-Y.: McGraw-Hill. 1981.
- [6] Бэдсел Ч.К., Ленгдон А.Б. // *Физика плазмы и численное моделирование*. М.: Энергоатомиздат. 1989.
- [7] Чен Ф. // *Введение в физику плазмы*. М.: Мир. 1987.
- [8] Бородачев Л.В. // *ЖВМиМФ*. 1991. **31**, №6. С. 934.
- [9] Власов А.А. // *Теория многих частиц*. М.-Л.: ГИТТЛ. 1950. С. 348.
- [10] Григорьев Ю.Н., Вишивков В.А. // *Численные методы «частицы в ячейках»*. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. РАН. 2000.
- [11] Корн Г., Корн Т. // *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука. 1974. С. 832.
- [12] Бородачев Л.В. // *Вестник МГУ*. 2006. **3**, №1. С. 7.
- [13] Бородачев Л.В., Коломиец Д.О. // *Мат. Моделирование*. 2010. **22**, №10. С. 83.
- [14] Бородачев Л.В., Беляев А.А. // *УЗФФ*. 2017. №4.
- [15] Бородачев Л.В., Коломиец Д.О. // *Вестник МГУ*. Сер. 3. 2010. №2. С. 14.
- [16] Fried B.D., Conte S.D. // *The Plasma Dispersion Function*. New York and London: Academic Press. 1961.
- [17] Morse R.L., Nielson C.W. // *Phys. Fluids*. 1971. **14**, N 4. P. 830.
- [18] Borodachev L.V., Kolomiets D.O. // *J. Plasma Phys.* 2011. **77**. P. 277.
- [19] Lemons D.S., Winske D., Gary S.P. // *J. Plasma Phys.* 1979. **21**, N 2. P. 287.
- [20] Davidson R.C., Hammer D.A. // *The Physics of Fluids*. 1972. **15**, N 2. P. 317.

Multicircuit algorithm for the numerical solution of dynamic equations of the Vlasov-Darwin model.

L. V. Borodachev^a, S. S. Annenkov^b

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: ^aborodach2000@mail.ru, ^bannenkov97@gmail.com

An approach is formulated (and methodically developed) to optimize the procedure for solving the equations of motion of particles of a discrete self-consistent model of a rarefied plasma on the basis of conjugation of dynamic schemes of different nature and computational properties. The concept is algorithmically implemented and tested in mathematical (by the method of macroparticles) modeling of the Weibel low-frequency kinetic instability. A significant reduction in the simulation time is shown when using the specified optimization technique in comparison with traditional counting based on only one (explicit or implicit) dynamic scheme. In the course of computer experiments, the features of the behavior of the Weibel swing at the stage of its saturation were revealed: the presence of damped low-frequency oscillations of the energy density of the magnetic field, the key parameter of instability.

PACS: 52.65.

Keywords: Vlasov–Darwin model, PIC-method, numerical algorithm, Weibel instability.

Received 09 July 2021.

Сведения об авторах

1. Бородачев Леонид Васильевич — доктор физ.-мат. наук, доцент; тел.: (915) 114-42-09, e-mail: borodach2000@mail.ru.
2. Анненков Сергей Сергеевич — магистр; тел.: (916) 042-74-20, e-mail: annenkov97@gmail.com.