

## Информационно–энтропийные неравенства для чистых состояний квантовых систем в вероятностном представлении квантовой механики

А. П. Быков<sup>1,\*</sup>, В. И. Манько<sup>1,2†</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Россия, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

<sup>2</sup>Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук,

Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53

(Статья поступила 30.01.2021; Подписана в печать 29.03.2021)

В связи со стремительным развитием технологий с каждым годом проводится все больше экспериментов в области квантовой оптики, квантовых вычислений и криптографии, поэтому актуальность работ по квантовой теории информации не вызывает сомнений. В данной работе были изучены информационно–энтропийные неравенства для чистых состояний квантовых систем, в частности, рассмотрены неравенства для одномерного гармонического квантового осциллятора. Получена симплектическая квантовая томограмма чистых состояний в вероятностном представлении квантовой механики. Введена томографическая энтропия Шеннона и получены новые выражения томографической энтропии чистых состояний одномерного квантового гармонического осциллятора, а также точные выражения для основного и первого возбужденного состояний в зависимости от действительных параметров, получен сдвиг в первом возбужденном состоянии на константу Эйлера–Маскерони. Также были рассмотрены численные методы для получения приближенных значений томографической энтропии второго и третьего возбужденных состояний, при фиксированных параметрах. Получен ожидаемый рост томографической энтропии с ростом уровня  $n$  в зависимости от действительного параметра. Представленный в ходе работы подход может быть распространен на вопрос энтропии произвольных фоковских состояний, а также когерентных состояний параметрического квантового осциллятора. Данное направление исследование вызывает интерес и будет развиваться в дальнейших работах.

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ca

УДК: 530.145

Ключевые слова: квантовая теория информации, квантовая механика, энтропия, чистые состояния, осциллятор, функция Вигнера, томограмма.

### ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория информации является быстроразвивающимся и перспективным разделом науки и находится на стыке теории информации и квантовой механики. Впервые это было затронуто в работах Манчини, Манько и Томбези в 1995 г. [1], где был опубликован новый подход, новое представление квантовой механики — вероятностное, в котором квантовые состояния описывались функциями распределения вероятности, так называемыми томографическими распределениями вероятности — квантовыми томограммами. Можно использовать данное изложение квантовой механики, чтобы развить естественное понятие энтропии, связанной с вероятностями. Поскольку произвольное квантовое состояние любых квантовых систем определяется вероятностью, энтропия (которую мы называем энтропией вероятностного представления) всегда связана с квантовым состоянием. Так как томограммы квантовых состояний являются стандартными функциями распределения вероятностей, все характеристики распределений вероятностей, известные в теории ве-

роятностей, могут быть распространены на томографическое вероятностное представление квантовых состояний, без ограничения общности. Понятие энтропии симплектических томограмм [1] уже было кратко обсуждено в [2, 3]. Наиболее важными и интересными характеристиками (не только с точки зрения теории, но и с точки зрения эксперимента), связанными с распределениями вероятностей, являются энтропия и информация [4].

Данная тема актуальна как в теории, так и в плане новых экспериментов, которые с каждым годом становятся все более интересны для реализации.

В данной работе речь пойдет прежде всего об энтропийных свойствах. Мы затронем такое понятие, как информационно–энтропийные неравенства для чистых состояний квантовых систем в вероятностном представлении квантовой механики, а также рассмотрим энтропию чистых состояний на примере одномерного квантового гармонического осциллятора.

### 1. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТОМОГРАММА

Чтобы перейти к определению симплектической квантовой томограммы нужно ввести оператор плотности системы. Впервые оператор плотности состояний

\*E-mail: bykov.ap@phystech.edu

†E-mail: manko@sci.lebedev.ru

для ансамбля одинаковых систем, находящихся в состоянии  $|\psi_j\rangle$  с вероятностью  $w_j$ , ввел Йоганн фон Нейманн (1927) в своих работах [5]. Оператор получается при разложении состояния по ортонормированному базису:

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \sum_j w_j c_{mj}^* c_{nj} |n\rangle \langle m| \quad (1)$$

Симплектическая томограмма однозначно определена состоянием системы и может быть выражена через оператор плотности:

$$\omega_{\hat{\rho}}(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho} \delta(X - \mu \hat{x} - \nu \hat{p})).$$

Дадим точное определение симплектической квантовой томограммы. Томограмма  $\omega(X, \mu, \nu)$  получается как перекрытие в фазовом пространстве между функцией Вигнера [6]  $W(x, p)$  данного состояния и бесконечно тонкой полосой ( $\delta$ -функция) и имеет физический смысл функции распределения вероятностей с нормировкой на единицу. Таким образом, симплектической квантовой томограммой состояний называется функция распределения:

$$\omega(X, \mu, \nu) = \int W(x, p) \delta(X - \mu x - \nu p) dx dp,$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — действительные параметры. Помимо этого можно определить оптическую томограмму в обозначениях  $\mu = \cos \theta$ ,  $\nu = \sin \theta$ , где  $\theta$  — фиксированный угол в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \omega(X, \theta) &= \omega(X, \mu = \cos \theta, \nu = \sin \theta) = \\ &= \int W(x, p) (X - x \cos \theta - p \sin \theta) dx dp. \end{aligned}$$

Функция Вигнера была введена Вигнером в 1932 г., поскольку активно изучались квантовые поправки к классической механике, и является функцией квазивероятностного распределения. Целью было найти аналог стандартной волновой функции, которая появляется в уравнении Шрёдингера, и заменить ее на функцию распределения вероятности в фазовом пространстве. Также заметим, что обратимость преобразования Радона позволяет вырезать функцию Вигнера через томограмму. Функция Вигнера нормирована на единицу.

$$W(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \omega(x, \mu, \nu) e^{i(x - \mu x - \nu p)} dx d\mu d\nu.$$

Симплектическая томограмма состояния  $|\psi\rangle$  может быть получена в виде выражения дробного преобразования Фурье волновой функции состояния:

$$\begin{aligned} \omega_{\psi}(x, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \exp\left(\frac{i\mu y^2}{2\nu} - \frac{ixy}{\nu}\right) \psi(y) dy \right|^2 \geq 0, \\ \omega_{\psi} &= \left| \widehat{F}_{\mu\nu}[\psi](x) \right|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

## Информационная энтропия Шеннона

В базисе собственных векторов матрицы плотности может быть рассмотрена квантовая энтропия фон Неймана и определена как аналог информационной энтропии Шеннона:  $S = - \sum_i \rho_i \ln(\rho_i)$ . Энтропийные соотношения неопределенностей для конечномерных квантовых систем уже были получены в виде неравенств для энтропии Шеннона, связанной с распределениями вероятностей, отвечающих измерениям некоммутирующих наблюдаемых в работах В.И. Манько [7–12].

Прежде всего стоит отметить, что энтропия фон Неймана чистых состояний равна нулю.

## 2. КВАНТОВАЯ ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ

Так как томограмма имеет смысл распределения вероятности, то можно ввести энтропию, связанную с определенной ранее симплектической томограммой. Введение подхода к энтропии на основе томограммы состояния было рассмотрено в [13–22]. Как известно информационная энтропия Шеннона — мера неопределенности некоторой квантовой системы. Определим томографическую энтропию Шеннона с действительными параметрами  $\mu, \nu$ :

$$S(\mu, \nu) = - \int \omega(x, \mu, \nu) \ln(\omega(x, \mu, \nu)) dx$$

Стоит отметить, как томографическая характеристика состояния связана с характеристикой по фон Нейману, а следовательно и энтропия. Томографическая характеристика несет в себе больше информации об описываемом состоянии, чем характеристика по фон Нейману. Как известно, обычная интерпретация по фон Нейману содержит информацию только о диагональных элементах матрицы плотности, в отличие от томографической интерпретации характеристики состояния. С другой стороны, в томографической интерпретации содержится информация о характеристике по фон Нейману, т.к. оператор плотности может быть выражен напрямую через томограмму. Отсюда и связь томографической энтропии по Шеннону и энтропии по фон Нейману.

Напомним, что состояние квантовой системы называется чистым, если вероятности состояний  $w_j$  равны нулю, кроме одного в (1). Тогда оператор плотности является одномерным проектором  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ .

Для чистых состояний квантовых систем выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} & - \int \omega_{\psi}(x, \theta) \ln \omega_{\psi}(x, \theta) dx - \\ & - \int \omega_{\psi}\left(x, \theta + \frac{\pi}{2}\right) \ln \omega_{\psi}\left(x, \theta + \frac{\pi}{2}\right) dx \geq \ln \pi e. \end{aligned}$$

В данном случае, при  $\theta = 0$  томограмма (распределение вероятности) представляет собой функцию рас-

пределения по координате, а при  $\theta = \pi/2$  — функция распределения по импульсу. По сути это выражение означает разницу с классической механикой, т.к. в классическом случае нет соотношения неопределенностей, как в квантовом, а также функция распределения в фазовом пространстве принимает только положительные значения. Следовательно томографические и классические распределения будут отличаться, и поэтому энтропийные неравенства будут разными. Данный вопрос будет рассмотрен в дальнейших работах авторов.

**Томографическая энтропия квантового осциллятора**

В данной работе рассматриваем одномерный гармонический квантовый осциллятор с гамильтонианом  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$ , имеющий волновые функции в координатном представлении, выражающиеся через полиномы Эрмита и дискретный спектр энергий (для  $m = 1, \omega = 1, \hbar = 1$ ):

$$\langle x | n \rangle = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x),$$

$$E_n = n + \frac{1}{2}.$$

Как известно, фоковские состояния образуют ортонормированный базис  $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ . С помощью этого и, согласно (2), можно получить симплектическую квантовую томограмму для осциллятора с действительными параметрами  $\mu$  и  $\nu$ :

$$\omega_n(x, \mu, \nu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) H_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right),$$

выражающуюся через полиномы Эрмита. Отсюда можно найти точные выражения для конкретного  $n$ , например, для первого возбужденного:

$$\omega_1(x, \mu, \nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)^3}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right).$$

Рассмотрим обычную энтропию Шеннона для состояния  $|n\rangle$  квантового гармонического осциллятора. Можно записать выражения для координаты и импульса в зависимости от волновой функции в соответствующем представлении:

$$S_n^{(x)} = - \int |\psi_n(x)|^2 \ln(|\psi_n(x)|^2) dx,$$

$$S_n^{(p)} = - \int |\psi_n(p)|^2 \ln(|\psi_n(p)|^2) dp.$$

Отсюда можно получить равенства для осциллятора, например, для основного состояния осциллятора ( $n = 0$ ) получено равенство:  $S_0 = S_0^{(x)} + S_0^{(p)} = \ln^2(\pi e)$ .

В ходе работы получен явный вид квантовой томографической энтропии для основного и первого возбужденного состояний в зависимости от параметров. Получен сдвиг в первом возбужденном состоянии на константу Эйлера–Маскерони:

$$S_0(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \ln(\pi e) + \frac{1}{2} \ln(\mu^2 + \nu^2),$$

$$S_1(\mu, \nu) = - \int \omega_1(x, \mu, \nu) \ln \omega_1(x, \mu, \nu) dx =$$

$$= - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)^3}}\right) + \frac{3}{2} -$$

$$- \frac{4}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\mu^2 + \nu^2}\right) \ln x dx.$$

Последний интеграл в выражении берется по частям до тех пор, пока не сводится к интегралу типа:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x) \exp(-x^2) dx = \frac{(\gamma_{EM} + 2 \ln 2) \sqrt{\pi}}{4}$ . В итоге получаем точное выражение для томографической энтропии первого возбужденного состояния:

$$S_1(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \ln(\pi e) + \frac{1}{2} \ln(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{2} \gamma_{EM},$$

где  $\gamma_{EM} = 0.577215$  — постоянная Эйлера–Маскерони, определяемая как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа

$$\gamma_{EM} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Аналогичным образом были получены энтропии для второго и третьего возбужденных состояний. В ходе работы были рассмотрены численные методы интегрирования для получения приближенных значений томографической энтропии второго и третьего возбужденных состояний, при фиксированных параметрах ( $\mu = 0, \nu = 1$ ), с оценкой абсолютной погрешности порядка  $10^{-7}$ . Получен ожидаемый рост томографической энтропии с ростом уровня  $n$ .

На графике (рис. 1) представлена зависимость энтропии для основного,  $n = 1, 2, 3$  возбужденных состояний в зависимости от параметра  $\nu$  принадлежащего от 1 до 10 для каждого  $n$ , при фиксированном  $\mu$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Подведем некоторые итоги работы. В ходе работы была изучены свойства энтропии вероятностного представления квантовых состояний. Поскольку томограмма имеет смысл распределения вероятности, то была

Таблица I: Численный расчет энтропии для фиксированных параметров

$n$	$S_n(\mu = 0, \nu = 1)$
0	1.07236
1	1.36097
2	1.49862
3	1.61230

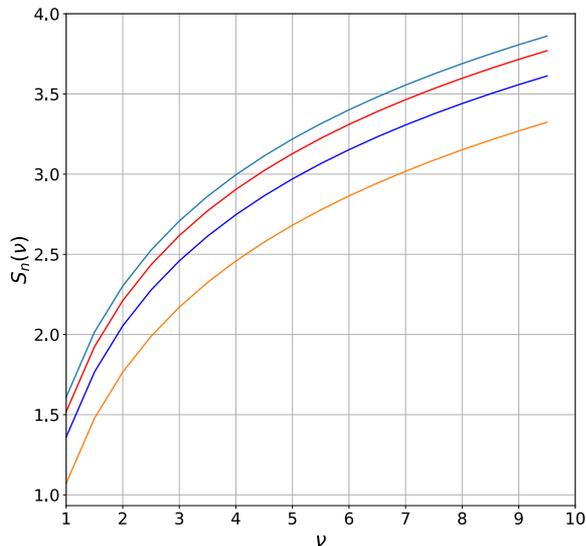


Рис. 1: График зависимости  $S_n(\nu)$ ,  $\mu = 0$

введена энтропия, связанная с определенной симплектической томограммой. В данном случае томографическая энтропия определена через томографическую функцию распределения вероятностей, описывающую и однозначно задающую квантовое состояние в вероятностном представлении квантовой механики. Были изучены свойства информационно-энтропийных неравенств чистых состояний произвольных квантовых систем. В качестве примера был рассмотрен одномерный квантовый гармонический осциллятор. Результатом работы являются новые выражения томографической энтропии чистых состояний одномерного квантового гармонического осциллятора, а также точные выражения для основного и первого возбужденного состояний в зависимости от действительных параметров, получен сдвиг в первом возбужденном состоянии на константу Эйлера–Маскерони. Был представлен численный расчет для второго и третьего возбужденных состояний. Получен рост энтропии с ростом  $n$ .

Представленный подход может быть интересен для изучения энтропии произвольных фоковских состояний гармонического осциллятора, а также  $f$ -осцилляторов и когерентных и сжатых состояний параметрического квантового осциллятора.

Работа выполнена под научным руководством доктора физ.-мат. наук, профессора МФТИ Манько Владимира Ивановича.

- [1] Mancini S., Man'ko V. I., Tombesi P. // Quant. Semiclass. Opt. 1995. **7**:4. P. 615.
- [2] Man'ko M. A. // J. Russ. Laser Res. 2001. **22**. P. 168.
- [3] De Nicola S., Fedele R., Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Eur. Phys. J. B. 2003. **36**. P. 385.
- [4] Wentzel E. C. Probability Theory. 4th edition. Moscow: Nauka, 1969.
- [5] von Neumann J. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. / Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1927. Pp. 245-272.
- [6] Wigner E. // Phys. Rev. 1932. **40**. P. 749.
- [7] Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Entropy. 2018. **20**. P. 692.
- [8] Lopez-Saldivar J. A., Castanos O., Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. **491**. P. 64.
- [9] Man'ko V.I., Markovich L.A. // Russian Physics Journal. **59**. 2017. P. 1937.
- [10] Man'ko V.I., SeilovZ. // Journal of Russian Laser Research. 2017. **38**. P. 50.
- [11] Man'ko V. I., Puzko R. S. // Europhysics Letters. **109**. 2015. 50005.
- [12] Man'ko V. I., Markovich L. A. // Int. J. Quantum Inform. 2014. **12**. 1560021.
- [13] Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Found. Phys. 2011. **41**. P. 330.
- [14] Man'ko M. A., Man'ko V. I. // AIP Conf. Ser. 2012. **1488**. P. 110.
- [15] Man'ko M. A. // Phys. Scr. 2013. **153T**. P. 110.
- [16] Man'ko M. A., Man'ko V. I. // J. Phys. Conf. Ser. 2013. **442**. 012008.
- [17] Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Entropy. 2015. **17**. P. 2876.
- [18] Man'ko M. A. // J. Phys. Conf. Ser. 2018. **1071**. 012015.
- [19] Lopez-Saldivar J. A., Castanos O., Nahmad-Achar E. // Entropy. 2018. **20**. P. 630.
- [20] Lopez-Saldivar J. A., Castanos O., Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Entropy. 2019. **21**. P. 736.
- [21] Lopez-Saldivar J. A., Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Entropy. 2020. **22**. P. 586.
- [22] Lopez-Saldivar J. A., Castanos O., Man'ko M. A., Man'ko V. I. // Quantum Inform. Process. 2019. **18**. P. 210.

## Information-entropy inequalities for pure states of quantum systems in the probabilistic representation of quantum mechanics

A. P. Bykov<sup>1,a</sup>, V. I. Man'ko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology  
Moscow Region, 141701, Dolgoprudny*

<sup>2</sup>*P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences  
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>bykov.ap@phystech.edu, <sup>b</sup>manko@sci.lebedev.ru*

Due to the rapid development of technologies, more and more experiments are being carried out every year in the field of quantum optics, quantum computing and cryptography, therefore the relevance of works on quantum information theory is beyond doubt. In this paper, we studied information-entropy inequalities for pure states of quantum systems, and, in particular, considered inequalities for a one-dimensional harmonic quantum oscillator. A symplectic quantum tomogram of pure states in the probabilistic representation of quantum mechanics is obtained. The tomographic Shannon entropy is introduced and new expressions for the tomographic entropy of pure states of a one-dimensional quantum harmonic oscillator are obtained, as well as exact expressions for the ground and first excited states depending on the actual parameters, a shift in the first excited state by the Euler–Mascheroni constant is obtained. Numerical methods were also considered for obtaining approximate values of the tomographic entropy of the second and third excited states, at fixed parameters. The expected growth of the tomographic entropy with an increase in the level was obtained depending on the actual parameter. The approach presented in the course of this work can be extended to the question of the entropy of arbitrary Fock states, as well as coherent states of a parametric quantum oscillator. This direction of research is of interest and will be developed in future works.

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ca.

*Keywords:* quantum information theory, quantum mechanics, entropy, pure states, oscillator, Wigner function, tomogram.

*Received 30 January 2021.*

### Сведения об авторах

1. Быков Александр Павлович — студент; email: bykov.ap@phystech.edu.
2. Манько Владимир Иванович — доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; email: manko@sci.lebedev.ru.