Объяснение появления обратных волн Лэмба с помощью сетки Миндлина

В. Г. Можаев[1],* И. А. Недоспасов[2]†
[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
[2]*Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН*
Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
(Статья поступила 22.08.2020; Подписана в печать 06.01.2021)

Возникновение обратных волн Лэмба в изотропных пластинах объяснено и количественно описано с позиций теории связанных мод. Рассматриваемые волны интерпретируются как результат усиленного взаимодействия продольных и поперечных парциальных волн, входящих в решение для пластины. Усиление происходит за счет фазового синхронизма, достигаемого при пересечении дисперсионных кривых для несвязанных парциальных волн. Несвязанные моды существуют, если на поверхностях пластины выполнены искусственные граничные условия Миндлина. Реальные условия свободной поверхности приводят к связи мод и расталкиванию их пересекающихся характеристик. Обнаружено, что обратные волны возникают в окрестности пересечений дисперсионных кривых несвязанных мод Миндлина, если они находятся рядом с осью нулевых значений волновых векторов мод Лэмба. Точки пересечений согласно результатам проведенного исследования могут лежать как в области действительных решений дисперсионных уравнений, так и в области мнимых, при том что сами обратные волны описываются чисто действительными решениями. В приближении малых значений волновых векторов развита теория связанных мод, позволяющая аналитически и с хорошей точностью вычислять дисперсионные кривые для обратных волн. Теория объясняет, почему близость друг к другу толщинных резонансов продольных и поперечных волн в пластинах способствует появлению изучаемых волн. Понятным становится и то, почему в действительной области спектра расталкивание связанных кривых происходит в направлении частотной оси, а в мнимой — вдоль оси волновых векторов.

PACS: 43.20.+g. УДК: 534-16.
Ключевые слова: акустические моды пластин, обратные волны, волны Лэмба, изотропные пластины, сетка Миндлина.

ВВЕДЕНИЕ

Обратные волны отличаются от обычных противоположными направлениями фазовой скорости и интегрального потока энергии. Они продолжают привлекать значительное внимание в различных областях физики благодаря своим необычным свойствам (см., в частности, статью [1] и цитированные в ней публикации). В акустике обратными волнами, как известно, могут быть моды Лэмба упругих пластин. В изотропных пластинах такие свойства могут проявляться в относительно узких частотных диапазонах вблизи точек рождения и отсечки высших мод. В литературе имеются данные о значениях материальных параметров изотропных сред, обеспечивающих существование этих волн [2]. На качественном уровне обсуждалась причина возникновения обратных волн, и на основании численных расчетов был сделан вывод, что близость друг к другу частот толщинных резонансов, соответствующих объемным волнам разной поляризации, способствует появлению обсуждаемых волн [3]. Однако объяснение данного условия до сих пор отсутствует. В настоящей работе предложена простая и наглядная интерпретация появления обратных волн Лэмба как эффекта пересечения и возникающего вследствие него расталкивания несвязанных волноводных мод Миндлина. Такие моды в пластинах соответствуют специальным искусственным граничным условиям, предложенным в [4, 5]. Выявлено ранее неизвестное и неочевидное свойство, заключающееся в том, что пересечения несвязанных дисперсионных кривых даже в области мнимых значений волновых векторов оказывают влияние и могут приводить к появлению обратных волн в спектре действительных значений. На основе анализа взаимодействия связанных мод построена количественная аналитическая теория появления изучаемых волн в изотропных пластинах.

1. СВЯЗЬ ОБРАТНЫХ ВОЛН С ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ НА СЕТКЕ МИНДЛИНА

1.1. Дисперсионные уравнения для волн Лэмба

Дисперсионные уравнения для симметричных и антисимметричных упругих волн в изотропных пластинах, которые принято называть сейчас модами Лэмба, были выведены при решении двумерной задачи первоначально Рэлеем в 1889 г. для случая стоячих волн [6], а в случае бегущих волн — Лэмбом в 1917 г. [7]. Для дальнейшего анализа эти уравнения удобно предста-

*E-mail: vgmozhaev@mail.ru
†E-mail: ianedospasov@mail.ru

вить в виде

$$[\mathrm{tg}(Sd)/\mathrm{tg}(Qd)]^{\pm 1} = -\frac{4k^2QS}{(k^2-S^2)^2}, \qquad (1)$$

где $Q^2 = k_l^2 - k^2$, $S^2 = k_t^2 - k^2$, $k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$, d — полутолщина пластины, c_l и c_t — скорости продольной и поперечной объемных волн в материале пластины, ω и k — циклическая частота и волновое число мод пластины. Знак плюс в степени левой части (1) соответствует симметричным волнам, а знак минус — антисимметричным. Длина пластины считается неограниченной. В основном мы следуем тем же или близким обозначениям переменных, что использованы в классической монографии [8].

Трансцендентные уравнения (1) имеют компактный и обманчиво простой вид. Тем не менее, они описывают довольно сложный спектр, состоящий из множества мод с немонотонным и осциллирующим поведением дисперсионных кривых. Спектр этот и его особенности трудно понять и объяснить без проведения специального анализа. Существенный прогресс в понимании свойств решений уравнений (1) был достигнут благодаря исследованиям Миндлина [4, 5] и его построениям вспомогательных кривых, известных как сетка Миндлина. Справедливости ради, здесь следует упомянуть и имена предшествующих исследователей — R. W. Morse (1950) и A. N. Holden (1951), на обобщении результатов которых базировались построения Миндлина. Заслуживают упоминания и имена учеников Миндлина (M. Onoe, M. A. Medick), совместно с которыми он занимался обсуждаемыми построениями. Еще раньше (в 20–30 гг. прошлого века) похожий подход представления сложного спектра как результат связи упрощенных мод использовался рядом авторов при изучении колебаний пьезокристаллических резонаторов.

Уравнения (1) можно вывести не только путем решения волновых уравнений, как это было сделано Рэлеем и Лэмбом, но и лучевым методом. При этом в них войдут коэффициенты отражения и трансформации объемных продольной и поперечной волн, наклонно падающих на свободную границу изотропного полупространства [9]. В частности, правая часть (1) может быть выражена через корень произведения коэффициентов трансформации. Один из множителей под корнем — коэффициент трансформации падающей продольной волны в отраженную поперечную, другой наоборот — падающей поперечной в отраженную продольную. При нормальном падении оба коэффициента, как и их произведение, равны нулю. В случае малых отклонений волновых векторов от нормали к поверхности, соответствующих окрестности толщинных резонансов, коэффициенты трансформации близки к нулю. Мала тогда и правая часть уравнений (1). Это приближение использовано далее в разд. 2 для вывода уравнения связанных мод.

1.2. Сетка Миндлина

Реальные граничные условия для волн Лэмба на свободной поверхности изотропной пластины включают в себя обращение в ноль нормальных компонент тензора упругих напряжений. На компоненты смещения при этом ограничений не налагается. И тех, и других компонент, неравных нулю в объеме среды, для двумерной задачи по две. Миндлин исследовал особые случаи искусственных граничных условий, в которых обращается в ноль только одна нормальная компонента тензора упругих напряжений, а также одна компонента вектора смещений [4, 5]. Удачный выбор пары таких смешанных граничных условий приводит к равенству нулю коэффициентов трансформации объемных волн при отражении от границы для любых углов падения. Тогда и правая часть (1) тождественно равна нулю, а нулевая левая дает совсем простой спектр несвязанных волноводных мод, состоящих только из продольных или только из поперечных объемных волн. Каждому из двух последних вариантов соответствует своя пара смешанных граничных условий.

Дальнейший анализ, проведенный Миндлиным [4, 5], показал следующее. Вдали от точек пересечения кривых упрощенного спектра точные решения близки к приближенным. Причем в точках пересечения этих кривых, если они относятся к модам противоположной симметрии, точные и приближенные решения в точности совпадают друг с другом. А вблизи от точек пересечения, относящихся к модам одинаковой симметрии, отклонения точных решений от приближенных максимальны. Такое поведение качественно можно интерпретировать как расталкивание связанных кривых с плавным переходом с одной несвязанной ветви на другую вблизи точек пересечения. Спектр несвязанных дисперсионных кривых с их многочисленными пересечениями для высших мод в литературе принято называть сеткой или решеткой Миндлина [10]. Линии сетки определяют верхние и нижние границы допустимых значений дисперсионных характеристик для каждой из мод Лэмба. Сетку легко построить графически, а из нее становится понятным и предсказуемым поведение кривых, описываемых точными решениями уравнений (1).

1.3. Обратные волны

Численное исследование решений дисперсионных уравнений (1) привело к обнаружению в 1957 г. необычных волн Лэмба, у которых фазовая скорость c и групповая $c_{gr} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ имеют противоположные направления [11]. Данное свойство означает, что движение фазового фронта в таких волнах происходит в направлении, противоположном по отношению к их среднему по времени, интегральному по толщине пластины потоку энергии. Последнее утверждение следует из равенства групповой скорости и скорости переноса энергии, равной отношению средних по времени, интегральных по толщине пластины потока энергии и полной энергии. Это равенство легко доказывается для упругих мод бездиссипативных пластин [12].

В настоящее время интерес к обратным волнам различной природы возродился и существенно возрос в связи с исследованиями свойств метаматериалов, а также перспективами использования ультразвуковых обратных волн и волн с нулевой групповой скоростью в неразрушающем контроле и в устройствах обработки сигналов.

Следует отметить, что обратные волны в упругих пластинах имеют принципиальное отличие от называемых тем же термином распределенных электромагнитных колебаний в лампе обратной волны. Этот электровакуумный СВЧ-прибор был разработан и стал применяться в качестве генератора или усилителя в 50-е гг. прошлого века. Его конструктивной особенностью является наличие замедляющей периодической структуры, приводящей к взаимным отражениям и связи волн, бегущих во встречных направлениях. Пространственный спектр волновых полей в такой структуре включает в себя обязательно как прямые, так обратные пространственные гармоники. Однако гармоники эти не являются собственными модами периодических структур — они не существуют независимо друг от друга и не возбуждаются по отдельности, хотя поток электронов и может преимущественно взаимодействовать только с одной из них. С другой стороны, обратные волны в упругих пластинах являются собственными волноводными модами и при их возбуждении могут распространяться только в одном заданном направлении. Следствием указанного отличия обсуждаемых волн друг от друга является то, что и объяснение причин их возникновения тоже совсем разное. В случае лампы обратной волны — это отражения в периодической замедляющей конструкции. В случае однородных пластин причина появления обратных волн гораздо менее очевидна, и ее выяснению и посвящено предлагаемое вниманию читателей исследование.

Ранее в ряде статей об обратных модах оптических и упругих волноводов отмечалась важность близости друг к другу резонансов разных типов как условия, способствующего появлению обратных волн. В [13], например, приведены четыре качественных наброска для пояснения изменений в характере кривых при сближении соседних оптических резонансов в общем случае. Но полученные в этой статье численно два графика относятся к разным геометриям и поэтому убедительным подтверждением описываемого поведения не являются. В [3] представлены рисунки с результатами численных решений уравнений (1) с таким же, что и в [13], комментарием о расталкивании кривых. Аналогичные исследования с таким же заключением проводились в более ранних работах об обратных волнах в электромагнитных волноводах [14, 15]. Объяснение причины расталкивания связанных кривых, также как и идентификация несвязанных кривых и определение точек их пересечений во всех упомянутых статьях отсутствуют. Ниже мы используем для этой цели сетку Миндлина, до сих пор при анализе обратных волн Лэмба не применявшуюся.

1.4. Связь обратных волн с сеткой Миндлина

В статьях Миндлина [4, 5] представлен график спектра волн Лэмба, сравниваемого со спектром искусственно несвязанных продольных и поперечных волноводных мод. В принципе он уже мог бы служить достаточным основанием для следующего нашего вывода. Появление обратных волн является следствием пересечения кривых для несвязанных волн, приводящего к расталкиванию связанных. Однако до сих пор на эту взаимосвязь никто внимания не обращал. Обсуждаемый график в [4, 5] относится к значению коэффициента Пуассона 0.31. В поисках наиболее наглядной и очевидной формы представления для сделанного нами вывода мы провели собственные расчеты дисперсионных кривых при разных значениях упругих модулей, но в тех же осях, что и на обсуждаемом графике Миндлина. На рис. 1 представлены результаты одного из таких расчетов, относящегося к пластине из материала с отношением скоростей объемных волн $c_l/c_t = 1.7$, что соответствует значению коэффициента Пуассона около 0.24.

Из рисунка видно, что если пересечение несвязанных кривых происходит вблизи оси нулевых значений волнового вектора k, то расталкивание кривых из-за их связи граничными условиями оказывается достаточно сильным возмущением, чтобы вызвать появление обратных волн. См. пересечение, обведенное кружком, в правой части рисунка. Обратным волнам здесь соответствуют ветви, спадающие при удалении от вертикальной оси. Неожиданным оказался тот факт, что пересечение несвязанных кривых даже в области мнимых k способствует появлению обратных волн в области действительных k. См. пересечение, обведенное кружком в левой части рисунка, и уходящую от точки пересечения вправо нижнюю кривую. Эта кривая в области действительных значений k имеет спадающий участок, означающий трансформацию решения в обратные волны.

В итоге на основании наших наблюдений и численных расчетов можно сделать вывод о том, что пересечения несвязанных кривых сетки Миндлина, происходящие в областях как действительных, так и мнимых малых значений k, вызывают расталкивание связанных кривых и появление обратных волн. Точки пересечения спектральных кривых означают для несвязанных мод выполнение условия фазового синхронизма, которое обеспечивает наиболее сильное взаимодействие этих мод при включении их связи.

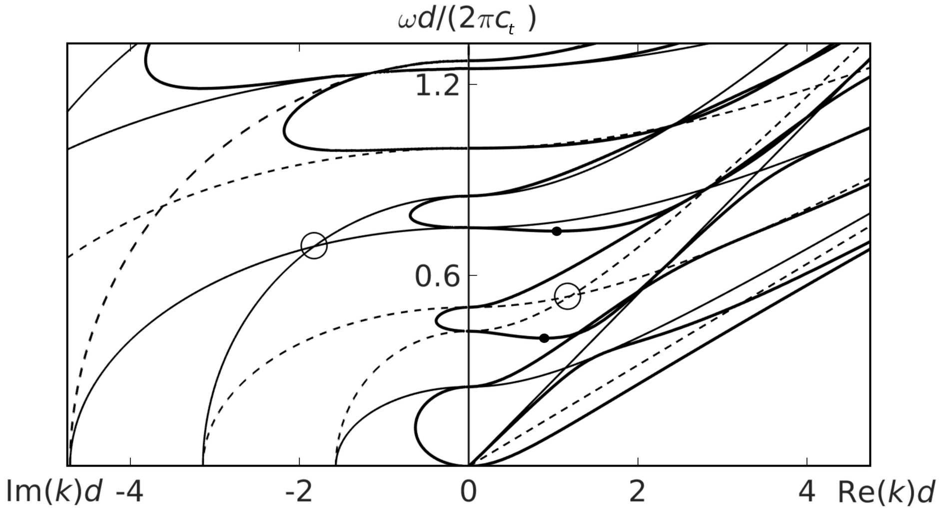

Рис. 1: Дисперсионные характеристики (зависимости частоты от волнового числа) для низших мод Лэмба в изотропной пластине с отношением скоростей объемных волн $c_l/c_t = 1.7$. Сплошные толстые кривые — точное решение дисперсионных уравнений. Тонкие кривые — сетка Миндлина для продольных волн (сплошные линии) и для поперечных волн (пунктирные линии). Обратным волнам соответствуют спадающие участки дисперсионных кривых. Их левые границы совпадают с вертикальной осью нулевых значений волнового числа k, а правые — с минимумами кривых, отмеченными точками

2. ВЫВОД И АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ МОД

Заключение о причине появления обратных волн Лэмба в изотропных пластинах, сформулированное в конце предыдущего раздела, носит качественный характер, но на его основе может быть развита и количественная теория. С этой целью в данном разделе выводятся приближенные уравнения связанных мод. Вывод основан на асимптотическом представлении точных дисперсионных уравнений вблизи точек соседних толщинных резонансов.

Левую часть уравнений (1) с помощью формулы $\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{tg}(\alpha - \pi/2)$ можно свести к произведению тангенсов. При толщинных резонансах правая часть (1) обращается в ноль, поэтому должны равняться нулю один, либо другой тангенс из левой части. Отсюда находим значения аргументов тангенсов $Qd = \pi\bar{m}$, $Sd = \pi\bar{n}$, где $\bar{m} = m + 1/2$, $\bar{n} = n$ для симметричных волн Лэмба, и $\bar{m} = m$, $\bar{n} = n + 1/2$ для антисимметричных, m и n — целые положительные числа, либо ноль. Изменение аргумента тангенса на произвольное целое число его периода, равного π, не меняет величины этой функции. Поэтому уравнения (1) в общем случае можно представить в эквивалентной форме через приведенные значения аргументов тангенсов

$$\mathrm{tg}(Sd - \pi\bar{n})\,\mathrm{tg}(Qd - \pi\bar{m}) = -\varepsilon, \tag{2}$$

где через ε обозначена правая часть (1). Вблизи резонанса, соответствующего вычитаемым из аргумента тангенса нескольким его периодам, величина приведенного аргумента, как и сам тангенс, малы, что позволяет заменить тангенс его приведенным аргументом. В случае близости двух соседних резонансов, соответствующих продольным и поперечным волнам, оба тангенса в (2) можно заменить их аргументами. Итогом является искомое уравнение связанных волн

$$(Sd - \pi\bar{n})(Qd - \pi\bar{m}) = -\varepsilon, \tag{3}$$

в котором ε играет роль коэффициента связи.

Приближенное дисперсионное уравнение (3) можно использовать для нахождения трех разных переменных — частоты ω, волнового числа k и толщины пластины $h = 2d$. Уравнение относительно h оказывается более простым, чем уравнения для двух других переменных, поскольку представляет собой обычное квадратное уравнение. В то же время вывод полиномиальных уравнений для ω и k требует еще дополнительных разложений. Покажем, что обсуждаемое уравнение для h позволяет разработать и реализовать простую аналитическую процедуру построения дисперсионных кривых для обратных волн без использования итерационных расчетов.

Частоты толщинных резонансов Ω_l для продольных волн и Ω_t для поперечных находятся из приведенных выше условий и имеют следующие значения

$$\Omega_l = 2\pi\bar{m}c_l/h, \quad \Omega_t = 2\pi\bar{n}c_t/h. \tag{4}$$

Каждый из данных спектров резонансных частот по отдельности является эквидистантным. Однако периоды у них разные, поскольку определяются несоразмерными в общем случае по отношению друг к другу скоростями продольных и поперечных волн. В силу этого частотные интервалы между соседними резонансами для волн разной поляризации в суммарном спектре могут быть малы или даже равны нулю. Именно эта ситуация наиболее интересна, поскольку благоприятствует появлению обратных волн, и она будет изучена с помощью уравнения (3).

Обозначим нижнюю из двух соседних и близких резонансных частот, определяемых формулами (4), через Ω, а соответствующую им толщину пластины через H. Данные значения будем рассматривать в качестве начальных при построении в их окрестности дисперсионных кривых. На резонансной частоте Ω фазовая скорость волн Лэмба c равна бесконечности, а волновое число $k = 0$. Допустим далее, что k получило малое конечное приращение K в условиях сохранения начальной частоты Ω. Такая ситуация возможна в случае изменения толщины пластины, переменное значение которой обозначаем через h. Фазовая скорость c тогда станет конечной

$$c = \Omega/K. \tag{5}$$

Значение h, соответствующее таким изменениям, найдем по заданным Ω и K с помощью квадратного по h уравнения (3)

$$h = (QS)^{-1}\left(\Sigma \pm \sqrt{\Delta^2 - 4\varepsilon QS}\right), \tag{6}$$

где $\Sigma = \pi(Q\bar{n} + S\bar{m})$, $\Delta = \pi(Q\bar{n} - S\bar{m})$, $Q = \sqrt{\Omega^2/c_l^2 - K^2}$, $S = \sqrt{\Omega^2/c_t^2 - K^2}$. Воспользуемся далее тем, что фазовая скорость волн Лэмба зависит только от произведения ωh, а не от отдельных сомножителей. Это позволяет найти частоту ω,

$$\omega = \Omega h/H, \tag{7}$$

при которой достигается конечная скорость, определяемая формулой (5), но толщина пластины остается равной исходному значению H. Сохранение скорости в условиях изменения частоты требует и пропорционального изменения волнового числа. Поэтому вместо K теперь должно использоваться значение

$$k = Kh/H. \tag{8}$$

В результате этих действий задача нахождения функциональной зависимости $\omega = \omega(k)$ сводится к ее параметрическому представлению $\omega = \omega(K)$, $k = k(K)$ через вспомогательный параметр, роль которого играет произвольное, но малое приращение K.

На рис. 2 представлено сравнение точных численных решений уравнений (1) и приближенных кривых, построенных по формулам (6)–(8). Расчеты относятся к случаю двух близких по частоте отсечки симметричных мод Лэмба с номерами $m = 0$, $n = 1$ в пластине с $c_l/c_t = 1.9$. Из рисунка видно, что для спадающей части дисперсионной ветви, соответствующей обратным волнам, приближенная кривая хорошо согласуется с точным численным расчетом.

Оценка поведения решения уравнения (3) в предельном случае $\omega \to \Omega$, $k \to 0$ позволяет дать ответ на вопрос, существуют или нет обратные волны вблизи низшей из двух близких резонансных частот. Если разность $\Delta\Omega$ соседних частот мала, но конечна, то один из множителей в левой части (3), соответствующий верхней резонансной частоте, можно оценить в нулевом приближении при $\omega = \Omega$, $k = 0$. Тогда этот множитель принимает вид

$$-\Delta\Omega H/(2c_+), \tag{9}$$

где c_+ скорость объемных волн для верхней резонансной частоты. Другой множитель, соответствующий нижней резонансной частоте, пропорционален малым отклонениям и приближенно равен

$$\left(\omega - \Omega - \frac{k^2c_-^2}{2\Omega}\right)\frac{H}{2c_-}, \tag{10}$$

где c_- скорость объемных волн для нижней резонансной частоты.

Разложение по малым параметрам правой части (3) упрощается тем, что в нее входит малый множитель k^2. Поэтому остальные множители достаточно оценить в нулевом приближении, что дает

$$-\varepsilon = \frac{4k^2c_t^3}{\Omega^2 c_l}. \tag{11}$$

Итогом этих оценок является простая параболическая связь между отклонением частоты от точки нижнего резонанса и волновым вектором. В случае, когда нижний резонанс соответствует поперечным волнам, эта связь имеет вид

$$\omega - \Omega_t = \left[1 - \frac{8}{(\pi\bar{n})^2\,(|\Delta\Omega|/\Omega_t)}\right]\frac{c_t^2}{2\Omega_t}k^2. \tag{12}$$

К случаю нижнего резонанса на продольных волнах относится выражение

$$\omega - \Omega_l = \left[1 - \frac{8(c_t/c_l)^4}{(\pi\bar{m})^2\,(|\Delta\Omega|/\Omega_l)}\right]\frac{c_l^2}{2\Omega_l}k^2. \tag{13}$$

Из формул (12), (13) следует существование критических значений разности частот, ниже которых коэффициент пропорциональности в параболической связи становится отрицательным. Такой знак приводит к уменьшению частоты с уходом от толщинного резонанса, что свойственно обратным волнам. Данные формулы позволяют предложить следующее простое объяснение и интерпретацию появления этих волн. Вторые слагаемые в квадратных скобках в (12) и (13) пропорциональны асимптотической оценке отношения коэффициента связи ε к тому множителю из левой части (3), который обращается в ноль на верхней резонансной частоте. Согласно (9) он пропорционален разности частот. Указанное отношение входит как поправка из-за наличия связи в дисперсионное уравнение для несвязанной моды Миндлина, относящейся к нижней резонансной частоте. Этой моде соответствует обращение в ноль другого множителя в левой части (3). Если

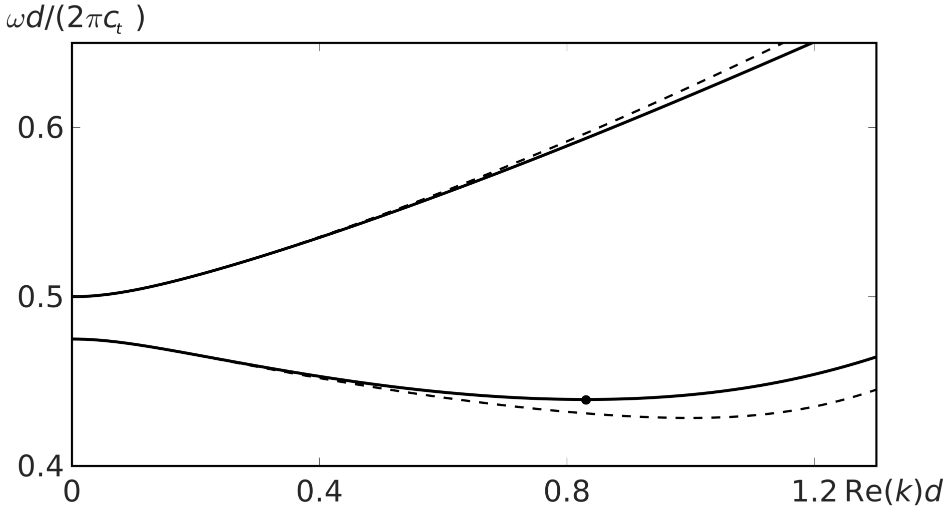

Рис. 2: Дисперсионные кривые для двух близких симметричных мод Лэмба в случае $c_l/c_t = 1.9$, рассчитанные численно (сплошные линии) с помощью точных уравнений (1) и приближенно (штриховые линии) с помощью уравнений (6)-(8). Точкой отмечена правая граница диапазона существования обратной волны

разность частот $|\Delta\Omega|$ велика, то поправка мала и коэффициенты в квадратных скобках в (12), (13) положительны. Обратные волны тогда не возникают. Но при сближении частот влияние даже малого коэффициента связи ε становится все более значительным и способным вызвать изменение знаков коэффициентов параболической аппроксимации, а это и соответствует появлению обратных волн. Отсюда следует вывод, что усиление взаимодействия из-за выполнения условия фазового синхронизма в точках пересечения дисперсионных кривых и является той физической причиной, что вызывает появления обсуждаемых волн.

Следует иметь в виду, что выражения (12), (13) получены в приближении близости соседних резонансных частот, когда $|\Delta\Omega|/\Omega \ll 1$. Но критические значения разности частот, следующие из (12) и (13), не удовлетворяют этому неравенству для мод с малыми номерами $\bar{m}$ и $\bar{n}$. Более точные критические значения можно найти, если приближение близости соседних частот не использовать. Соответствующие разложения уже были получены Миндлиным, и по ним позднее была рассчитана диаграмма областей существования обратных волн для ветвей мод Лэмба разных номеров в средах с разными отношениями c_t/c_l [2]. Тем не менее, из выражений Миндлина и указанной диаграммы не видно, что близость соседних частот оказывает какое-либо влияние на существование обратных волн. Представленные выше решения позволяют понять, что необходимо изменить в форме представления разложений Миндлина, чтобы из них была очевидна важность близости соседних резонансов для появления обратных волн. Для достижения этой цели достаточно заменить выражение (9) на

$$-\mathrm{tg}[|\Delta\Omega|H/(2c_+)].$$

Результатом замены являются модифицированные формулы, аналогичные (12) и (13),

$$\omega - \Omega_t = \left[1 - \frac{8(c_t/c_l)}{(\pi\bar{n})\mathrm{tg}(|\Delta\Omega|H/2c_l)}\right]\frac{c_t^2}{2\Omega_t}k^2 \qquad (14)$$

для случая нижнего резонанса на поперечных волнах и

$$\omega - \Omega_l = \left[1 - \frac{8(c_t/c_l)^3}{(\pi\bar{m})\mathrm{tg}(|\Delta\Omega|H/2c_t)}\right]\frac{c_l^2}{2\Omega_l}k^2 \qquad (15)$$

для случая нижнего резонанса на продольных волнах. Формулы (14), (15) с точностью до обозначений эквивалентны разложениям Миндлина. Но записаны они в измененной форме, из которой в отличие от формул Миндлина видна важность близости частот соседних резонансов для возникновения обратных волн и легко найти соответствующие критические пороговые значения разности частот.

Направление расталкивания кривых (вертикальное — вдоль оси частот, либо горизонтальное — вдоль оси волновых чисел) определяется знаком коэффициента связи ε. В областях действительных и мнимых значений k, обведенных на рис. 1 кружком, данный коэффициент имеет противоположные знаки, что и объясняет ортогональность обсуждаемых направлений в этих областях. Следует отметить, что направление расталкивания кривых и направление перехода с одной несвязанной кривой на другую ортогональны друг другу в каждой из областей. В действительной области расталкивание происходит вдоль вертикальной оси, а переход с кривой на кривую — вдоль горизонтали, но в мнимой области эти направления меняются местами.

Обращает на себя внимание еще и такая особенность изучаемой задачи как отсутствие каких-либо кривых в мнимой области левее точек пересечения несвязанных кривых. Кроме того, для двух низших несвязанных мнимых ветвей наблюдается переход с одной ветви на другую, происходящий в условиях их связи, но без пересечения несвязанных кривых. Данную особенность можно объяснить так. Коэффициент связи ε в уравнении связанных мод (3) не является постоянной величиной, а квадратично растет с k. Влияние этого коэффициента на спектр связанных мод определяется его отношением к разности частот. Следовательно, оно резко нарастает при изменении k от нуля до значения в точке пересечения. За точкой пересечения влияние связи могло бы уменьшиться из-за роста разности частот. Однако этому препятствует квадратичный рост ε с k. В результате мнимые решения дисперсионных уравнений, трансформировавшиеся в комплексные при конечном смещении k влево от нуля, при дальнейшем движении влево на рис. 1 из комплексной области на мнимую ось k больше уже не возвращаются.

Интересно отметить, что противоположную ситуацию, характерную для обычного расталкивания связанных кривых, все же можно наблюдать в мнимой части спектра, но не для волн Лэмба, а для чисто сдвиговых волн в пластинах пьезоэлектриков класса $6mm$ и 6∞. Указанный спектр в пьезоэлектриках был рассчитан в статье [16] и воспроизведен в монографии [12]. Но в отличие от [16] в [12] спектральные линии для симметричных и антисимметричных мод представлены раздельно на двух рисунках 10.59, 10.60 и с важным дополнением — сеткой несвязанных кривых для акустических и электростатических мод. Из этих рисунков видно, что для сдвиговых волн в противоположность волнам Лэмба мнимые решения существуют с обеих сторон от точек пересечения несвязанных кривых. Объяснить это можно тем, что коэффициент связи для сдвиговых мод пьезоэлектрических пластин растет с k по линейному, а не квадратичному закону, т.е. не так быстро, как для волн Лэмба.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Близость друг к другу толщинных резонансов для продольных и поперечных объемных волн, соответствующих точкам рождения и отсечки высших мод, известна и обсуждалась в литературе как необходимое условие возникновения обратных волн Лэмба в изотропных пластинах [3]. Тем не менее, простого и наглядного объяснения этому условию в предшествующих публикациях до сих пор нет. Представления и теория о расталкивании связанных кривых вблизи точек пересечения несвязанных, развиваемые в настоящей работе для случая волн Лэмба на основе приближений Миндлина, дают простое и наглядное объяснение, а также количественное описание как указанного условия, так и причины появления обратных волн Лэмба в целом.

Для обратных волн разработан аналитический способ построения дисперсионных кривых. Способ основан на том факте, что обратные волны возникают в области, где два соседних толщинных резонанса для продольных и поперечных волн по частоте близки друг к другу. При выполнении этого условия оба тангенса, входящих в дисперсионные уравнения, могут быть заменены их аргументами. Такое разложение тригонометрических функций приводит к простому квадратному уравнению для толщины пластины как функции частоты и волнового числа. Это уравнение, наряду с использованием неизменности фазовой скорости волн Лэмба при сохранении величины произведения частоты на толщину, дает возможность разработать и реализовать простую аналитическую безитерационную процедуру построения дисперсионных кривых для волн Лэмба, включая участок существования обратных волн.

С общей точки зрения обсуждаемая геометрическая перестройка спектра волноводных мод может интерпретироваться как гибридизация несвязанных волн при наличии их связи. Как показывает проведенный анализ, результатом такой гибридизации может стать связанная мода, обладающая характеристиками, абсолютно несвойственными исходным несвязанным волнам. В более широком смысле это предполагает возможность приобретения связанными системами различной природы свойств, отсутствующих у образующих их несвязанных подсистем. Такая ситуация может стать реальной в том случае, когда исходные несвязанные подсистемы близки друг к другу по одному из своих параметров. Этим параметром в рассмотренной выше задаче является частота толщинного резонанса, а несвязанными подсистемами — моды Миндлина. Примером такой ситуации, вероятно, могли бы служить и известные аномалии потомства, возникающие при размножении биологических популяций в условиях близкородственных связей [17]. Если данная аналогия уместна, то она, по-видимому, могла бы быть основанием для применения математических моделей связанных систем, аналогичных использованной выше, для описания упомянутых аномалий в биологических популяциях.

Работа И. А. Недоспасова частично поддержана грантами РНФ 20-79-00342 и РФФИ № 19-02-00682 А, а также грантом Минобрнауки РФ.

[1] *Laurent J., Royer D., Prada C.* // J. Acoust. Soc. Amer. 2020. **147**, N 2. P. 1302.

[2] *Mindlin R. D.* An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. Fort Monmouth, N.J.:

U.S. Army Signal Corps Engineering Laboratories, 1955; *Shuvalov A.L., Poncelet O.* // Int. J. Solids Struct. 2008. **45**, N 11-12. P. 3430.

[3] *Prada C., Clorennec D., Royer D.* //J. Acoust. Soc. Amer. 2008. **124**, N 1. P. 203.

[4] *Mindlin R.D.* Mathematical theory of vibrations of elastic plates. / In: Proceedings of 11th Annual Symposium on Frequency Control. Fort Monmouth, N.J.: U.S. Army Signal Engineering Laboratories, 1957. P. 1.

[5] *Mindlin R.D.* Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. / In: Structural Mechanics. Eds *J.N. Goodier, N.J. Hoff.* Oxford: Pergamon Press, 1960. P. 199.

[6] *Rayleigh L.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1889. **20**, N 357. P. 225.

[7] *Lamb H.* // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1917. **93**, N 648. P. 114.

[8] *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.

[9] *Tolstoy I., Usdin E.* // Geophysics. 1953. **18**, N 4. P. 844.

[10] *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981.

[11] *Tolstoy I., Usdin E.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. **29**, N 1. P. 37.

[12] *Auld B.A.* Acoustic Fields and Waves in Solids. V.2. New York et al.: Wiley, 1973.

[13] *Ibanescu M., Johnson S.G., Roundy D., Luo C., Fink Y., Joannopoulos J.D.* // Phys. Rev. Lett. 2004. **92**, N 6. 063903.

[14] *Clarricoats P.J.B.* // Proc. IEE. 1963. **110**, N 2. P. 261.

[15] *Waldron R.A.* // Proc. IEE. 1964. **111**, N 10. P. 1659.

[16] *Bleustein J.L.* // Appl. Phys. Lett. 1968. **13**, N 12. P. 412.

[17] *Vilas R., Ceballos F.C., Al-Soufi L., Gonzalez-Garcia R.* et al. // Ann. Hum. Biol. 2019. **46**, N 7-8. P. 553.

An explanation of the origin of backward Lamb waves using the Mindlin's grid

V.G. Mozhaev[1,a], **I.A. Nedospasov**[2,b]

[1]*Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*
Moscow 119991, Russia
[2]*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, RAS*
Moscow 125009, Russia
E-mail: [a]*vgmozhaev@mail.ru,* [b]*ianedospasov@mail.ru*

The origin of backward Lamb waves in isotropic plates is explained and quantitatively described in terms of coupled-mode theory. The waves under consideration are interpreted as a result of enhanced interaction of longitudinal and transverse partial waves included in the plate solution. The enhancement occurs due to the phase matching achieved at the intersections of dispersion curves for the uncoupled partial waves. The uncoupled modes exist if the artificial Mindlin's boundary conditions are satisfied at the plate surfaces. The real conditions of the free surface lead to the mode coupling and the repulsion of their intersecting characteristics. The backward waves are found to occur in the vicinity of intersections of the dispersion curves of uncoupled Mindlin modes, if they are located near the axis of zero values of the wave vectors of Lamb modes. According to the results of the study, the intersection points may lie in the regions of not only real solutions of the secular equations but imaginary ones also, despite the fact that the backward waves themselves are described by merely real solutions. For small values of the wave vectors, the coupled-mode theory is developed that allows calculations to be performed analytically and with good accuracy for the dispersion curves of backward waves. The theory explains why the proximity to each other of thickness resonances of longitudinal and transverse waves in the plates is favorable for the appearance of backward waves under study. It also becomes clear why the repulsion of coupled curves occurs along the direction of the frequency axis in the real part of spectrum, rather than the axis of wave vectors like in the imaginary spectrum part.

PACS: 43.20.+g.
Keywords: plate acoustic modes, backward waves, Lamb waves, isotropic plates, Mindlin's grid.
Received 22 August 2020.

Сведения об авторах

1. Можаев Владимир Геннадиевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-29-27, e-mail: vgmozhaev@mail.ru.
2. Недоспасов Илья Александрович — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; тел.: (495) 629-36-78, e-mail: ianedospasov@mail.ru.