

Исследование конвекции Бенара–Рэлея методом трассировки частиц

Я. Д. Титовец^{1,*}, А. С. Федотов^{1,†}, С. А. Мовчан², И. А. Балашов², А. А. Макаров², В. В. Чепурнов²
¹Белорусский государственный университет, физический факультет, кафедра компьютерного моделирования
 Беларусь, 220006, Минск, пр. Независимости, д. 4

²Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований,
 лаборатория физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина
 Россия, 141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио–Кюри, д. 6

(Статья поступила 11.10.2020; подписана в печать 14.10.2020)

В работе исследованы фазовые траектории системы с конвекцией Бенара–Рэлея, полученные путем отслеживания идеальных безмассовых частиц в потоке. Скорость каждой частицы в любой момент совпадает со скоростью жидкости в той же точке. Рассматриваемый метод позволяет получить фазовые траектории контрольных объемов жидкости в области решения уравнений Навье–Стокса. Для числа Рэлея $Ra = 2.2 \times 10^5$ установлено наличие двух типов фазовых траекторий, один из которых соответствует вращению вокруг особых точек типа центр и соответствует движению в конвективных валах, а второй соответствует хаотическому движению на границе соседних конвективных валов вблизи холодной и горячей стенок. Проанализировано отличие фазовых портретов системы с конвекцией Бенара–Рэлея при описании уравнениями Навье–Стокса и системой Лоренца.

PACS: 47.55.P, 47.55.pb, 47.10.ad, 05.45.-a

УДК: 533.6.011.32.

Ключевые слова: конвекция Бенара–Рэлея, метод трассировки частиц, уравнения Навье–Стокса, фазовый портрет, система Лоренца.

ВВЕДЕНИЕ

Конвекция Бенара–Рэлея проявляется в формировании устойчивых структур при движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными пластинами при нагреве нижней. Это явление вызывает интерес исследователей как из прикладных [1, 2, 3, 4], так и фундаментальных [5, 6] областей. Наибольший прогресс в описании конвекции Бенара–Рэлея был достигнут с помощью системы уравнений Лоренца [7], что привело к разработке понятия странного аттрактора [8]. При выводе системы Лоренца, однако, используется ряд упрощений [9, 10]: независимость свойств жидкости от температуры (кроме плотности) и сохранение только младших членов в Фурье–представлении функции тока. Возросшие в последние годы вычислительные возможности компьютеров и доступность программных кодов позволяют исследовать динамику конвекции Бенара–Рэлея с помощью уравнений Навье–Стокса, не имеющих вышеуказанных ограничений.

Фазовые портреты для дифференциальных уравнений в частных производных могут быть построены при установлении соответствия между полями скоростей, являющихся решением уравнений, и траекториями некоторых частиц, соотношенных с контрольными объемами жидкости. Для подхода Лагранжа [11, 12] к механике сплошной среды такое соответствие является естественным. Уравнения Навье–Стокса, однако, удобно решать с использованием подхода Эйлера [13], что приводит к необходимости дополнительного инте-

грирования уравнений движения — т. н. трассировки лагранжевых частиц [14].

В настоящей работе рассмотрен подход к изучению динамики конвективного течения Бенара–Рэлея методом трассировки частиц и путем построения фазовых портретов на основании численного решения уравнений Навье–Стокса.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания конвекции Бенара–Рэлея использовалась модель (рис. 1), основанная на системе уравнений Навье–Стокса совместно с уравнением теплопереноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g} \beta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{v} — скорость, P — давление, ρ_0 — плотность жидкости при калибровочной температуре T_0 , ν — коэффициент кинематической вязкости, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения, χ — коэффициент температуропроводности.

В рамках приближения Буссинеска текущая среда считается слабо сжимаемой, таким образом, плотность от температуры зависит линейно:

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta\theta), \quad (2)$$

где ρ — плотность, θ — отклонение температуры от равновесного состояния.

*E-mail: yoscrimmer@gmail.com

†E-mail: fedotov.alexandro@gmail.com

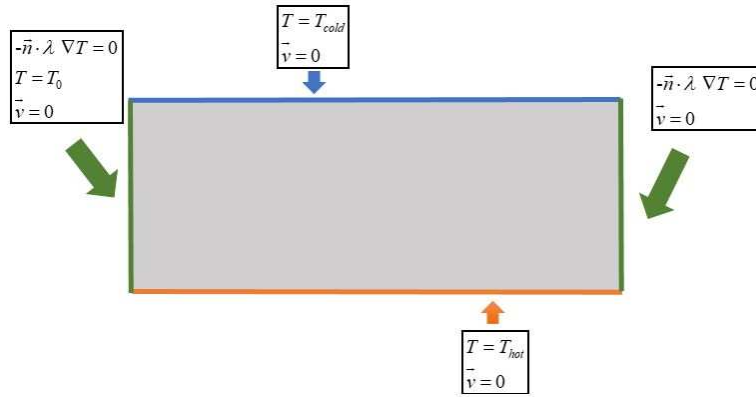


Рис. 1: Постановка начально-краевой задачи для конвекции Бенара-Рэлея

Слагаемое $g\beta T$ в уравнениях Навье-Стокса для импульса (1) описывает влияние силы Архимеда, приводящее к подъему нагретой жидкости в поле силы тяжести [15].

Для формулировки начально-краевой задачи были поставлены следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{cases} T = T_{hot}, & y = 0, & x \in \Gamma, \\ T = T_{cold}, & y = y_{max}, & x \in \Gamma, \\ -\mathbf{n} \cdot \lambda \nabla T = 0, & x = 0, & y \in \Gamma, \\ -\mathbf{n} \cdot \lambda \nabla T = 0, & x = x_{max}, & y \in \Gamma, \\ \mathbf{v} = 0, & (x, y) \in \Gamma, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ T|_{t=0} = T_0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

где Ω — прямоугольная расчетная область, Γ — граница расчетной области, y_{max} — максимальное значение координаты y в расчетной области, x_{max} — максимальное значение координаты x в расчетной области, \mathbf{v} — вектор скорости, \mathbf{n} — нормаль к границе области, λ — коэффициент теплопроводности.

Решение системы уравнений (1) осуществлялось методом конечных элементов. Область поиска решения разбивалась на конечное количество элементов, на каждом из которых решение аппроксимировалось полиномиальной функцией, обращающейся в ноль за его пределами. Коэффициенты аппроксимирующих функций находились из условия равенства значения соседних функций в узлах и соответствия граничным условиям. Для поиска коэффициентов составлялась система линейных алгебраических уравнений, решение которой производилось методом LU-декомпозиции, реализованном в пакете PARDISO [17].

Для дискретизации поля скоростей использовались полиномы второго порядка, для давления и температуры — первого. Такой выбор позволяет рассчитать скорость с погрешностью $O(h^2)$ и давление с температурой с погрешностью $O(h)$.

Сетка, используемая для вычислений, включала порядка 10^4 треугольных элементов, из которых 10^2 элемента были граничными. Пример фрагмента сетки представлен на рис. 2. Вблизи твердых границ сетка сгущалась для увеличения точности моделирования пристеночного слоя.

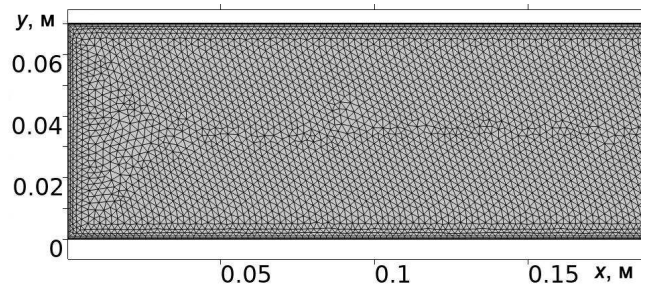


Рис. 2: Фрагмент расчетной сетки

Характеристики материала в расчетной области соответствовали воздуху. Параметры расчетов представлены в табл. 1.

Для построения фазовых портретов необходима информация о траекториях точек в фазовом пространстве. Построить такие наборы траекторий можно с помощью трассировки безмассовых частиц в потоке. В начальный момент времени разместим в расчетной области равномерно 80 000 частиц и будем решать уравнения движения для каждой частицы, используя решение уравнений Навье-Стокса в различные моменты времени t :

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \mathbf{v}(t), \quad (4)$$

где \mathbf{q}_i — координата i -ой частицы, \mathbf{v} — скорость текущей среды, полученная из уравнений (1). Интегрирование по времени осуществлялось методом Дорманда-Принса [19].

Таблица 1: Глобальные параметры модели

Название	Величина	Описание
H_{cell}	0.07 м	Высота расчетной области
AR	1 к 10	Соотношение сторон расчетной области
W_{cell}	H_{cell}/AR	Ширина расчетной области
T_{hot}	298.65 К	Температура нижней границы расчетной области
T_{cold}	293.15 К	Температура верхней границы расчетной области
T_0	293.15 К	Начальная температура

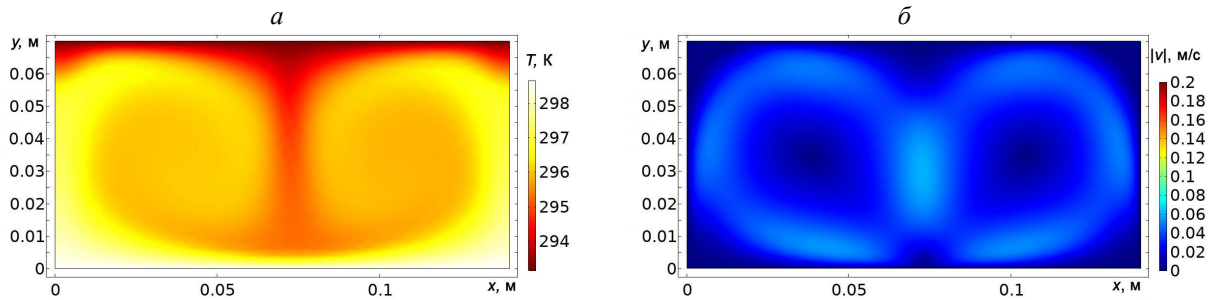
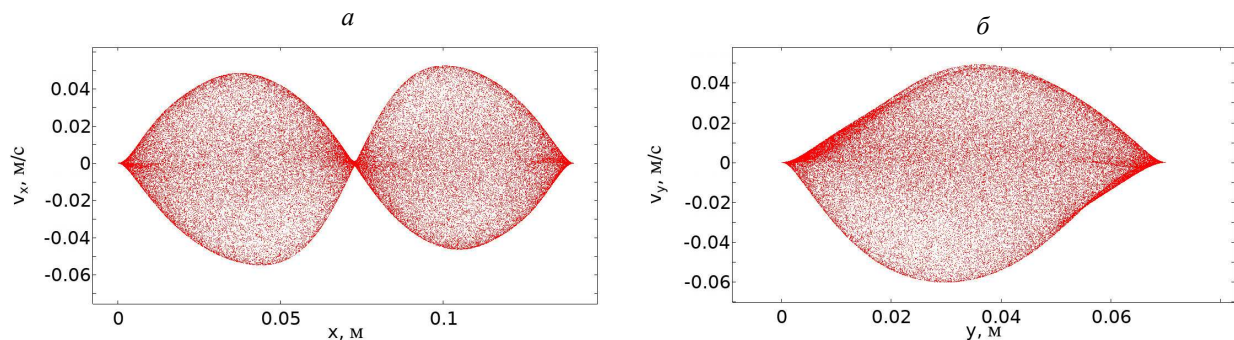


Рис. 3: Пространственное распределение температуры (а) и модуля скорости (б) в установившемся режиме

Рис. 4: Фазовый портрет конвективной ячейки $a - (q_x, p_x)$ и $b - (q_y, p_y)$ в установившемся режиме

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В диапазоне чисел $Ra = 10^2 - 10^6$ картина двумерного течения качественно не изменяется [18], поэтому в дальнейшем приведем результаты для $Ra = 2.2 \times 10^5$, выбранном из соображений быстрого достижения квазистационарного режима ($t_{stat} = 3 \times 10$ с) и отсутствия турбулентного вклада. Как видно из рис. 3, структура установившегося течения типична для конвекции Бенара–Рэлея: наблюдается формирование конвективных ячеек (рис. 3, а) и замкнутых циркуляционных контуров (рис. 3, б).

После достижения установившегося режима в расчетную область помещались частицы, начальные координаты которых равномерно распределялись в пределах области. Фазовые портреты системы в квазистационарном режиме имеют устойчивый характер и постоянную форму огибающей (рис. 4).

Интерес представляет сравнение траекторий частиц в фазовом пространстве с двумерными проекциями аттрактора Лоренца, полученных из системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (5)$$

где σ — число Прандтля, b — параметр, характеризующий геометрию системы, r — отношение числа Ra в системе к значению Ra_c при котором появляются ячейки. Переменная X пропорциональна скорости циркулирующей жидкости, Y характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, Z пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения. Для получения классического вида аттрактора Лорен-

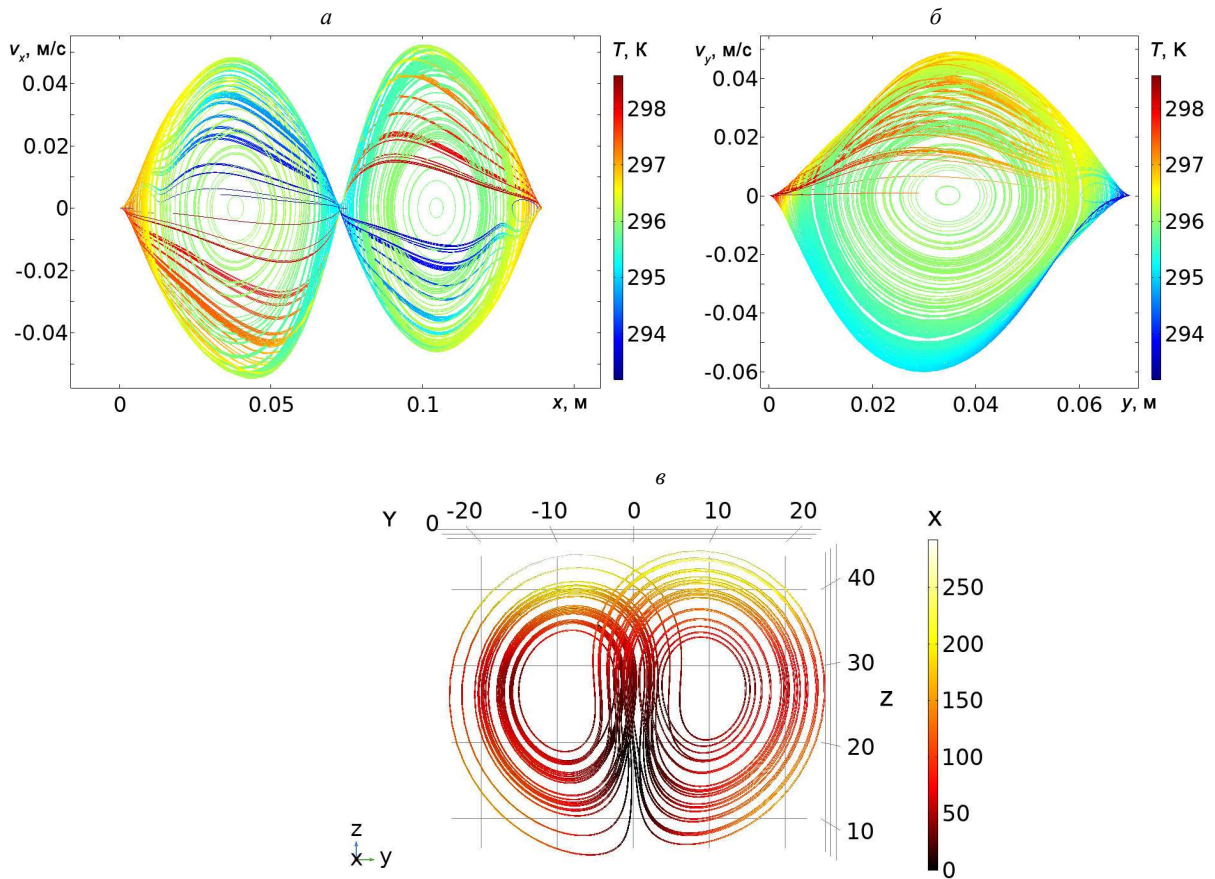


Рис. 5: Фазовые траектории $a - (q_x, p_x)$ и $б - (q_y, p_y)$ в установившемся режиме и проекция YZ фазового пространства аттрактора Лоренца ($в$)

ца параметры были взяты из оригинальной работы [7] и составляли $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

На рис. 5 представлены траектории точек безмассовых частиц в фазовом пространстве и проекция YZ аттрактора Лоренца. В фазовом пространстве системы Лоренца (рис. 5, в) находятся два седло-фокуса, которые разделены устойчивой областью. Вращаясь по спирали вокруг одного из седло-фокусов, фазовая траектория приближается к устойчивой области и с некоторой вероятностью может перейти в окрестность другого седло-фокуса.

В проекции координатно-импульсного фазового пространства (q_x, p_x) исследуемых частиц находятся два центра (рис. 5, а), также разделенных устойчивой областью. Вращение фазовых траекторий вокруг центров в квазистационарном режиме не приводит к переходам траекторий из окрестности одного центра в окрестность другого, несмотря на наличие точки касания внешних траекторий. В координатах (q_y, p_y) наблюдается одиночный центр, внешняя окрестность траекторий которого деформирована.

В системе существуют фазовые траектории, пересекающие траектории большинства частиц, вращающиеся вокруг центров. Как видно из рис. 5, а, б, эти тра-

ектории относятся к частицам, имеющим температуру, близкую к максимальной, либо минимальной температуре системы. Эти частицы в реальном пространстве движутся в пристеночных слоях, и не принадлежат вращающимся с одинаковой угловой скоростью конвекционным валам.

В отличие от траекторий, вращающихся вокруг центров, траектории частиц, относящихся к пристеночным слоям, могут переходить из окрестности одного центра в окрестность другого. При этом переход осуществляется через точку касания внешних траекторий вокруг центров, не пересекая устойчивую область.

Таким образом, имеется различие в типе особых точек, наблюдающихся при описании динамики системы с конвекцией Бенара-Рэлея уравнениями Навье-Стокса (центры) и Лоренца (седло-фокусы). При обоих подходах существуют траектории, которые могут переходить из окрестностей одной особой точки в окрестность другой. В случае описания системы уравнениями Навье-Стокса установлено, что переходить между окрестностями особых точек могут частицы, находящиеся в реальном пространстве в пристеночных слоях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод построения фазовых портретов системы, описываемой уравнениями Навье–Стокса, на основании совместного численного решения методом конечных элементов и уравнений движения безмассовых частиц, скорости которых совпадают со скоростью движения текучей среды.

Построены фазовые портреты системы с конвекцией Бенара–Рэлея при $Ra = 2.2 \times 10^5$. По характеру поведения фазовые траектории можно разделить на две группы. Траектории первой группы частиц указывают на наличие двух особых точек типа центр, разделенных устойчивой областью за исключением точки касания.

Эти траектории относятся к частицам жидкости в конвективных валах с температурой, близкой к средней температуре системы. Траектории второй группы пересекают траектории первой группы и могут переходить из окрестности одного центра в окрестность другого. Траектории второй группы относятся к частицам с температурой близкой к наименьшей и наибольшей в системе, находящимся в пристеночных слоях.

Предложенный метод построения фазовых портретов может быть использован для анализа систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, что существенно расширяет класс задач, подходящих для исследования методами нелинейной динамики.

-
- [1] Лапшин В. Б., Караваева Е. В., Будников А. А. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2000. № 6. С. 56
- [2] Плаксина Ю. Ю., Пуштаев А. В., Винниченко Н. А., Уваров А. В. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2018. № 5. С. 55. (Plaksina Yu. Yu., PushtaeV A. V., Vin-nichenko N. A., Uvarov A. V. // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2018. **73**. P. 513).
- [3] Ayed S. K., Zivkovic P., Tomic M. // *IJOCAAS.* 2017. **3**, № 3. P. 224.
- [4] Lappa M. *Rotating Thermal Flows in Natural and Industrial Processes.* Wiley, 2012.
- [5] Уваров А. В., Осипов А. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1998. № 5. С. 42.
- [6] Боголюбов А. Н., Грушинский А. Н., Мухартова Ю. В., Бельнская О. Е. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2014. № 6. С. 61. (Bogolyubov A. N., Grushinsky A. N., Mukhartova Yu. V., Belenkaya O. E. // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2014. **69**. P. 497.)
- [7] Lorenz E. N. // *J. Atmos. Sci.* 1963. **20**. P. 130.
- [8] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И. // *УФН.* 2005. **175**, № 2. С. 163.
- [9] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.* Наука, 1972.
- [10] Шустер Г. // *Детерминированный хаос: Введение.* Пер. с англ. Мир, 1988.
- [11] Badin, G., Crisciani, F. *Variational Formulation of Fluid and Geophysical Fluid Dynamics – Mechanics, Symmetries and Conservation Laws.* Springer, 2014.
- [12] Shtykov Y. K., Romanov O. G. // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 2018. **21**(2). P. 164.
- [13] Мазо А. Б. *Вычислительная гидродинамика. Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы.* Казанский университет, 2018.
- [14] Yeoh G. H., Tu J. *Computational Techniques for Multiphase Flows.* 2nd Ed. Elsevier Ltd, 2019.
- [15] Фрик П. Г. *Турбулентность — подходы и модели.* Москва: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [16] Кузнецов С. П. *Динамический хаос.* М.: Физматлит, 2001.
- [17] Kourounis D., Fuchs A., Schenk O. *Towards the next generation of multiperiod optimal power flow solvers,* *IEEE Transactions on Power Systems.* 2018. **PP**, N 99. P. 1.
- [18] Angirasa D., Peterson G. P. *Natural convection below a downward facing heated horizontal surface in a fluid-saturated porous medium.* *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications* 1998. **34**:3, P. 301.
- [19] Dokos S. *Numerical Integration of Ordinary Differential Equations.* *Modelling Organs, Tissues, Cells and Devices,* 55–104, 2017.

Study of Benard–Rayleigh convection with the particle tracing method

Y. D. Tsitavets^{1,a}, A. S. Fedotov^{1,b}, S. A. Movchan², I. A. Balashov², A. A. Makarov², V. V. Chepurnov²

¹Department of Computer Modelling, Faculty of Physics, Belarusian State University
Minsk 220007, Belarus

²International Intergovernmental Organization Joint Institute for Nuclear Research,
Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics
Dubna 141980, Moscow Region, Russia

E-mail: ^ayoscrimmer@gmail.com, ^bfedotov.alexandro@gmail.com

We study phase trajectories in a system with Benard-Rayleigh convection computed by tracing of ideal massless particles in a flow. The velocity of each particle at any moment coincides with the speed of the fluid at the same point. The presented method allows to obtain phase trajectories of the fluid control volumes using the solution of the Navier-Stokes equations. For the Rayleigh number $Ra = 2.2 \times 10^5$, the presence of two types of phase trajectories is established, one of which corresponds to the rotation around equilibria centres and is related to the motion inside convective rolls. The second group of particles relates to the

chaotic movement of the hottest and coldest fluid at the boundaries. The difference between the phase portraits of a system with Benard-Rayleigh convection when describing the Navier-Stokes equations and the Lorentz system is analyzed.

PACS: 47.55.P, 47.55.pb, 47.10.ad, 05.45.-a.

Keywords: Benard–Rayleigh convection, particle tracing method, Navier–Stokes equations, phase portrait, Lorentz system.

Received 11 October 2020.

Сведения об авторах

1. Титовец Яна Дмитриевна — мл. науч. сотрудник; тел.: (37529) 868-45-94, e-mail: yoscrimmer@gmail.com.
 2. Федотов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (37529) 577-28-00, e-mail: fedotov.alexandro@gmail.com.
 3. Мовчан Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, нач. сектора.
 4. Балашов Игорь Алексеевич — инженер.
 5. Макаров Александр Анатольевич — инженер-конструктор.
 6. Чепурнов Владислав Викторович — инженер.
-