Уравнение Шрёдингера в фазовом пространстве на основе аппроксимации Власова–Моэля

Е. Е. Перепёлкин[1,2,3,*] Б. И. Садовников[1], Н. Г. Иноземцева[2,3], Е. В. Бурлаков[1,3]
[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
[2]*Университет «Дубна», Россия, 141980, Московская область, Дубна*
[3]*Московский технический университет связи и информатики Москва, 111024 Россия*
(Статья поступила 01.10.2020; подписана в печать 21.10.2020)

В работе проводится сравнительный анализ трех вариантов построения уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве: метод Торреса–Вега, из уравнения Власова и уравнения Моэля. Каждый подход дает свой вариант уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве. Для каждого уравнения рассмотрены точные решения, соответствующие квантовому гармоническому осциллятору.

PACS: 05.20.Dd, 03.65.Wj, 05.30-d УДК: 539.182.
Ключевые слова: уравнение Шрёдингера в фазовом пространстве, уравнение Власова, аппроксимация Власова–Моэля.

ВВЕДЕНИЕ

Особенностью функции Вигнера [1, 2] W как функции квази–плотности вероятностей квантовой системы в фазовом пространстве является наличие отрицательных значений

$$W(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{(\infty)} \exp\left(-i\frac{\mathbf{ps}}{\hbar}\right)\left\langle \mathbf{r}+\frac{\mathbf{s}}{2}\right|\hat{\rho}(t)\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{s}}{2}\right\rangle d^3s\,, \tag{1}$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности, а вектора состояния соответствуют решениям уравнения Шрёдингера. По теореме Хадсона [3] только гауссово распределение функции (1), соответствующее основному состоянию гармонического осциллятора является положительным, в остальных случаях функция Вигнера всегда будет иметь области отрицательных значений.

Построение положительной функции плотности вероятности $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ в фазовом пространстве возможно произвести различными феноменологическими способами [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Приведем пример. Функция Вигнера $W_n(x,p)$ для гармонического осциллятора имеет вид [11]:

$$W_n(x,p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar}e^{-\frac{2}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)}\times \\ \times L_n\left(\frac{4}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\right), \tag{2}$$

где n — номер состояния, а L_n — полиномы Лагерра. В силу построения функции Вигнера выражение (2) удовлетворяет условиям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x,p)\,dp = |\psi_n(x)|^2\,, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x,p)\,dx = \left|\tilde{\psi}_n(p)\right|^2, \tag{3}$$

где ψ_n и $\tilde{\psi}_n$ — волновые функции гармонического осциллятора в координатном и импульсном представлении соответственно:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right), \\ \tilde{\psi}_n(p) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{m\omega}}e^{-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}}H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right), \tag{4}$$

H_n — полиномы Эрмита. Основному состоянию ($n=0$) соответствует функция $W_0(x,p)$, которая является положительной во всей фазовой плоскости. Функции $W_n(x,p)$ при $n>0$ имеют области отрицательных значений. Вместо функций $W_n(x,p)$, $n>0$ рассмотрим функции

$$f_n(x,p) = |\psi_n(x)|^2\left|\tilde{\psi}_n(p)\right|^2, \tag{5}$$

которые являются положительными во всей фазовой плоскости и удовлетворяют условиям (3). Множество функций (5) можно расширить путем добавления к f_n функций $g_n(x,p)$, для которых $\int g_n dp = \int g_n dx = 0$ и $|g_n| < f_n$.

Другим способом построения положительной функции $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ является введение аналога уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве для волновой функции $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, зависящей от координаты и импульса. В этом случае функция $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ представима в виде $|\Psi(\mathbf{r},\mathbf{p},t)|^2 \geq 0$. В работах [12, 13] феноменологическим способом, на основе Бopp–операторов [14],

*E-mail: pevgeny@jinr.ru

было предложено построение уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}_{T-V}\left(x + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = \\ = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V\left(q + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Psi, \tag{6}$$

где $\hat{H}_{T-V}$ — оператор Гамильтона (Torres–Vega), который для гармонического осциллятора имеет вид:

$$\hat{H}_{T-V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^2. \tag{7}$$

Уравнения (6) с гамильтонианом (7) дает решение:

$$\Psi_n(x,p) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar^{n+1}\pi n!\omega^n}}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m}}\right)^n \times \\ e^{-\frac{1}{2\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right) + i\frac{px}{2\hbar}}. \tag{8}$$

Волновым функциям (8) соответствуют функции плотности вероятностей $f_n(x,p)$:

$$f_n(x,p) = |\Psi_n(x,p)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar n!}\varepsilon(x,p)^n e^{-\varepsilon(x,p)}, \\ \varepsilon(x,p) = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right). \tag{9}$$

Заметим, что функции (9) не удовлетворяют условиям (3) даже для основного состояния ($n = 0$).

Целью данной работы является рассмотрение построения аналога уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве из первых принципов. В качестве первого принципа рассматривается закон сохранения вероятностей. Главная мотивация введения волновых функций в фазовом пространстве заключается в том, чтобы расширить математический аппарат бесконечной цепочки уравнений Власова на случай квантовой механики [15]. Кроме того, подобные построения призваны помочь разобраться с природой отрицательных значений функции Вигнера, которая, в свою очередь, сама широко используется в задачах квантовой оптики [11].

Работа имеет следующую структуру. В §1 рассматривается построение уравнение Шрёдингера в фазовом пространстве на основе второго уравнения Власова для функции распределения $f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ [15, 16, 17]. Векторное поле ускорений $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$ по теореме Гельмгольца представляется в виде суперпозиции безвихревого и вихревого поля: $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle = -\alpha_2\nabla_v\Phi_2 + \gamma_2\mathbf{A}_2$. На скалярный потенциал Φ_2 накладывается условие связи с фазой ϕ_2 волной функции $\Psi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$: $\Phi_2 = 2\phi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$. Приводятся выражения для аналогов уравнений Гамильтона–Якоби, уравнений движения сплошной среды относительно векторного поля ускорений $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$, преобразования Лежандра для гамильтониана H_2 и лагранжиана L_2. Строятся точные выражения для волновых функций $\Psi_{2,n}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, соответствующих гармоническому осциллятору. В §2 уравнение Моэля для функции Вигнера рассматривается как частный случай второго уравнения Власова с аппроксимацией Власова–Моэля [18] для векторного поля ускорений $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$. Таким образом, условие $\Phi_2 \sim \phi_2$ (см. §1) заменяется на аппроксимацию Власова–Моэля. Для волновой функции $\Psi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ получается нелинейное уравнение, для которого в §2 получено решение соответствующее гармоническому осциллятору. В заключение проведено сравнение решений трех аналогов уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве для гармонического осциллятора.

1. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Второе уравнение Власова для функции распределения $f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ из бесконечной цепочки уравнений Власова имеет вид [19, 20, 21]:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathrm{div}_r\left[\mathbf{v}f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\right] + \\ + \mathrm{div}_v\left[\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle(\mathbf{r},\mathbf{v},t)f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\right] = 0, \tag{10}$$

или

$$\Pi S_2 = -Q_2 = -\mathrm{div}_v\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle,$$

где

$$S_2 = \mathrm{Ln}f_2,$$
$$\Pi_2 \stackrel{\det}{=} \frac{d_2}{dt} \stackrel{\det}{=} \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla_r) + (\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle,\nabla_v),$$
$$f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \int_{(\infty)}\dot{\mathbf{v}}f_3(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t)\,d^3\dot{v}.$$

Уравнение (10) при интегрировании по пространству скоростей переходит в первое уравнение Власова [19, 20, 22] (аналог уравнения непрерывности) для функции $f_1(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(\mathbf{r},t) + \mathrm{div}_r\left[\langle\mathbf{v}\rangle(\mathbf{r},t)f_1(\mathbf{r},t)\right] = 0, \\ f_1(\mathbf{r},t)\langle\mathbf{v}\rangle(\mathbf{r},t) = \int_{(\infty)}\mathbf{v}f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,d^3v. \\ f_1(\mathbf{r},t) = \int_{(\infty)}f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,d^3v. \tag{11}$$

В работе [22] из уравнения (11) было построено уравнение Шрёдингера для волновой функции $\Psi_1(\mathbf{r},t)$. Построим аналог уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве по второму уравнению Власова (10) [15]. Представим положительную функцию плотности вероятностей $f_2 = |\Psi_2|^2 = \Psi_2\bar{\Psi}_2 \geq 0$, а векторное поле потока вероятностей $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$ разложим по теореме Гельмгольца в пространстве скоростей:

$$\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = -\alpha_2\nabla_v\Phi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \gamma_2\mathbf{A}_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \\ \mathrm{div}_v\mathbf{A}_2 = 0, \tag{12}$$

где α_2, γ_2 — некоторые действительные константы, а Φ_2 — скалярный потенциал поля $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$, а $\mathbf{A}_2$ — вихревая компонента поля $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$. Преобразуем выражение (12)

$$\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle = i^2\alpha_2\nabla_v\Phi_2 + \gamma_2\mathbf{A}_2 = i\alpha_2\nabla_v\left(0 + i\Phi_2\right) + \gamma_2\mathbf{A}_2 = \\ = i\alpha_2\nabla_v\left(\ln\left|\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right| + i\Phi_2\right) + \gamma_2\mathbf{A}_2. \tag{13}$$

Так как функция Ψ_2 является комплексной, то для нее справедлива показательная форма представления в виде:

$$\Psi_2\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right) = \left|\Psi_2\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)\right| e^{i\phi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}, \tag{14}$$

где ϕ_2 — фаза. С учетом (14), функция $\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}$ примет вид:

$$\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2} = e^{i2\phi_2} \Rightarrow \mathrm{Arg}\left[\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right] = 2\phi_2 + 2\pi k \overset{\det}{=} \Phi_2. \tag{15}$$

Таким образом, потенциал Φ_2 поля $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$ в (15) был определен как аргумент комплексной функции $\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}$. Учитывая введенное обозначение (15), перепишем выражение (13), получим:

$$\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle = i\alpha_2\nabla_v\left(\ln\left|\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right| + i\mathrm{Arg}\left[\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right]\right) + \gamma_2\mathbf{A}_2 = i\alpha_2\nabla_v\mathrm{Ln}\left[\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right] + \gamma_2\mathbf{A}_2 = \\ = i\alpha_2\nabla_v\left[\mathrm{Ln}\left(\Psi_2\right) - \mathrm{Ln}\left(\bar{\Psi}_2\right)\right] + \gamma_2\mathbf{A}_2 = i\alpha_2\left[\frac{\nabla_v\Psi_2}{\Psi_2} - \frac{\nabla_v\bar{\Psi}_2}{\bar{\Psi}_2}\right] + \gamma_2\mathbf{A}_2. \tag{16}$$

Подставляя (16) в уравнение (10) и учитывая независимость переменных $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, получим

$$\bar{\Psi}_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + \Psi_2\frac{\partial\bar{\Psi}_2}{\partial t} + \bar{\Psi}_2\left(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2\right) + \Psi_2\left(\mathbf{v},\nabla_r\bar{\Psi}_2\right) + \\ + i\alpha_2\mathrm{div}_v\left[\bar{\Psi}_2\nabla_v\Psi_2 - \Psi_2\nabla_v\bar{\Psi}_2 - i\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\Psi_2\bar{\Psi}_2\mathbf{A}_2\right] = 0. \tag{17}$$

Ввиду того, что

$$\mathrm{div}_v\left[\bar{\Psi}_2\nabla_v\Psi_2 - \Psi_2\nabla_v\bar{\Psi}_2\right] = \bar{\Psi}_2\Delta_v\Psi_2 - \Psi_2\Delta_v\bar{\Psi}_2, \\ \mathrm{div}_v\left[\Psi_2\bar{\Psi}_2\mathbf{A}_2\right] = \bar{\Psi}_2\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v\Psi_2\right) + \Psi_2\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v\bar{\Psi}_2\right),$$

уравнение (17) примет вид:

$$\bar{\Psi}_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + \Psi_2\frac{\partial\bar{\Psi}_2}{\partial t} + \bar{\Psi}_2\left(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2\right) + \Psi_2\left(\mathbf{v},\nabla_r\bar{\Psi}_2\right) + i\alpha_2\left(\bar{\Psi}_2\Delta_v\Psi_2 - \Psi_2\Delta_v\bar{\Psi}_2\right) + \\ + \bar{\Psi}_2\left(\gamma_2\mathbf{A}_2,\nabla_v\Psi_2\right) + \Psi\left(\gamma_2\mathbf{A}_2,\nabla_v\bar{\Psi}_2\right) = 0.$$

или

$$\bar{\Psi}_2\left[\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + \left(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2\right) + i\alpha_2\Delta_v\Psi_2 + \gamma_2\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v\Psi_2\right)\right] + \\ + \Psi_2\left[\frac{\partial\bar{\Psi}_2}{\partial t} + \left(\mathbf{v},\nabla_r\bar{\Psi}_2\right) - i\alpha_2\Delta_v\bar{\Psi}_2 + \gamma_2\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v\bar{\Psi}_2\right)\right] = 0. \tag{18}$$

Введем обозначение дифференциальных операторов:

$$\hat{\mathbf{p}}_1 \overset{\det}{=} -\frac{i}{\beta_1}\nabla_r, \qquad \hat{\mathbf{p}}_1^2 = -\frac{1}{\beta_1^2}\Delta_r, \quad \hat{\mathbf{p}}_2 \overset{\det}{=} -\frac{i}{\beta_2}\nabla_v, \qquad \hat{\mathbf{p}}_2^2 = -\frac{1}{\beta_2^2}\Delta_v, \tag{19}$$

где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1, 2$. Используя обозначения (19) выражение (18) примет вид:

$$\bar{\Psi}_2\left[\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1\right) - i\alpha_2\beta_2\left(\hat{\mathbf{p}}_2^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{A}_2,\hat{\mathbf{p}}_2\right)\right)\right]\Psi_2 + \\ + \Psi_2\left[\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\bar{\hat{\mathbf{p}}}_1\right) + i\alpha_2\beta_2\left(\bar{\hat{\mathbf{p}}}_2^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{A}_2,\bar{\hat{\mathbf{p}}}_2\right)\right)\right]\bar{\Psi}_2 = 0. \tag{20}$$

Выражение (20) можно записать в другом виде, если учесть, что

$$\hat{\mathbf{p}}_2^2-\frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{A}_2,\hat{\mathbf{p}}_2\right)=\left(\hat{\mathbf{p}}_2-\frac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_2\right)^2-\frac{\gamma_2^2}{4\alpha_2^2\beta_2^2}\left|\mathbf{A}_2\right|^2,$$

тогда

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}_2\left[\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1\right)-i\alpha_2\beta_2\left(\hat{\mathbf{p}}_2-\frac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_2\right)^2\right]\Psi_2+\\+\Psi_2\left[\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\bar{\hat{\mathbf{p}}}_1\right)+i\alpha_2\beta_2\left(\bar{\hat{\mathbf{p}}}_2-\frac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_2\right)^2\right]\bar{\Psi}_2=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Таким образом, можно работать как с выражением (20), так и с выражением (21). Рассмотрим выражением (20). Введем обозначение линейного оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}=-\frac{i}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1\right)-\alpha_2\beta_2\left(\hat{\mathbf{p}}_2^2-\frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{A}_2,\hat{\mathbf{p}}_2\right)\right),\tag{22}$$

Используя обозначение (22) уравнение (20) примет вид:

$$\bar{\Psi}_2\mathcal{L}\Psi_2-\Psi_2\bar{\mathcal{L}}\bar{\Psi}_2=0,$$

или

$$\mathrm{M}-\bar{\mathrm{M}}=0,\tag{23}$$

где $\mathrm{M}=\bar{\Psi}_2\mathcal{L}\Psi_2$. Выражение (23) означает, что $\mathrm{Im}\mathrm{M}=0$. Если мнимая часть равна нулю, значит, М является действительной величиной, то есть:

$$\mathrm{M}=m\in\mathbb{R},$$

или

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}_2\mathcal{L}\Psi_2=m,\\ \mathcal{L}\Psi_2=\frac{m}{\bar{\Psi}_2}=\frac{m}{\bar{\Psi}_2}\frac{\Psi_2}{\Psi_2}=\frac{m}{|\Psi_2|^2}\Psi_2=-U_2\Psi_2,\\ U_2\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)\in\mathbb{R},\qquad \mathcal{L}\Psi_2+U_2\Psi_2=0.\end{gathered}\tag{24}$$

В результате уравнение для функции Ψ_2 примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{i}{\beta_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}&=\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1\right)\Psi_2-\\&-\alpha_2\beta_2\left(\hat{\mathbf{p}}_2^2-\frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{A}_2,\hat{\mathbf{p}}_2\right)\right)\Psi_2+U_2\Psi_2.\end{aligned}\tag{25}$$

Проделывая аналогичные выкладки для уравнения (21), получим уравнения для Ψ_2 в виде:

$$\begin{gathered}\frac{i}{\beta_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=\\=\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1\right)\Psi_2-\alpha_2\beta_2\left(\hat{\mathbf{p}}_2-\frac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_2\right)^2\Psi_2+V_2\Psi_n,\\ V_2=\frac{1}{2\alpha_2\beta_2}\frac{|\gamma_2\mathbf{A}_2|^2}{2}+U_2.\end{gathered}\tag{26}$$

Уравнение (25)/(26) и есть искомое уравнение для волновой функции $\Psi_2\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)$. Не ограничивая общности, постоянные величины $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ определим следующим образом

$$\alpha_2\overset{\mathrm{det}}{=}-\frac{\hbar_2}{2m},\quad \beta_2\overset{\mathrm{det}}{=}\frac{1}{\hbar_2},\quad \gamma_2=-\frac{q}{m},\tag{27}$$

где $\hbar_2,q$ — некоторые постоянные значения.

Выражение для потенциала U_2 согласно (24) имеет вид

$$U_2=-\frac{\bar{\Psi}_2\mathcal{L}\Psi_2}{f_2}.\tag{28}$$

Покажем, что выражение (28) определяет аналог уравнения Гамильтона-Якоби. Выполним промежуточные преобразования. Вычисляя $\Delta_v\Psi_2$

$$\begin{aligned}\Delta_v\Psi_2=e^{i\phi_2}\Big\{&\Delta_v|\Psi_2|-|\Psi_2||\nabla_v\phi_2|^2+\\&+i\left[2\left(\nabla_v\phi_2,\nabla_v|\Psi_2|\right)+|\Psi_2|\Delta_v\phi_2\right]\Big\},\end{aligned}$$

и подставляя в (28), получаем

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}_2\mathcal{L}\Psi_2=\frac{1}{\beta_2}|\Psi_2|^2\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{1}{\beta_2}|\Psi_2|^2\left(\mathbf{v},\nabla_r\phi_2\right)+\frac{1}{\beta_2}|\Psi_2|^2\left(\mathbf{v},\nabla_v\phi_2\right)+\frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Psi_2|^2\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v\phi_2\right)+\\+\frac{\alpha_2}{\beta_2}|\Psi_2|\left(\Delta_v|\Psi_2|-|\Psi_2||\nabla_v\phi_2|^2\right)-\frac{i}{\beta_2}|\Psi_2|\frac{\partial|\Psi_2|}{\partial t}-\frac{i}{\beta_2}|\Psi_2|\left(\mathbf{v},\nabla_r|\Psi_2|\right)+\\+i\frac{\alpha_2}{\beta_2}|\Psi_2|\left[2\left(\nabla_v\phi_2,\nabla_v|\Psi_2|\right)+|\Psi_2|\Delta_v\phi_2\right]-i\frac{\gamma_2}{\beta_2}|\Psi_2|\left(\mathbf{A}_2,\nabla_v|\Psi_2|\right),\end{gathered}\tag{29}$$

$$U_2 = -\frac{\bar{\Psi}_2 \mathcal{L} \Psi_2}{|\Psi_2|^2} = -\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{1}{\beta_2}(\mathbf{v}, \nabla_r \phi_2) - \frac{\gamma_2}{\beta_2}(\mathbf{A}_2, \nabla_v \phi_2) - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}|\nabla_v \phi_n|^2 +$$
$$+\frac{i}{\beta_2}\frac{1}{|\Psi_2|}\frac{\partial |\Psi_2|}{\partial t} + i\frac{\gamma_2}{\beta_2}\frac{1}{|\Psi_2|}(\mathbf{A}_2, \nabla_v |\Psi_2|) - i\frac{2\alpha_2}{\beta_2}\frac{1}{|\Psi_2|}(\nabla_v \phi_2, \nabla_v |\Psi_2|) - i\frac{\alpha_2}{\beta_2}\Delta_v \phi_2 +$$
$$+\frac{i}{\beta_2}\frac{1}{|\Psi_2|}(\mathbf{v}, \nabla_r |\Psi_2|).$$

Согласно определению (24) функция U_2 является вещественной, следовательно, мнимая часть выражения (29) должна обращаться в ноль, проверим это условие. Действительно, учитывая выражения (13), (15) и уравнение (10), получим:

$$2\beta_2 |\Psi_2|^2 \,\mathrm{Im} U_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} + (\gamma_2 \mathbf{A}_2, \nabla_v f_2) + (-\alpha_2 \nabla_v \Phi_2, \nabla_v f_2) - \alpha_2 f_2 \Delta_v \Phi_2 + (\mathbf{v}, \nabla_r f_2) =$$
$$= \frac{\partial f_2}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_r f_2) + (-\alpha_2 \nabla_v \Phi_2 + \gamma_2 \mathbf{A}_2, \nabla_v f_2) + f_2(\nabla_v, -\alpha_2 \nabla_v \Phi_2 + \gamma_2 \mathbf{A}_2) =$$
$$= \frac{\partial f_2}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_r f_2) + (\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle, \nabla_v f_2) + f_2(\nabla_v, \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle) = 0.$$

В результате для функции U_2 получаем представление:

$$U_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - Q_2 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}|\nabla_v \phi_2|^2 - \frac{1}{\beta_2}(\gamma_2 \mathbf{A}_2, \nabla_v \phi_n) - \frac{1}{\beta_2}(\mathbf{v}, \nabla_r \phi_2), \tag{30}$$

где

$$Q_2 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} = \frac{\alpha_2}{2\beta_2}\left(\Delta_v S_2 + \frac{1}{2}|\nabla_v S_2|^2\right), \qquad S_2 = \mathrm{Ln} f_2,$$

где Q_2 — аналог квантового потенциала в теории «волны–пилота» де Бройля–Бома [23, 24, 25, 26]. Выражение (30) можно переписать через оператор $\Pi_2 \phi_2 = \frac{d_2 \phi_2}{dt}$ [15, 21], действительно

$$-\beta_2 U_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_r \phi_2) + (-2\alpha_2 \nabla_v \phi_2, \nabla_v \phi_2) + \alpha_2(\nabla_v \phi_2, \nabla_v \phi_2) + (\gamma_2 \mathbf{A}_2, \nabla_v \phi_2) + \alpha_2 \frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} =$$
$$= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_r \phi_2) + (-\alpha_2 \nabla_v \Phi_2 + \gamma_2 \mathbf{A}_2, \nabla_v \phi_2) + \alpha_2(\nabla_v \phi_2, \nabla_v \phi_2) + \alpha_2 \frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} =$$
$$= \alpha_2(\nabla_v \phi_2, \nabla_v \phi_2) + \alpha_2 \frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_r \phi_2) + (\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle, \nabla_v \phi_2) = \tag{31}$$
$$= \alpha_2 |\nabla_v \phi_2|^2 + \alpha_2 \frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} + \frac{d_2 \phi_2}{dt},$$
$$U_2 = -\frac{1}{\beta_2}\left\{\frac{d_2 \phi_2}{dt} + \alpha_2\left[\frac{\Delta_v |\Psi_2|}{|\Psi_2|} + |\nabla_v \phi_2|^2\right]\right\}.$$

Из выражения (31) можно получить представление для Лагранжиана L_2, действительно

$$-\frac{1}{\beta_2}\frac{d_2 \phi_2}{dt} = \frac{1}{4\alpha_2 \beta_2}|\alpha_2 \nabla_v \Phi_2|^2 + U_2 + Q_2 = \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}\frac{1}{2}|\langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle|^2 + U_2 + Q_2 \stackrel{\text{det}}{=} -L_2, \tag{32}$$

или

$$\hbar_2 \frac{d_2 \phi_2}{dt} = \frac{m}{2}|\langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle|^2 - (U_2 + Q_2) = L_2.$$

Фаза ϕ_2 при этом имеет смысл аналога действия. Заметим, что лагранжиан L_2 не содержит информации о вихревом поле $\mathbf{A}_2$. Аналогичная ситуация имеет место и в классическом случае.

Получим аналог уравнения Гамильтона-Якоби. Перепишем выражение для потенциала (30).

$$-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}\frac{1}{2}|\langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle|^2 + U_2 + Q_2 + \frac{1}{2\alpha_n \beta_n}[(\mathbf{v}, \alpha_2 \nabla_r \Phi_2) + (\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle, \langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle)],$$
$$-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}\left(\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle, \langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle\right) + U_2 + Q_2 + \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}(\mathbf{v}, \alpha_2 \nabla_r \Phi_2), \tag{33}$$
$$-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}\frac{1}{2}|\langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle|^2 + U_2 + Q_2 - \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}(\gamma_2 \mathbf{A}_2, \langle \dot{\mathbf{v}}_p \rangle) + \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2}(\mathbf{v}, \alpha_2 \nabla_r \Phi_2),$$

Уравнение (33) можно переписать через $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$. Согласно (12) $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$ можно представить в виде $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle = \langle\dot{\mathbf{v}}_p\rangle + \langle\dot{\mathbf{v}}_s\rangle$, где $\langle\dot{\mathbf{v}}_p\rangle = -\alpha_2\nabla_v\Phi_2$, $\langle\dot{\mathbf{v}}_s\rangle = \gamma_2\mathbf{A}_2$, тогда справедливо выражение

$$\frac{1}{2}\left|\langle\dot{\mathbf{v}}_p\rangle\right|^2 + \left(\gamma_2\mathbf{A}_2, \langle\dot{\mathbf{v}}_p\rangle\right) = \frac{1}{2}\left|\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle\right|^2 - \frac{\left|\gamma_2\mathbf{A}_2\right|^2}{2}. \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33), получим

$$-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2\alpha_2\beta_2}\frac{1}{2}\left|\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle\right|^2 + U_2 + Q_2 + \frac{1}{2\alpha_2\beta_2}\frac{\left|\gamma_2\mathbf{A}_2\right|^2}{2} + \frac{1}{2\alpha_2\beta_2}\left(\mathbf{v}, \alpha_2\nabla_r\Phi_2\right) \stackrel{\text{det}}{=} H_2,$$

или

$$\begin{gathered}-\hbar_2\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = \frac{m}{2}\left|\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle\right|^2 + q\chi_2 = H_2,\\ q\chi_2 = U_2 + Q_2 - \frac{q^2}{2m}\left|\mathbf{A}_2\right|^2 + \hbar_2\left(\mathbf{v}, \nabla_r\phi_2\right),\end{gathered} \tag{35}$$

где функция H_2 является аналогом гамильтониана. Заметим, что гамильтониан H_2 в отличие от лагранжиана L_2 содержит информации о вихревом поле $\mathbf{A}_2$. Аналогичная ситуация имеет место и в классическом случае. Полученное уравнение (35) является аналогом уравнения Гамильтона–Якоби.

Используя (32) и (35) получим преобразование Лежандра для связи L_2 и H_2:

$$L_2 + H_2 = \hbar_2\left(\mathbf{v}, \nabla_r\phi_2\right) + m\left(\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle, \langle\dot{\mathbf{v}}_p\rangle\right). \tag{36}$$

Построим комплексное действие [15, 27]:

$$\begin{gathered}i\Phi_2 = \mathrm{Ln}\left(\frac{\Psi_2}{\bar{\Psi}_2}\right) = \mathrm{Ln}\Psi_2 - \mathrm{Ln}\bar{\Psi}_2,\\ S_2 = \mathrm{Ln}f_2 = \mathrm{Ln}\left(\Psi_2\bar{\Psi}_2\right) = \mathrm{Ln}\Psi_2 + \mathrm{Ln}\bar{\Psi}_2,\end{gathered} \tag{37}$$

$$M_2 \stackrel{\text{det}}{=} S_2 + i\Phi_2, Z_2 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{M_2}{2} = \mathrm{Ln}\Psi_2, \quad \Psi_2 = e^{Z_2}. \tag{38}$$

Учитывая соотношения (10) и (32) вычислим $\Pi_2 Z_2$

$$\begin{aligned}\Pi_2 Z_2 = \frac{d_2 Z_2}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d_2 S_2}{dt} + \frac{i}{2}\frac{d_2\Phi_2}{dt} = \\ &= -\frac{1}{2}Q_2 + \frac{i}{\hbar_2}L_2 \stackrel{\text{det}}{=} \Lambda_2.\end{aligned} \tag{39}$$

Функция Λ_2 является комплексным лагранжианом [15, 27]. Мнимая часть $\mathrm{Im}\Lambda_2$ соответствует лагранжиану L_2, который связан с действием ϕ_2. Действительная часть $\mathrm{Re}\Lambda_2$ соответствует источникам потока вероятностей (12) $Q_2 = -\alpha_2\Delta_v\Phi_2$. Таким образом, величина Z_2 соответствует комплексному действию (сравните выражения (32) и (39)).

Рассмотрим задачу о квантовом гармоническом осцилляторе с потенциалом $U_1 = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, в этом случае вихревая компонента поля отсутствует, а потенциальная зависит только от координат, тогда, согласно (12), $m\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle = -\nabla_r U_1$. Подобная подстановка динамической величины вместо кинематической, такой как $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle$, называется аппроксимацией Власова [20] и вводится с учетом физических требований. Учитывая аналог уравнения Гамильтона–Якоби (35) и $\langle\dot{v}\rangle = -\omega^2 x$ для фазы $\phi_2(x,v,t)$ можно получить представление

$$-\hbar_2\phi_2(x,v,t) = m\omega^2 xv + \mathrm{E}_2 t, \tag{40}$$

$$\mathrm{E}_2 = \frac{m}{2}\omega^4 x^2 + e\chi_2,$$

$$e\chi_2 = U_2 + Q_2 - m\omega^2 v^2 = \mathrm{E}_2 - \frac{m}{2}\omega^4 x^2,$$

$$U_2 = \mathrm{E}_2 + m\omega^2\left(v^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) + \frac{\hbar_2^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{f_2}}\frac{\partial^2\sqrt{f_2}}{\partial v^2}. \tag{41}$$

При аппроксимации $\langle\dot{v}\rangle = -\omega^2 x$ решение уравнения Власова (10) может быть найдено методом характеристик

$$\begin{gathered}f_2(x,v) = F(\varepsilon),\\ \varepsilon(x,p) = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{42}$$

Заметим, что функция F должна быть положительной функцией, так как $F = \left|\Psi_2\right|^2$. Вдоль характеристик (42) решение является постоянным $f_2 = \mathrm{const}$. На рис. 1 приведён график характеристик (42) в системе координат $(\bar{x}, \bar{v}) = (\sqrt{m}\omega x, p/\sqrt{m})$. Если функция $f_{1,n}(x) = \left|\psi_n(x)\right|^2$ имеет нули, то есть $\exists x_k, k = 1, ..., n:\ f_{1,n}(x_k) = 0$, тогда из (11) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{2,n}(x_k, v)\,dv = 0. \tag{43}$$

Так как $f_{2,n}(x,v) = F_n(\varepsilon) \geq 0$, то из (43) следует, что $f_{2,n}(x_k, v) = 0$ почти всюду на интервале

$v \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, на всей окружности (42), проходящей через точку $(x_k, 0)$ функция $f_{2,n}$ также равна нулю (см. рис.1).

На рис. 1 показано положение первого нуля x_1 функции $f_{1,n}$. Все окружности (42) большего радиуса будут пересекать вертикальную прямую $x = x_1$, например, в точках P и P'. Следовательно, на всех таких окружностях значение функции $f_{2,n}$ будет равно нулю. То есть функция $f_{2,n}$ будет отлична от нуля только внутри круга радиуса x_1.

Таким образом, из всех функций $f_{2,n}$ положительными во всей области будут только те функции, для которых $f_{1,n}$ не имеет нулей. Только одна функция из (4) не имеет нулей — это $f_{1,0}(x) = |\psi_0(x)|^2$. Поэтому из всех функций F необходимо взять $F(\varepsilon) \sim e^{-2\varepsilon}$. В результате выражение (41) для потенциала U_2 примет вид

$$\frac{\partial^2 \sqrt{f_2}}{\partial v^2} = \mathrm{const}\frac{m}{\hbar\omega}\left[\frac{m}{\hbar\omega}v^2 - 1\right] e^{-\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)},$$

$$U_2 = \mathrm{E}_2 - \frac{\hbar_2^2}{2\hbar\omega} + m\omega^2\left(1 + \frac{\hbar_2^2}{2\hbar^2\omega^4}\right)v^2 - \frac{1}{2}m\omega^4x^2. \quad (44)$$

Так как для гармонического осциллятора [15] $\omega \overset{\det}{=} \omega_1 = \frac{\sigma_v}{\sigma_r} = \frac{\sigma_{\dot v}}{\sigma_v} \overset{\det}{=} \omega_2$, $\sigma_r\sigma_v = |\alpha_1| = \frac{\hbar}{2m}$, $\sigma_v\sigma_{\dot v} = |\alpha_2| = \frac{\hbar_2}{2m}$ и потенциал U_2 определен с точностью до константы, то положим $\mathrm{E}_2 = \frac{\hbar_2\omega_2}{2}$, тогда

$$U_2(x,v) = -\frac{\omega^2}{2\alpha_2\beta_2}\left[\left(1 + \frac{\alpha_2^2}{2\omega^2\sigma_v^4}\right)v^2 - \frac{1}{2}\omega^2x^2\right]. \quad (45)$$

Ввиду (45) аналог уравнения Шрёдингера (25)/(26) примет вид:

$$\frac{i}{\beta_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Psi_2 - \frac{i}{\beta_2}v\frac{\partial}{\partial x}\Psi_2 + U_2\Psi_2, \quad (46)$$

где

$$\Psi_2(x,v,t) = \mathrm{const}\cdot\exp\left[-\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right) - -i\left(\frac{m\omega^2}{\hbar_2}xv + \frac{\mathrm{E}_2}{\hbar_2}t\right)\right]. \quad (47)$$

Волновая функция (47) соответствует функции Вигнера основного состояния гармонического осциллятора (2)

$$|\Psi_2(\mathbf{r},\mathbf{v})|^2 = f_{2,0}(x,v) = \frac{1}{\pi\hbar}e^{-\frac{m}{\hbar\omega}\left(v^2+\omega^2x^2\right)}. \quad (48)$$

Как отмечалось ранее, других решений $\Psi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, отличных от решения (48), уравнение (46) иметь не может (см. рис.1).

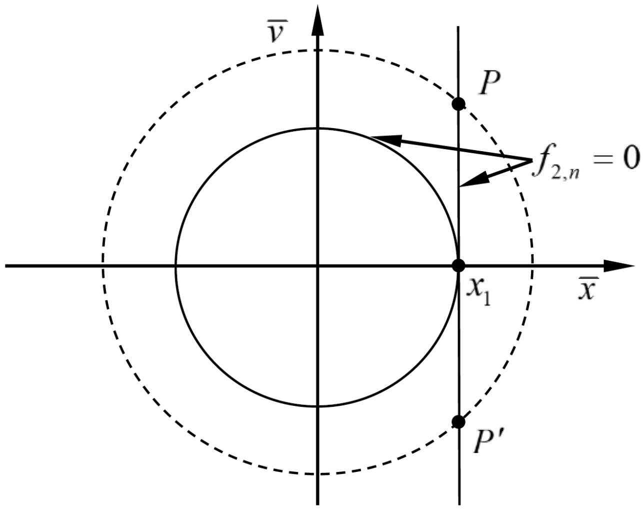

Рис. 1: Значения функции $f_{2,n}$

2. УРАВНЕНИЕ МОЭЛЯ

Уравнение Власова (10) с аппроксимацией Власова–Моэля [17]

$$\langle\dot v_\mu\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{m^{2n+1}(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\mu^{2n+1}}\frac{1}{f_2}\frac{\partial^{2n}f_2}{\partial v_\mu^{2n}}, \quad (49)$$

переходит в уравнение Моэля [11] для функции Вигнера $f_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = W(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m}(\mathbf{p},\nabla_r)W - (\nabla_r U_1, \nabla_p W) = \\ = \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(-1)^l(\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!}U_1\left(\overleftarrow{\boldsymbol\nabla}_r, \overrightarrow{\boldsymbol\nabla}_p\right)^{2l+1}W.\end{gathered} \quad (50)$$

Аппроксимация (49) не содержит вихревого поля $\gamma_2\mathbf{A}_2$, поэтому по теореме Гельмгольца справедливо представление (12)

$$\langle\dot v_\mu\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{m^{2n+1}(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\mu^{2n+1}}\frac{1}{f_2}\frac{\partial^{2n}f_2}{\partial v_\mu^{2n}} = -\alpha_2\frac{\partial}{\partial v_\mu}\Phi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t),$$

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle = -\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x_\mu} + \frac{(\hbar/2)^2}{m^3 3!}\frac{\partial^3 U_1}{\partial x_\mu^3}\frac{1}{f_2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_\mu^2} + ... = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v_\mu}\left[\frac{\partial U_1}{\partial x_\mu}v_\alpha - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\frac{\partial^3 U_1}{\partial x_\mu^3}\left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial v_\mu}\right) + ...\right],$$

$$\Phi_2(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = -\frac{2}{\hbar_2}\left[v_\alpha\frac{\partial U_1}{\partial x_\mu} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\frac{\partial^3 U_1}{\partial x_\mu^3}\left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial v_\mu}\right) + ...\right] + \mathrm{const}, \tag{51}$$

где постоянная величина const не зависит от скорости, и в соответствии с уравнением Гамильтона–Якоби (35) может быть принята $-\frac{\mathrm{E}_2}{\hbar_2}t$. Заметим, что аппроксимация (49) в общем случае накладывает другие условия на функции Φ_2 и ϕ_2, чем условие (15).

Для полиномиального потенциала $U_1(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ выполнено условие $\frac{\partial^l U_1}{\partial x_\alpha^l} = 0$, при $l \geq 5$, следовательно, выражение (51) содержит только первых два слагаемых:

$$-\hbar_2\phi_2(x,v,t) = v\sum_{k=1}^{4} a_k k x^{k-1} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)\sum_{k=3}^{4} a_k k(k-1)(k-2)x^{k-3} + \mathrm{E}_2 t. \tag{52}$$

В частном случае потенциала гармонического осциллятора $U_1(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ выражение (52) переходит в представление (40).

С одной стороны по теореме Хадсона [3] только основное состояние гармонического осциллятора будет иметь положительную функцию распределения $W_0(x,p)$ (48). С другой стороны, решение уравнения Шрёдингера (6) с оператором Гамильтона (7) будет иметь множество решений (8) с функциями плотности вероятностей (9).

Построим аналог уравнения Шрёдингера из уравнения Моэля (50) методом, описанным в §1, и найдем для него точные решения для случая гармонического осциллятора. Заметим, что полученные таким образом решения будут отличаться от решений (9) из-за наличия условия в виде аппроксимации Власова–Моэля (49).

Представим функцию Вигнера в виде $W = |\Psi_2|^2$ и подставим в уравнение (50)

$$\bar{\Psi}_2\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \Psi_2\frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial t} + \bar{\Psi}_2(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2) + \Psi_2(\mathbf{v},\nabla_r\bar{\Psi}_2) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\beta^{2n+1}}\frac{\partial^{2n+1}|\Psi_2|^2}{\partial p_\beta^{2n+1}} = 0. \tag{53}$$

Преобразуем выражение $\frac{\partial^{2n+1}|\Psi_2|^2}{\partial p_\beta^{2n+1}}$ в уравнении (53)

$$\frac{\partial^{2n+1}|\Psi_2|^2}{\partial p_\beta^{2n+1}} = 2\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|\frac{\partial|\Psi_2|}{\partial p_\beta}\right) = 2\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{1}{|\Psi_2|}\frac{\partial|\Psi_2|}{\partial p_\beta}\right) = \frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2 2\frac{\partial\ln|\Psi_2|}{\partial p_\beta}\right) =$$
$$= \frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left[|\Psi_2|^2\frac{\partial}{\partial p_\beta}(\ln|\Psi_2| + \ln|\Psi_2|)\right] = \frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left[|\Psi_2|^2\frac{\partial}{\partial p_\beta}(\ln|\Psi_2| + iArg\Psi_2 + \ln|\Psi_2| - iArg\Psi_2)\right] =$$
$$= \frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left[|\Psi_2|^2\frac{\partial}{\partial p_\beta}(\mathrm{Ln}\Psi_2 + \mathrm{Ln}\bar{\Psi}_2)\right],$$

$$\frac{\partial^{2n+1}|\Psi_2|^2}{\partial p_\beta^{2n+1}} = \frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{\partial\mathrm{Ln}\Psi_2}{\partial p_\beta} + |\Psi_2|^2\frac{\partial\mathrm{Ln}\bar{\Psi}_2}{\partial p_\beta}\right). \tag{54}$$

Подставляя (54) в уравнение (53) и производя группировку слагаемых, получим

$$\bar{\Psi}_2\left[\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2) + \frac{\Psi_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\beta^{2n+1}}\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{\partial\mathrm{Ln}\Psi_2}{\partial p_\beta}\right)\right] +$$
$$+\Psi_2\left[\frac{\partial\bar{\Psi}_2}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla_r\bar{\Psi}_2) + \frac{\bar{\Psi}_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\beta^{2n+1}}\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{\partial\mathrm{Ln}\bar{\Psi}_2}{\partial p_\beta}\right)\right] = 0. \tag{55}$$

Преобразуем выражение (55) тем же способом, что и в §1

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2)+\frac{\Psi_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\beta^{2n+1}}\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{\partial \mathrm{Ln}\Psi_2}{\partial p_\beta}\right)=\frac{i}{\hbar}L\Psi_2,$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=-i\hbar(\mathbf{v},\nabla_r\Psi_2)-i\hbar\frac{\Psi_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}U_1}{\partial x_\beta^{2n+1}}\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2\frac{\partial \mathrm{Ln}\Psi_2}{\partial p_\beta}\right)-L\Psi_2,$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1)\Psi_2-\frac{\Psi_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\hat p_{1,\beta}^{2n+1}U_1}{2^{2n}(2n+1)!}\frac{(-i\hbar)^{2n}}{(-i\hbar)^{2n+1}}\frac{\partial^{2n}}{\partial p_\beta^{2n}}\left(|\Psi_2|^2(-i\hbar)\frac{\partial \mathrm{Ln}\Psi_2}{\partial p_\beta}\right)-L\Psi_2,$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=(\mathbf{v},\hat{\mathbf{p}}_1)\Psi_2-\frac{i}{\hbar}\frac{\Psi_2}{|\Psi_2|^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,U_1\,\overleftarrow{\hat p}_{1,\beta}^{\,2n+1}}{(2\hbar)^{2n}(2n+1)!}\overrightarrow{\hat p}_{2,\beta}^{\,2n}\left(|\Psi_2|^2\,\overrightarrow{\hat p}_{2,\beta}\mathrm{Ln}\Psi_2\right)-L\Psi_2, \tag{56}$$

где оператор $\hat p_{2,\beta}$ отличается от оператора $\hat{\mathbf{p}}_2$, введенного ранее в §1 множителем массы. Уравнение (56) является искомым уравнением для волновой функции Ψ_2.

Рассмотрим частный случай уравнения (56) для одномерного гармонического осциллятора.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=-i\hbar v\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+i\hbar\omega^2x\frac{\partial\Psi_2}{\partial v}-L\Psi_2. \tag{57}$$

Решение уравнения (57) будем искать в виде $\Psi_2(x,v,t)=\psi(x,v)\,e^{-i\frac{\mathrm{E}}{\hbar}t}$

$$-i\hbar v\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\hbar\omega^2x\frac{\partial\psi}{\partial v}-(L+\mathrm{E})\,\psi=0. \tag{58}$$

Уравнение (58) должно содержать решение, соответствующее основному состоянию $W_0(x,p)$ (48), поэтому возьмем

$$\psi(x,v)=\mathrm{const}\cdot\exp\left[-\frac{v^2}{4\sigma_v^2}-\frac{\omega^2x^2}{4\sigma_v^2}+i\lambda xv\right], \tag{59}$$

где λ, σ_v — постоянные величины.

Подставляя (59) в уравнение (58) получаем выражение для функции $L(x,v)$

$$L=\hbar\lambda\left(v^2-\omega^2x^2\right), \tag{60}$$

которая при $\lambda=\frac{m}{2\hbar}$ будет соответствовать функции Лагранжа гармонического осциллятора. Проверим возможность расширения множества решений (59) функциями вида:

$$\psi_n(x,v)=C\,(ax-ibv)^n\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{v^2}{4\sigma_v^2}-\frac{\omega^2x^2}{4\sigma_v^2}+i\lambda xv\right), \tag{61}$$

где C,a,b — некоторые постоянные величины. Подставляя функции (61) в уравнение (58), в котором функция $L(x,v)$ имеет вид (60), получим

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x}=Ce^{-\left(\frac{v^2}{4\sigma_v^2}+\frac{\omega^2x^2}{4\sigma_v^2}-i\lambda xv\right)}(ax-ibv)^{n-1}\left[na-\frac{a\omega^2x^2}{2\sigma_v^2}+b\lambda v^2+i\left(a\lambda+\frac{\omega^2b}{2\sigma_v^2}\right)xv\right] \tag{62}$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial v}=Ce^{-\left(\frac{v^2}{4\sigma_v^2}+\frac{\omega^2x^2}{4\sigma_v^2}-i\lambda xv\right)}(ax-ibv)^{n-1}\left[-\left(\frac{a}{2\sigma_v^2}-b\lambda\right)xv+i\left(a\lambda x^2+\frac{b}{2\sigma_v^2}v^2-nb\right)\right] \tag{63}$$

Подставляя (62), (63) и (60) в уравнение (58), получим

$$-i\hbar v\frac{\partial\psi_n}{\partial x}+i\hbar\omega^2x\frac{\partial\psi_n}{\partial v}-\left(\frac{mv^2}{2}-\frac{m\omega^2x^2}{2}+\mathrm{E}_{2,n}\right)\psi_n=0,$$

$$-i\hbar v\left[na-\frac{a\omega^2x^2}{2\sigma_v^2}+b\lambda v^2+i\left(a\lambda+\frac{\omega^2 b}{2\sigma_v^2}\right)xv\right]+$$
$$+i\hbar\omega^2x\left[-\left(\frac{a}{2\sigma_v^2}-b\lambda\right)xv+i\left(a\lambda x^2+\frac{b}{2\sigma_v^2}v^2-nb\right)\right]+\left(\frac{m\omega^2x^2}{2}-\frac{mv^2}{2}-\mathrm{E}_{2,n}\right)(ax-ibv)=0,$$

$$-ina\hbar v+i\frac{a\hbar\omega^2}{2\sigma_v^2}x^2v-ib\hbar\lambda v^3+\hbar\left(a\lambda+\frac{\omega^2b}{2\sigma_v^2}\right)xv^2-i\hbar\omega^2\left(\frac{a}{2\sigma_v^2}-b\lambda\right)x^2v-\hbar\omega^2a\lambda x^3-$$
$$-\hbar\omega^2\frac{b}{2\sigma_v^2}xv^2+n\hbar\omega^2bx+\frac{am\omega^2}{2}x^3-\frac{am}{2}xv^2-a\mathrm{E}_{2,n}x+i\left(-\frac{bm\omega^2}{2}x^2v+\frac{bm}{2}v^3+\mathrm{E}_{2,n}bv\right)=0$$

$$\left(\frac{m}{2}-\hbar\lambda\right)a\omega^2x^3+\left[\hbar\left(a\lambda+\frac{\omega_1^2b}{2\sigma_v^2}\right)-\frac{am}{2}-\hbar\omega^2\frac{b}{2\sigma_v^2}\right]xv^2-\left(-nb\hbar\omega^2+a\mathrm{E}_{2,n}\right)x+$$
$$+i\left[-\left(\hbar\lambda-\frac{m}{2}\right)bv^3+\left(\frac{a\hbar\omega_1^2}{2\sigma_v^2}-\hbar\omega^2\left(\frac{a}{2\sigma_v^2}-b\lambda\right)-\frac{bm\omega^2}{2}\right)x^2v-\left(-b\mathrm{E}_{2,n}+na\hbar\right)v\right]=0 \tag{64}$$

Ввиду того, что $\lambda=\frac{m}{2\hbar}$, выражение (64) принимает вид

$$\left(-nb\hbar\omega^2+a\mathrm{E}_{2,n}\right)x+i\left(-b\mathrm{E}_{2,n}+na\hbar\right)v=0. \tag{65}$$

В силу независимости переменных x и v из выражения (65) следует, что

$$\begin{cases}-nb\hbar\omega^2+a\mathrm{E}_{2,n}=0\\ -b\mathrm{E}_{2,n}+na\hbar=0\end{cases}\Rightarrow\omega=\frac{a}{b},\ \ \mathrm{E}_{2,n}=\hbar\omega n. \tag{66}$$

В качестве a,b можно взять $\frac{\omega}{\sqrt{2}\sigma_v}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_v}$ соответственно. Функция плотности вероятностей примет вид

$$f_{2,n}(x,v)=|\psi_n(x,v)|^2=C^2\left(\frac{v^2}{2\sigma_v^2}+\frac{\omega^2x^2}{2\sigma_v^2}\right)^n\times$$
$$\times\exp\left\{-\left(\frac{v^2}{2\sigma_v^2}+\frac{\omega^2x^2}{2\sigma_v^2}\right)\right\}, \tag{67}$$

или

$$f_{2,n}(x,v)=C^2\left[\frac{2}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\right]^n\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{2}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\right\}.$$

Заметим, что выражение (67) отличается от выражения (9) в «правильную» сторону. Корректировка выражения (9) возможна путем искусственного введения поправочного множителя $\sigma(n)=\frac{n+1}{n+1/2}$

$$f_{T-V,n}^{corected}(x,v)=c_{T-V}^2\left[\frac{\sigma(n)}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega_1^2x^2}{2}\right)\right]^n\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\sigma(n)}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega_1^2x^2}{2}\right)\right\}. \tag{68}$$

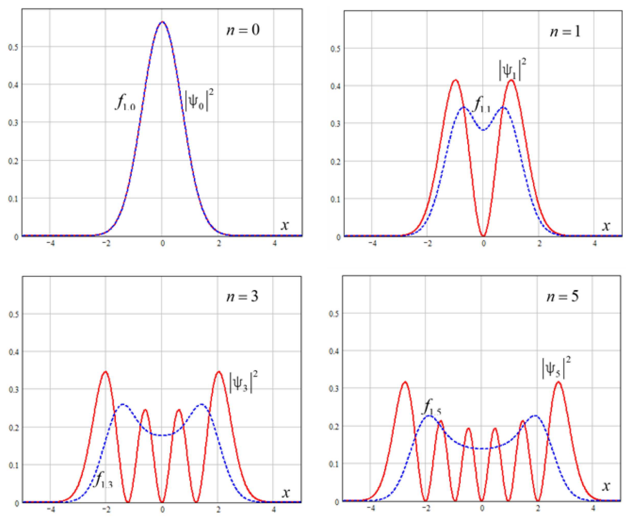

Рис. 2: Распределения $|\psi_n(x)|^2$ и $f_{1,n}(x)$ при $n=1,2,3,5$

На рис. 2 изображены графики распределений $|\psi_n(x)|^2$ (4) и $f_{1,n}(x)$, соответствующих функциям (67). Для основного состояния ($n=0$) распределения $|\psi_0(x)|^2$ и $f_{1,0}(x)$ полностью совпадают. При $n>0$ распределения $|\psi_n(x)|^2$ и $f_{1,n}(x)$ будут различными. Функции $f_{1,n}(x)$ в отличие от $|\psi_n(x)|^2$ не имеют нулей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные аналоги уравнения Шрёдингера в фазовом пространстве (6), (26) и (56) имеют отличия и как следствие их решения (8), (47), (61) различны. Построение уравнения (6) делалось феноменологическим методом и даже для основного состояния гармонического осциллятора не дает известного решения $|\psi_0(x)|^2$. Уравнение (47) строилось из первых принципов на основе второго уравнения Власова (10) и приводит к точному решению (47) для основного состояния гармонического осциллятора. Других решений уравнение (47) иметь не может, так как на уравнение Власова (10) было наложено условие положительности функции распределения (см. рис. 1). Уравнение (6) напротив имеет множество решений (8), которые не соответствуют известным решениям $|\psi_n(x)|^2$.

Так как функции (8) и функция (47) зависят только от переменной ε, то исходя из метода характеристик ($\varepsilon = \mathrm{const}$) они удовлетворяют уравнению Моэля (50) для гармонического осциллятора. Но функции (8) не приводят к решениям $|\psi_n(x)|^2$. Проблема в том, что не любое решение уравнения Моэля/Власова будет давать квантовые решения. При построении уравнения Шрёдингера из первого уравнения Власова (11) используется условие связи фазы волновой функции ϕ_1 и скалярного потенциала Φ_1 в разложении векторного поля потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle$ [22]. Аналогичное условие связи (15) между фазой ϕ_2 и полем $\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle$ используется при построении уравнения (26) из второго уравнения Власова (10). При построении уравнения (6) таких условий не накладывалось. Фазы функций (8) отличаются от фазы (47), следовательно, уравнения (6) и (47) имеют разные фазовые траектории при решении уравнения Гамильтона-Якоби (35).

Уравнение (56) строилось по уравнению Моэля и в отличие от уравнения (26) на векторное поле $\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle$ накладывалось условие в виде аппроксимации Власова–Моэля (49). В общем случае уравнение (56) является нелинейным и лишь для гармонического осциллятора имеет линейный вид и первый порядок (58). Как и следовало ожидать, решение уравнения (58), соответствующее основному состоянию гармонического осциллятора, полностью совпадает с функцией Вигнера $W_0(x,p)$. По аналогии с уравнением (6) уравнение (56) имеет множество решений (61), для которых функции $f_{1,n}(x)$ не имеют нулей (см. рис. 1).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-29-10014).

[1] *Wigner E. P.* // Phys. Rev. 1932. **40**. P. 749.
[2] *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics. New York: Dover, 1931.
[3] *Hudson R. L.* // Reports on mathematical physics. 1974. **6**, N 2.
[4] *Kano Y.* // J. Math. Phys. 1965. **6**. P. 1913.
[5] *Glauber R. J.* // Phys. Rev. Lett. 1963. **10**. P. 84.
[6] *Sudarshan E. C. G.* // Phys. Rev. Lett. 1963. **10**. P. 277.
[7] *Cahill K. E., Glauber R. J.* // Phys. Rev. A. 1969. **177**. P. 1882.
[8] *Groenewold H. J.* // Physica. 1946. **12**. P. 405.
[9] *Agarwal G. S., Wolf E.* // Phys. Rev. D. 1970. **2.** P. 2187.
[10] *Simpao, Valentino A.* // J. of Math. Chem. 2014. **52**, N 4. P. 1137. doi:10.1007/s10910-014-0332-2. ISSN 0259-9791.
[11] *Шляйх В. П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве / Перевод с англ. Под ред. В. П. Яковлева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
[12] *Torres–Vega Go., Frederick John H.* // J. Chem. Phys. 1993. **98**, N 4. P. 3103.
[13] *Torres–Vega Go., Frederick John H.* // J. Chem. Phys. 1990. **93**, N 12. P. 8862.
[14] *Bopp F.* // Ann. Inst. H. Poincarre. 1956. **15**. P. 81.
[15] *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* // Annals of Physics. 2019. **401**. 59?90.
[16] *Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Perepelkin E. E.* // Doklady Mathematics. 2013. **88**, N 1. P. 457.
[17] *Simpao, Valentino A.* // J. of Math. Chem. 2014. **52**, N 4. P. 1137. doi:10.1007/s10910-014-0332-2. ISSN 0259-9791.
[18] *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Burlakov E. V.* J. of Stat. Mech. Theory and Experiment. 2020. № 053105.
[19] *Vlasov A. A.* Many–Particle Theory and Its Application to Plasma. New York: Gordon and Breach, 1961.
[20] *Vlasov A. A.* Statisticheskie funkcii raspredelenija. M.: Nauka, 1966.
[21] *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* // J. of Stat. Mech. Theory and Experiment. 2017. № 053207.
[22] *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* // J. Stat. Mech. 2015. P05019.
[23] *Bohm D.* // Phys. Rev. 1952. **85**. P. 166.
[24] *Bohm D., Hiley B. J., Kaloyerou P. N.* // Phys. Rep. 1987. **144**. P, 321.
[25] *Bohm D., Hiley B. J.* The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory. London: Routledge, 1993.
[26] *de Broglie L.* Une interpretation causale et non lineaire de la mecanique ondulatoire: la theorie de ladouble solution. Paris: Gauthiers-Villiars, 1956.
[27] *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I, Inozemtseva N. G.* // Annals of Physics, 2016. DOI: 10.1016/j.aop.2016.11.012

Schrödinger equation in phase space based on the Vlasov-Moel approximation

E. E. Perepelkin[1,2,3,a], **B. I. Sadovnikov**[1], **N. G. Inozemtseva**[2,3], **E. V. Burlakov**[1,3]

[1]*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow, 119991 Russia*
[2]*Dubna State University. Dubna, 141980 Russia*
[3]*Moscow Technical University of Communications and Informatics*
Moscow, 111024 Russia
E-mail: [a]*pevgeny@jinr.ru*

The paper provides a comparative analysis of three options for constructing the Schrцdinger equation in phase space: the Torres-Vega method, from the Vlasov equation and the Moel equation. Each approach gives its own version of the Schrцdinger equation in phase space. Exact solutions corresponding to a quantum harmonic oscillator are considered for each equation.

PACS: 05.20.Dd, 03.65.Wj, 05.30-d.
Keywords: Schrödinger equation in phase space, Vlasov equation, Vlasov–Moel approximation.
Received 01 October 2020.

Сведения об авторах

1. Перепёлкин Евгений Евгеньевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: pevgeny@jinr.ru.
2. Садовников Борис Иосифович — доктор физ.-мат. наук профессор, зав. кафедрой; e-mail: sadovnikov@phys.msu.ru.
3. Иноземцева Наталья Германовна — доктор физ.-мат. наук профессор; e-mail: nginozv@mail.ru.
4. Бурлаков Евгений Владимирович — аспирант; e-mail: ev.burlakov@physics.msu.ru.