Параметрическое моделирование виброакустических дискретно–временных случайных процессов и применение для идентификации колебательных систем

И. А. Карпов[1,2*]
[1]*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова*
Россия, 101000, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4
[2]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 07.11.2019; Подписана в печать 08.11.2019)

Авторегрессионные модели виброакустических сигналов применены для идентификации параметров колебательных систем, в частности, для измерения их демпфирования.

PACS: 43.40.At УДК: 534.21
Ключевые слова: дискретно-временные случайные процессы, параметрические модели, идентификация параметров, коэффициент потерь.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время анализ колебаний виброакустических систем основан в основном на разложении полей давления или вибраций по собственным формам колебаний или, иначе, по нормальным модам [1]. Для многих простых систем модальные параметры (масса, жесткость, потери) можно рассчитать теоретически. Однако, для сложных систем определение модальных параметров требует применения экспериментальных методов. Таких методов разработано уже немало, и они составляют большой раздел виброакустики, называемый модальным анализом [2]. Обычно измерения производятся в частотной области путем силового воздействия на систему и анализа спектра отклика. Чтобы выделить отдельные моды, требуется несколько различных силовых воздействий. Особые трудности вызывает определение коэффициентов потерь. Если в спектре отклика системы есть определенные ярко выраженные резонансы, коэффициенты потерь при определенных условиях можно оценить по ширине резонансных пиков. Но, если резонансов много и они накладываются друг на друга, задача сильно усложняется. Есть также методы определения модальных параметров (собственных частот и демпфирования) во временной области. Многие из них основаны на измерении и анализе свободных затухающих колебаний систем. Все они используют метод Прони разделения экспоненциальных сигналов [3], который очень чувствителен к наличию помех. В последнее время для идентификации модальных параметров стали также применять так называемые параметрические методы, основанные на изучении дискретно-временных случайных процессов [4]. В данном докладе излагается один из таких методов, основанный на авторегрессионных моделях случайных колебаний виброакустических систем. Он применен к измерению их модальных характеристик и, главное, их демпфирования.

*E-mail: karpov@imash.ac.ru

1. АР-МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ВИБРОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Анализ виброакустических сигналов обычно производится с помощью компьютеров, для чего они предварительно дискретизируются и представляются в виде так называемых временных рядов. Если $x(t)$ — непрерывный случайный сигнал, то его дискретным временным рядом является последовательность $x[1]$, $x[2]$, ..., $x[N]$ из N отсчетов сигнала в моменты времени $t_n = nT$ (так что $x[n] = x(nT)$), где $T = 1/Fs$, Fs — частота дискретизации, $n = 1, \ldots, N$.

Идея авторегрессионной (АР) модели дискретного временного ряда состоит в его представлении в виде конечно-разностного уравнения, позволяющего вычислить члены ряда по его предыдущим значениям [5]:

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2] + \ldots - a_p x[n-p]. \quad (1)$$

Модель содержит конечное число p параметров a_j, и, если задать p начальных значений x, то все последующие значения вычисляются по формуле (1). Например, синусоидальная дискретная функция частоты ω определяется двухпараметрической АР-моделью:

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2]$$

с коэффициентами $a_1 = -2cos(\omega T)$, $a_2 = 1$.

Для случайного временного ряда в модель (1) нужно добавить в правую часть возбуждение в виде какой-либо известной случайной дискретной функции $w[n]$:

$$x[n] = -\sum_{j=1}^{p} a_j x[n-j] + w[n]. \quad (2)$$

В качестве $w[n]$ чаще всего используется белый шум. Модель (2) можно интерпретировать как выходной сигнал дискретного фильтра, описываемого параметрами a_j, на вход которого подается дискретный белый шум. Как следует из теории [3], если коэффициенты a_j известны, то все корреляционные, спектральные и др. характеристики случайного процесса могут быть вычислены аналитически по простым формулам.

В данном докладе задача состоит в том, чтобы по заданной экспериментально измеренной случайной временной последовательности $x[n]_0^N$ построить ее АР-модель, то есть найти ее коэффициенты a_j, а уже по ним найти материальные параметры исследуемой виброакустической системы, в частности, оценить демпфирование. Предполагается, что это проще и экономичнее по объему вычислений, чем идентифицировать материальные параметры по измеренным спектральным характеристикам общепринятыми методами [2].

2. АР-МОДЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Прежде чем решать поставленную задачу, нужно выяснить, колебания каких именно выброакустических систем допускают АР-описание. В этом параграфе показано, что вынужденные колебания любой линейной акусто-упругой колебательной системы с конечным числом P степеней свободы могут быть описаны АР-моделью (2) с конечным числом параметров p_j, равным $p = 2P$.

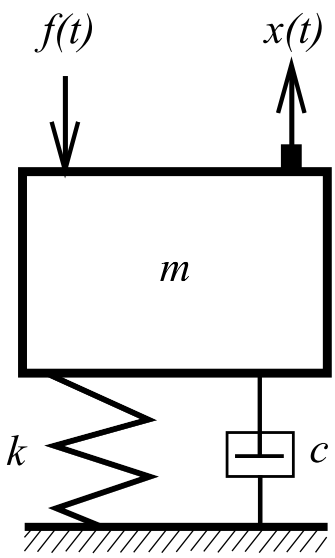

Рис. 1: Колебательная система с одной степенью свободы

Рассмотрим сначала простейшую механическую колебательную систему с одной степенью свободы, изображенную на рис. 1. Она состоит из трех элементов, т.е. материальных параметров — массы m, упругости k и коэффициента вязкого трения c и совершает вынужденные колебания под действием силы $f(t)$. Выходным сигналом является смещение массы $x(t)$, которое удовлетворяет известному уравнению:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

или, после деления на m:

$$\ddot{x}(t) + \eta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \tfrac{1}{m} f(t). \tag{3}$$

Здесь введены обозначения $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота недемпфированной системы, $\eta = c/m\omega_0$ — коэффициент потерь. Уравнение типа (3) описывает также вынужденные колебания акустического резонатора Гельмгольца, электрического колебательного контура и других колебательных систем с одной степенью свободы.

Из уравнения (3) можно получить конечно-разностное уравнение, если дискретизировать $x(t)$ и заменить непрерывные производные конечными разностями:

$$\begin{gathered} \dot{x}(nT) \cong \{x(nT) - x((n-1)T)\}/T, \\ \ddot{x}(nT) \cong \{x(nT) - 2x((n-1)T) + x((n-2)T)\}/T^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Подстановка (4) в (3) дает уравнение (2) с двумя параметрами, которое и является АР-моделью выходного сигнала системы на рис. 1. Если у системы P степеней свободы и она описывается линейным дифференциальным уравнением порядка $2P$, то аналогично из него можно получить АР-модель с $2P$ параметрами. Этим доказано, что любая механо–акустическая линейная колебательная система с конечным числом степеней свободы представима в виде АР-модели.

Следует отметить, что замена непрерывных производных конечными разностями — операция неточная, так что полученная таким образом АР-модель является приближенной. Существует и математически точное соответствие между непрерывным уравнением и его АР-моделью. Вывод этого соответствия достаточно сложный и здесь не приводится (см., например, [6]), но общий результат тот же: число коэффициентов АР-модели в точности совпадает с порядком непрерывного уравнения. Соответственно и число материальных параметров непрерывного уравнения равно числу коэффициентов АР-модели, и между ними существует однозначная математическая связь. Например, для уравнения (3) коэффициенты АР-модели (2) равны:

$$\begin{gathered} a_1 = -2e^{\frac{-\eta(\omega_0 T)}{2}} \cos\left[(\omega_0 T)\sqrt{1 - \tfrac{\eta^2}{4}}\right], \\ a_2 = e^{-\eta(\omega_0 T)}. \end{gathered} \tag{5}$$

Наоборот, если коэффициенты АР-модели известны, по ним можно найти материальные параметры рассматриваемой системы. В частности, коэффициент потерь системы на рис. 1 оказывается равным:

$$\eta = -\frac{1}{\omega_0 T}\ln(a_2). \tag{6}$$

3. АЛГОРИТМ РАСЧЁТА АР-ПАРАМЕТРОВ

Пусть имеется линейная виброакустическая система с $p/2$ степенями свободы, вход которой возбуждается случайным сигналом с нулевым средним, единичной дисперсией и с равномерным спектром в выбранном

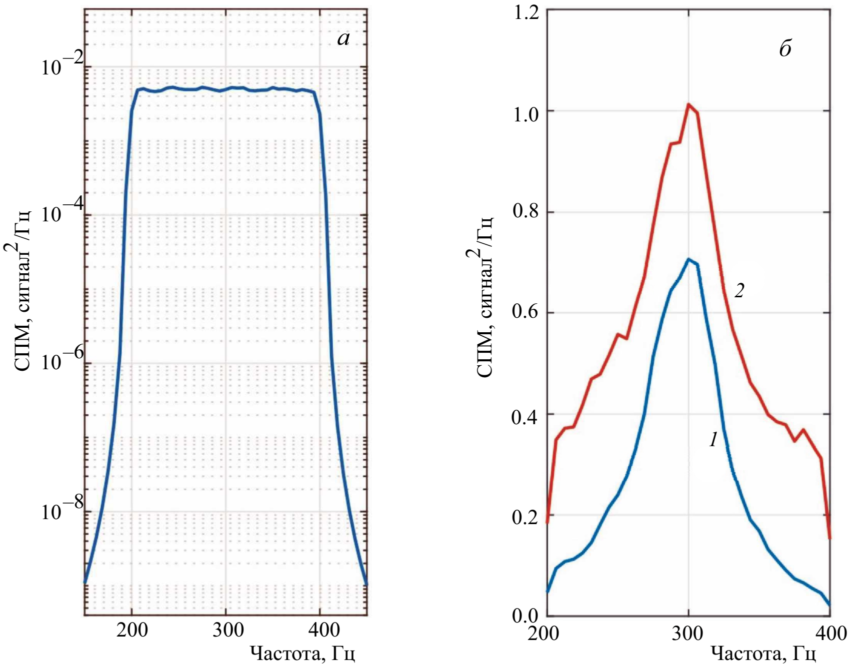

Рис. 2: Спектральные плотности мощности (СПМ) входного сигнала (*а*) и выходного сигнала (*б*) для отношения сигнал/шум (ОСШ) 40 дБ (*1*) и 0 дБ (*2*)

диапазоне частот. И пусть экспериментально измерены дискретно-временные последовательности на входе $\{w[n]\}_p^N$ и на выходе $\{x[n]\}_0^N$ системы. Составим систему $N-p+1$ уравнений АР-модели (2) с $p+1$ неизвестными параметрами: $a_1, a_2, \ldots, a_p$, b, где b — коэффициент усиления входного сигнала:

$$\begin{bmatrix} x[p] & x[p-1] & \ldots & x[0] \\ x[p+1] & x[p] & \ldots & x[1] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x[N] & x[N-1] & \ldots & x[N-p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_p \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} w[p] \\ w[p+1] \\ \ldots \\ w[N] \end{bmatrix} \tag{7}$$

или в краткой записи $Xa = bw$.

Число уравнений здесь значительно больше числа неизвестных, поэтому решение можно найти из условия минимума квадратичной невязки или другими способами. По своему смыслу уравнения, полученные таким образом, будут близки к известным уравнениям Юла–Уолкера [3], но будут отличаться от его классического варианта: в качестве возбуждающего сигнала в нашем случае будет использоваться не белый δ–коррелированный шум, а его вариант, отфильтрованный в рабочем диапазоне частот.

4. ПРОВЕРКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ МЕТОДА

Алгоритм (7) был написан в виде программы в среде MATLAB и проверен на тестовой модели колебательной системы с одной степенью свободы типа (3), имеющей собственную частоту $f_0 = 300$ Гц и коэффициент потерь $\eta_0 = 0.2$. Рабочим диапазоном частот был 200 - 400 Гц. В качестве входного сигнала $w(t)$ использовался случайный шум с постоянным спектром, единичной дисперсией (рис. 2, a) и амплитудой $b = 0.2$. Выходной сигнал $x[n]$ описывался АР-моделью (2), (7) с $p = 2$. Кроме этого, к выходному сигналу $x[n]$ прибавлялся некоррелированный внешний шум $u[n]$ с отношением сигнал/шум (ОСШ), равным

$$\text{ОСШ} = 20 \lg \frac{\text{СКЗ}(x)}{\text{СКЗ}(u)}, \tag{8}$$

где СКЗ означает среднеквадратичное значение. Целью эксперимента было определить по входному и выходному сигналам коэффициенты АР-модели (a_1, a_2, b) и по ним вычислить материальные параметры системы, в частности, ее коэффициент потерь (6) и оценить его точность в зависимости от отношения сигнал/шум (8).

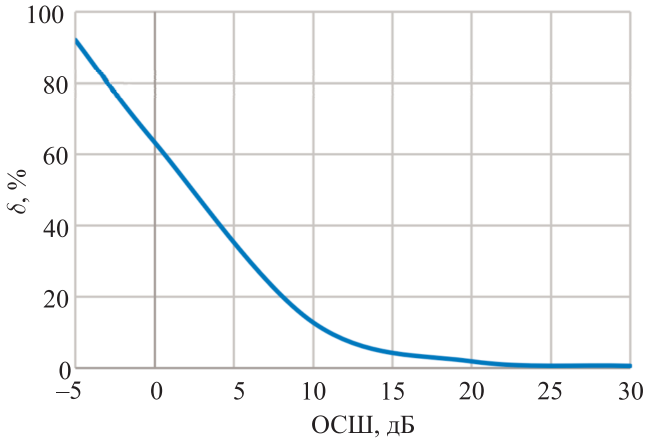

Рис. 3: Относительная ошибка определения коэффициента потерь в зависимости от отношения сигнал/шум (ОСШ)

Некоторые наиболее важные результаты эксперимента представлены на рис. 2 и 3. Отметим, что собственная частота системы, определенная по АР-модели с высокой точностью (± 0.5 Гц) практически не зависит от величины внешнего шума (8). С высокой точностью определяются и коэффициент потерь системы: для ОСШ $>$ 10 дБ относительная ошибка его определения $|\eta - \eta_0|/\eta_0$ не превышает 10% (рис. 3). Примечательно также, что для получения этих результатов потребовалось значительно (на порядок) меньше экспериментальных данных и, соответственно, меньше вычислений, чем традиционными спектральными методами. Отметим, что общепринятый метод определения коэффициента потерь по ширине резонансного пика здесь дает для кривых 1 и 2 на рис. 2, *б* вместо $\eta_0 = 0.2$ значения $\eta_1 = 0.207$ и $\eta_2 = 0.332$, когда по авторегрессионной модели получены $\eta_1^{AR} = 0.2$ и $\eta_2^{AR} = 0.323$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что применение параметрического авторегрессионного моделирования случайных дискретно-временных сигналов для идентификации материальных параметров виброакустических систем, в частности, характеристики демпфирования, более эффективно по объему вычислений и точности, чем традиционные методы на основе спектрального анализа. Построен алгоритм и программа для построения авторегрессионных моделей. Эксперимент подтвердил работоспособность предложенного подхода.

Автор выражает благодарность профессору Бобровницкому Ю. И. за постановку задачи и внимание к работе.

[1] *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
[2] *Ewins D. J.* Modal Testing: Theory and Practice. England: Research Studies Press. 1986.
[3] *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
[4] *Cooper J. E.* // Int. J. of Analytical and Experimental Modal Analysis. 1989. **4**, N 1. P. 51.
[5] *Бокс Дж., Дженкинс Г. Д.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2-ух томах. М.: Мир, 1974.
[6] *Pi Y. L., Mickleborough N. C.* // J. of Engineering Mechanics. 1989. **115**, N 10. P. 2232.

Parametric modeling of vibroacoustic discrete-time random processes and application for the identification of oscillatory systems

I.A. Karpov[1,2]
[1]*Institute of Mechanical Engineering named after A.A. Blagonravov, Moscow 101000, Russia*
[2]*Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*
E-mail: [a]karpov@imash.ac.ru

Autoregressive models of vibroacoustic signals are used to measure parameters of vibrational systems, in particular, to measure their losses.

PACS: 43.40.
Keywords: discrete-time random processes, parametric models, identification of parameters, loss factor.
Received 7 November 2019.

Сведения об авторах

Карпов Иван Андреевич — инженер-исследователь; тел.: (926) 856-64-60, e-mail: karpov@imash.ac.ru.