

Анализ бесконечной периодической структуры и ее конечной части с учетом слабой нелинейности

А. А. Хватов*

*Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
факультет естественнонаучного и гуманитарного образования,
кафедра физики. Россия, 190121, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская, д. 3
(Статья поступила 11.11.2019; Подписана в печать 11.11.2019)*

Рассмотрен вопрос применимости теории Флоке на примере слабо нелинейной структуры. Теория Флоке, применяемая в линейных случаях, не применима в случаях, где не выполняется свойство трансляционной симметрии. Для попытки распространить теорию Флоке на нелинейный случай была рассмотрена задача об акустических волноводах произвольного типа, соединенных пружиной с нелинейной жесткостью. Такого рода структура, очевидно, не имеет свойства трансляционной симметрии. Однако, с некоторыми оговорками, такие задачи можно так же рассматривать в рамках теории Флоке. С другой стороны, можно рассмотреть задачу о собственных частотах конечной части, которая не имеет ограничений на вид акустического волновода и его свойства. Таким образом, можно рассмотреть подобную структуру с двух сторон и оценить предсказания полос запираания, полученные в рамках двух различных задач.

Для наглядности, взята задача предсказания полос запираания в бесконечной периодической слабо нелинейной структуре, состоящей из балок, соединенных пружиной с нелинейной жесткостью.

PACS: 43.40.Ga

УДК: 534.21.

Ключевые слова: периодические структуры, полосы запираания, собственные частоты, нелинейная задача, результат системы.

ВВЕДЕНИЕ

Затухание потока энергии, вызванного периодичностью в линейных системах — классическая задача виброизоляции, исследованная во множестве работ, начиная с работы Л. Бриллюэна [1]. Распределенные массы на пружинах, решетки и непрерывные балочные модели, пластины и цилиндрические оболочки являются хорошо исследованы в литературе в рамках исследования распространения волн Блоха-Флоке в механических системах. Однако, линейная постановка не является темой настоящей работы и потому анализ источников с линейной постановкой опускается.

В классической постановке решена задача о периодическом стержне или балке [2]. Как правило область применения теоремы Флоке ограничиваются этими примерами. С помощью такой одномерной постановки задачи можно получить свойства, которые справедливы для всех периодических линейных операторов. Существует связь между полосами запираания (спектром) бесконечной структуры и собственными частотами конечной ее конечной части [3]. В наиболее общем виде это показано для оператора задачи Релея-Лэмба в [4].

При переходе к нелинейным задачам, например задачи о круговой мембране или пластине, можно получить похожие соответствия [5]. Однако, в таких задачах требуется обобщение теоремы Флоке. Подобное обобщение позволило бы учитывать эффекты нелинейно-

сти. Теорема Флоке, которая справедлива в линейной постановке, не может быть использована, так как она требует трансляционной симметрии дифференциального оператора. Поэтому, большинство работ в которых ставится нелинейная задача используют «слабую» нелинейность, которая позволяет применять устоявшиеся методы, такие как метод многих масштабов [6]. В качестве альтернативы так же используется метод гармонического баланс [7], который может быть дополнен методом вариации амплитуд [8].

В литературе обычно рассматривают распределенные в одно- или двумерных решетках массы на нелинейных (с квадратичной или кубической жесткостью) пружинах [6]. Реже рассматриваются слабонелинейные непрерывные структуры [8, 9].

В настоящей работе предпринята попытка исследовать нелинейности, возникающие при нелинейном взаимодействии между частями периодической структуры. А именно, с помощью добавления пружины с нелинейной жесткостью между частями. Более подробно постановка задачи описана в Разделе 1. Поставленная задача рассмотрена с двух сторон, с точки зрения анализа потока энергии в Разделе 2 и с точки зрения анализа собственных частот (в данном случае, скелетной кривой) в Разделе 3. Приведено аналитическое решение с помощью метода результатов, соотнесены предсказания обоих подходов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим структуру, периодическую в продольном направлении. Предполагается, что каждый сегмент соединен с левым и правым соседом с помощью нелиней-

*E-mail: matematik@student.su

ной пружины. Схема периодической структуры показана на рис. 1.

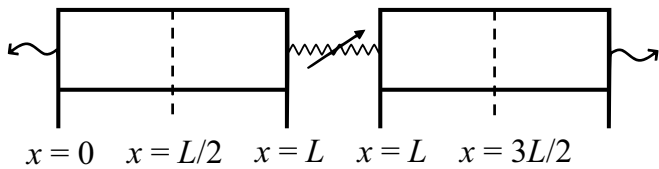


Рис. 1: Схема периодической структуры (штриховая линия — граница симметричной ячейки)

Каждый сегмент может иметь собственное уравнение движения. Не важно, насколько различны дифференциальные операторы для сегментов, предполагается, что, начиная с определенного сегмента, структура повторяется.

Для простоты, будем считать, что все части имеют одинаковый дифференциальный оператор, представленный одномерным волновым уравнением

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Будем считать, что общий вид решения уравнения (1) для сегмента с номером i имеет вид

$$u_i(x, t) = (b_{i,1} \exp(-ikx) + b_{i,2} \exp(ikx)) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Заметим, что в уравнении (2) можно учитывать гармоники более высокого порядка по времени, однако, их вклад в картину полос загибания незначителен.

Между сегментами поставим следующие условия стыковки

$$\begin{aligned} EAu'_1(L, t) &= EAu'_2(L, t), \\ EAu'_1(L, t) + K_L [u_1(L, t) - u_2(L, t)] + \\ &+ K_{NL} [u_1(L, t) - u_2(L, t)]^3 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

которые можно интерпретировать как вставку пружины с нелинейной жесткостью (в этом случае с жесткостью, пропорциональной кубу смещения) между сегментами.

С помощью $f(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ здесь и далее будем обозначать силу, действующую в продольном направлении. Считается, что каждая пружина имеет линейную жесткость, K_L и нелинейную жесткость K_{NL} . При отсутствии пружины, то есть при $K_L \rightarrow \infty$, $K_{NL} \rightarrow \infty$, из второго условия вытекает условие непрерывности перемещений.

Чтобы перейти к безразмерным координатам, продольная координата может быть нормирована на L . Отсюда безразмерная продольная координата имеет вид $\bar{x} = \frac{x}{L}$ (в дальнейшем черта будет опускаться) и безразмерное перемещение имеет вид $\bar{u} = \frac{u}{L}$ (в дальнейшем черта будет так же опускаться). Так же введем безразмерные параметры $\kappa = \frac{K_L L}{EA}$ — безразмерный параметр линейной жесткости, $N = \frac{K_{NL} L^2}{K_L}$ — безразмерный параметр нелинейной жесткости. В дальнейшем

так же будет использоваться безразмерный параметр частоты $\Omega = \frac{\omega L}{c}$.

Обычно, периодические структуры рассматриваются в контексте задач виброизоляции. Обычные аналитические методы для линейных задач виброизоляции, подобные теореме Флоке, не применимы напрямую для задач, содержащих нелинейные элементы. Тем не менее, можно оценить виброизоляционные свойства с помощью анализа потока энергии.

2. АНАЛИЗ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Существование и положение зон Флоке (полос загибания и пропуска) можно проверить с помощью численного анализа потока энергии в задаче о вынужденных колебаниях при условии нелинейной стыковки.

Для решения задачи о вынужденных колебаниях требуется поставить гармонически действующую силу на одной границе и условие Зоммерфельда на бесконечности на другой. Эти условия могут быть записаны как показано в уравнении

$$\begin{aligned} f_1(0, t) &= (b_{1,2} - 1) \cos(\omega t), \\ b_{last,2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (2) в условия (3)–(4), мы получаем систему нелинейных полиномиальных уравнений, которую можно представить в виде

$$(L + F) \cos(\omega t) + C \cos^3(\omega t) = 0. \quad (5)$$

В (5) с помощью L обозначен вектор слагаемых системы (3)–(4) с неизвестными амплитудами перемещений $b_{i,j}$, содержащие сомножитель $\cos(\omega t)$, с помощью F — слагаемые без неизвестных амплитуд, а с помощью C — часть системы, содержащая сомножитель $\cos^3(\omega t)$.

С помощью метода гармонического баланса в выражении $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}(3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$ можно опустить слагаемое $\cos(3\omega t)$ более высокого порядка по частоте и тогда можно рассматривать гармоническое состояние с временной зависимостью $\cos(\omega t)$. В таком случае итоговая система уравнений будет иметь вид

$$L + \frac{3}{4}C = -F. \quad (6)$$

Система (6) для n периодических вставок состоит из $n - 1$ кубического уравнения с неизвестными амплитудами $b_{i,j}$, тогда как оставшаяся часть системы остается линейной. Подобную систему можно решить с помощью численных методов. Так же существует аналитический метод с использованием результатов для систем полиномиальных уравнений, более подробно он описан в [10]. Приведем ниже способ получения результата для системы (6) опуская общую теорию.

Сначала, определим результат двух полиномов. Пусть $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(x_1, \dots, x_n)$ представляют собой

полиномы по переменным x_1, \dots, x_n . Полиномы можно записать в виде (предполагается, что все значения переменных кроме x_k фиксируются) $A = \sum_{i=0}^n a_i x_k^i$ и $B = \sum_{j=0}^m b_j x_k^j$. Пусть полином A имеет корни λ_i по переменной x_k и полином B имеет корни μ_j по той же самой переменной x_k . Тогда, можно записать результат двух полиномов как

$$\begin{aligned} \text{res}_{x_k}(A(x_1, \dots, x_n), B(x_1, \dots, x_n)) &= \\ &= a_0^e b_0^d \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq e}} (\mu_j - \lambda_i). \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью индекса x_k показано, что результат берется по переменной x_k , то есть другие переменные фиксируются и считаются постоянными. Так же результат двух полиномов может быть найден как определитель матрицы Сильвестра, которая содержит коэффициенты при степенях заданной переменной a_i, b_j .

Чтобы найти результат системы более чем из двух полиномов удобно пронумеровать уравнения. Рассмотрим однородную систему (6) из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}$. Пронумерованная система уравнений может быть записана как

$$L + \frac{3}{4}C = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Чтобы найти результат системы (8) нужно определить множество всех возможных перестановок неизвестных размера $n - 1 = 3$. Обозначим его как

$$V = \{(b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, \dots), \dots, (b_{2,2}^1, b_{2,1}^1, b_{1,2}^1, \dots)\}.$$

Множество V содержит $A_3^4 = 24$ элементов, где $A_j^i = \frac{i!}{(i-j)!}$. Чтобы найти результат для каждого элемента из V нужно провести процедуру описанную ниже.

Для краткости, мы рассмотрим только перестановку $(b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1})$. Сначала, берутся попарные результаты по первой переменной $b_{1,1}$ из данной перестановки. Пары из системы (8) можно взять произвольно в количестве $n - 1$. Этот шаг можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= \text{res}_{b_{1,1}}(e_1, e_2), \\ r_{1,2} &= \text{res}_{b_{1,1}}(e_1, e_3), \\ r_{1,3} &= \text{res}_{b_{1,1}}(e_1, e_4). \end{aligned} \quad (9)$$

На втором шаге, берутся произвольные пары результатов из первого шага (9) и результат ищется по следующей переменной $b_{1,2}$ в перестановке. Второй шаг можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= \text{res}_{b_{1,2}}(r_1, r_2), \\ r_{2,2} &= \text{res}_{b_{1,2}}(r_1, r_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Финальный шаг для любого числа уравнений взятие финального результата по последней оставшейся переменной в перестановке. В данном случае эта переменная $b_{2,1}$:

$$r_{3,1} = \text{res}_{b_{2,1}}(r_{2,1}, r_{2,2}). \quad (11)$$

Получившееся уравнение (11) содержит неизвестную амплитуду $b_{2,2}$ как параметр, а так же другие безразмерные величины κ, N, Ω определенные выше.

Результантом системы (8) называется наименьшая общая часть среди всех возможных финальных шагов (11) для всех возможных перестановок из множества V .

В случае неоднородной системы, такой как (6), к каждой из множества всех возможных перестановок неизвестных

$$V = \{(b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, \dots), \dots, (b_{2,2}^1, b_{2,1}^1, b_{1,2}^1, \dots)\}$$

мы добавляем вспомогательную переменную a и составляем однородную систему с неизвестными $(a, b_{1,1}, b_{1,2}, \dots)$ по следующему правилу.

Сначала, каждое уравнение в системе домножается на a^{k_1} , где k_1 — наивысшая степень с которой первая переменная перестановки (например, $b_{1,1}$) входит в уравнение. Следующий шаг, заменить все остальные переменные по правилу

$$b_{1,2}^1 \rightarrow \frac{b_{1,2}^1}{a}, \dots, b_{n,2}^k \rightarrow \frac{b_{n,2}^k}{a}.$$

Полученная система обладает двумя свойствами: первое, она однородная и второе ее решение при $a = 1$ является так же и решением неоднородной системы. Однородная система с первой переменной в перестановке $b_{1,1}$ может быть записана как

$$S(b_{1,1}^1, a, b_{1,2}^1, \dots, b_{n,2}^k) = 0. \quad (12)$$

Поиск результата системы (12) полностью повторяет последовательность (9)-(11). Отметим, что при этом множество всех перестановок меняется на $\tilde{V}(b_{1,1}) = \{a, b_{1,2}, \dots, b_{n,2}\}$.

После того как $2n$ неизвестных амплитуд найдены численно или аналитически, поток энергии через структуру с n периодическими вставками может быть найден как

$$E_n(x, \Omega) = -\frac{1}{2}i\Omega u(x, \Omega) f(x, \Omega). \quad (13)$$

Отметим, что в формуле (13) используется предположение $f \rightarrow 0$, а следовательно, поток энергии не зависит от вида нагрузки при числе сегментов, стремящемся к бесконечности. Обычно, эффекты виброизоляции в периодических структурах показываются с помощью оценки потерь на вставку:

$$IL_n(x, \Omega) = \frac{1}{10} \log_{10} \left(\frac{E_0(\Omega)}{E_n(x, \Omega)} \right). \quad (14)$$

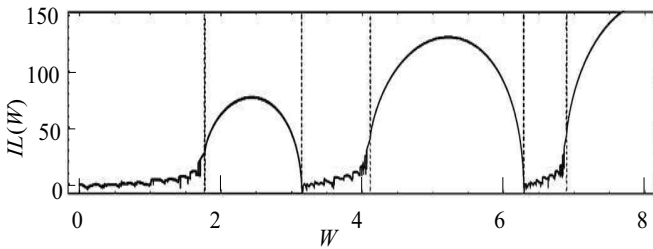


Рис. 2: Потери на вставку $N = 0.3$ (число ячеек $n = 10$, сплошная линия), собственные частоты симметричной ячейки (вертикальные штриховые линии)

В (14) с помощью $E_0(\Omega)$ обозначен поток энергии в структуре без периодических вставок. Отметим, что в нелинейном случае закон сохранения энергии не выполняется и значения потока энергии берутся в точке, где заканчивается периодическая вставка, то есть $x = n + 1/2$. На рис. 2 показан пример анализа потерь на вставку для $n = 10$ периодических вставок для параметра нелинейности $N = 0.03$.

В результате анализа потока энергии можно выявить следующие свойства. Зоны затухания сдвигаются с изменением параметра N . Зоны затухания как сужаются, так и расширяются. Так как вычисление потока энергии — затратная в вычислительном плане задача, требуется аппроксимация для оценки положения зон Флоке без вычисления потока энергии.

Одной из таких аппроксимаций может служить анализ собственных частот ячейки периодичности [3–5]. Анализ такой ячейки для случая, описанного в статье приведен в следующем разделе.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЯЧЕЙКИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Следующий шаг в анализе свойств периодической структуры — анализ ячейки периодичности, границы которой выделены на рис. 1. Конечную часть, выделенную на рис. 1, мы будем называть симметричной ячейкой периодичности. Подобная структура, снабженная симметричными граничными условиями в линейном случае, имеет собственные частоты, лежащие в точности на границе полос запираия [3]. Несмотря на нелинейность, мы все еще можем найти собственные частоты с помощью метода гармонического баланса. В случае уравнения (1), симметричные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(1/2) &= 0, \\ u_2(3/2) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_1(1/2) &= 0, \\ f_2(3/2) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Следуя терминологии [2], мы будем называть (15) условиями типа А и (16) условиями типа В. Вместе с условиями стыковки (3), мы получаем задачи о собственных частотах типов А и в соответственно. В статьях [3–5] показано, что задачи типов А и В полностью эквивалентны задаче нахождения границ полос запираия.

Для решения задачи на собственные частоты, требуется аналог определителя для системы с полиномиальными уравнениями. Можно вычислить результат [10] систем (3), (15) и (3), (16), который принимает итоговый вид

$$\begin{aligned} D_A(\beta, \Omega) &= -4\Omega \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \left(2\kappa \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \Omega \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) - 24\beta\kappa \sin^3\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right) = 0, \\ D_B(\beta, \Omega) &= 4\Omega^3 \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \left(-2\kappa \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \Omega \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) - 24\beta\kappa \cos^3\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Результат (17) содержит параметр $\beta = (b_{2,2}^1)^2 N$, который представляет собой произведение неизвестной амплитуды и безразмерного параметра нелинейной жесткости. Для определенности, предположим, что неизвестная амплитуда равна 0.1, то есть, например, $(b_{2,2}^1)^2 = 0.1$, и мы меняем только параметр нелинейной жесткости по закону $\beta = 0.1N$. Отметим, что для данного параметра β можно подобрать бесконечно много произведений значений неизвестной амплитуды $b_{2,2}^1$ и нелинейной жесткости N .

Для линейного случая ($N = 0$ или $\beta = 0$). можно доказать, что произведение D_A и D_B в точности эк-

вивалентно уравнению границ полос запираия. В общем случае такое доказательство затруднительно. Тем не менее, подобное свойство наблюдается и в случае круговой мембраны [5]. Зависимости $D_A = 0$ и $D_B = 0$ построены на рис. 3.

На рис. 3 строго вертикальные линии соответствуют модами без деформации пружины. Поэтому, они не меняются при изменении параметра нелинейности β . Подобные моды существуют и в линейном случае. Так как теория Флоке работает только для операторов с трансляционной симметрией, требуется формулировка обобщенной теоремы Флоке для де-

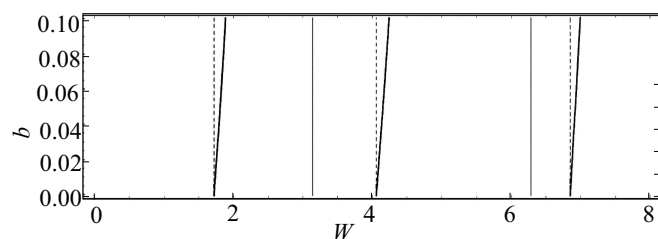


Рис. 3: Собственные частоты задач А и В типов для различных параметров (ось ординат) и собственные частоты линейной задачи (вертикальные штриховые линии)

тального анализа виброизоляционных свойств. Тем не менее, собственные частоты, показанные на рис. 3, могут служить, как минимум, аналитическим приближением в нелинейном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы показали с помощью анализа потока энергии, что полосы запираения существуют и для нелинейных задач. Параметр нелинейной жесткости может служить в качестве средства управления положением полос запираения. Для точного анализа полос запираения с помощью потока энергии требуется достаточное количество ячеек, что затрудняет использование подобного метода. Так же отметим, что метод гармонического баланса так же дает лишь приближение, тем не менее, моды более высокого порядка дают незначительный вклад в поток энергии.

Анализ собственных частот позволяет сократить число вычислений, необходимое для анализа полос запираения с одной стороны, и с другой более точно оценить границы полос запираения аналитическими методами.

- [1] Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М. ИИЛ. 1959.
 [2] Mead D.J. // J. Sound Vibr. 1996. **190(3)**, P. 495.
 [3] Hvatov A., Sorokin S. // J. Sound Vibr. 2015. **347**, P. 200.
 [4] Hvatov A., Sorokin S. // J. Sound Vibr. 2019. **440**, P. 332.
 [5] Hvatov A., Sorokin S. // J. Sound Vibr. 2018. **414**, P. 15.
 [6] Manktelow K.L., Leamy M.J., Ruzzene M. // Wave Motion. 2014. **51(6)**, P. 886.
 [7] Marathe A., Chatterjee A. // J. Sound Vibr. 2006. **289**,

- P. 871.
 [8] Sorokin V.S., Thomsen J.J. // P. Roy. Soc. A. 2016. **2186**.
 [9] Vakakis A.F., King M.E. // J. Ac. Soc. Am. 1995. **98(3)**, P. 1534.
 [10] Морозов А.Ю., Шакуров Ш.П. // ТМФ **163**, № 2, С. 222.

Analysis of a weakly-nonlinear periodic structure and its finite counterpart

A. Hvatov

¹Department of Physics, Saint-Petersburg State Marine Technical University
 Lotsmanskaya st., 3, Saint-Petersburg 190121, Russia
 E-mail: alex_hvatov@itmo.ru

The question of applicability of the Floquet theory to the weakly non-linear structures is considered. Usually, in the references, numerical solutions to the non-linear spring-mass problem are considered. Despite the amount of the numerical experiments considered, there is still no analytical solution. Moreover, Floquet theory expansion to the non-linear structures is still discussed.

Floquet theorem is only applicable to linear problems. The structures without transitional symmetry cannot be considered within the Floquet theory frame. As an attempt to expand the Floquet theorem to the non-linear case, the problem of the arbitrary acoustical waveguides joined with the non-linear stiffness spring is considered. Such a structure has not the transitional symmetry. However, the problem described above can be considered within the Floquet theory with some adjustments.

From the other hand, one could consider the eigenfrequency problem for a finite counterpart. The problem does not have a restriction on the properties of the waveguide. One could consider the waveguide within the two frameworks, described above and assess the stop-bands for the two different problems.

To illustrate this approach, the problem of the stop-band analysis the weakly non-linear problem is considered. In the paper solution illustrated with the rods connected with the non-linear stiffness, spring is considered. PACS: 43.40.Ga

Keywords: periodic structures, stop bands, eigenfrequencies, non-linear problem, system resultant.

Received 11 November 2019.

Сведения об авторах

Хватов Александр Александрович — ассистент кафедры физики; тел.: (812) 495-26-48, e-mail: matematik@student.su.