

Об отражении звука от криволинейных поверхностей в акустике помещений

М. А. Сумбатян,* Н. В. Боев†

Южный федеральный университет, Институт математики,
механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича.
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8 а.
(Статья поступила 17.11.2019; подписана в печать 25.11.2019)

В работе исследуется приближенный подход к отражению звука от криволинейных поверхностей, основанный на их замене набором плоских отражателей. Вопрос о точности такого приближения остается открытым. Настоящая работа предлагает новый метод решения данной актуальной проблемы. Рассматривается асимптотически точное решение, соответствующее лучевой теории звука. Явные формулы сравниваются с методом трассировки лучей (МТЛ).

PACS: 43.20.Dk, 43.20.Ef

Ключевые слова: отражение звука, криволинейная поверхность, кривизна, метод трассировки лучей, асимптотический подход, звуковые лучи.

ВВЕДЕНИЕ

Современный расчет акустических параметров помещений основан на вычислении импульсного отклика помещения. С этой целью используется метод трассировки лучей (МТЛ), как один из надежных методов наряду с другими [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Поскольку МТЛ на практике применяется к плоским отражающим границам, то при отражении звуковых лучей от искривленных поверхностей они заменяются набором плоских секций. О точности такого подхода практически ничего не известно. Данная работа посвящена сравнению описанного приближенного метода с точными результатами лучевой теории. Асимптотически точные результаты получены соответственно в двумерном и в трехмерном случае в работах авторов [7] и [8]. Некоторые частные случаи в трехмерной задаче исследуются в [9, 10, 11].

Заметим также, что МТЛ с успехом применяется в оптике [12, 13], в компьютерной графике [14, 15, 16, 17], а также в других областях.

1. КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ АМПЛИТУДЫ N РАЗ ПЕРЕОТРАЖЕННОГО ЛУЧА

Пусть из точки x_0 акустической среды на искривленную поверхность S препятствия падает сферическая высокочастотная монохроматическая волна. Для простоты, все отражающие поверхности являются идеально отражающими (абсолютно твердыми), т.е. все коэффициенты звукопоглощения $\alpha = 0$. Диффузией при отражении пренебрегаем. Ясно, что если корректно вычислить переотражение волны для идеальных отражателей, то учет звукопоглощения и диффузии является

более простой задачей.

Очевидно, давление в отраженной волне определяется направлением падения волны и малой окрестностью S^* точки зеркального отражения $y^* \in S^*$. Будем считать, что возможна реализация распространения акустической волны вдоль луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$, где точки зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ могут принадлежать как поверхности одного отражателя, так и N различным поверхностям. Волна принимается в точке x_{N+1} акустической среды. В коротковолновом приближении давление в точке приема определяется отражением волны от малых окрестностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ граничных поверхностей в точках зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$. Явное выражение давления в переотраженной волне выписывается на основе асимптотических оценок дифракционных интегралов в следующем виде [8]:

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{L_0} \frac{\exp \left\{ i \left[k \sum_{m=0}^N L_m + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N} - 2N) \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_{2N})|}} \times \prod_{n=1}^N \frac{\cos \gamma_n}{L_n}, \quad (1)$$

где $D_{2N} = (d_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, 2N)$ — симметричная матрица ленточной структуры с шириной ленты, равной семи. Параметр $\delta_{2N} = \text{sign} D_{2N}$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы D_{2N} .

Ненулевые элементы матрицы $D_{2N} = (d_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, 2N)$ имеют следующий вид, который ввиду симметрии матрицы, выпишем лишь для $j \leq i$: диагональные элементы:

$$\begin{Bmatrix} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{L_{n-1}} + \frac{1}{L_n} \right) \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2)$$

внедиагональные элементы:

$$d_{2n-1,2n} = - \left(\frac{1}{L_{n-1}} + \frac{1}{L_n} \right) \cos \alpha_n \cos \beta_n, \quad n = \overline{1, N}$$

$$d_{2n-1,2n+1} = \frac{\cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - a_{11}^n}{L_n}, \quad n = \overline{1, N-1}$$

$$d_{2n-1,2n+2} = \frac{\cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - a_{21}^n}{L_n}, \quad n = \overline{1, N-1}$$

$$d_{2n,2n+1} = \frac{\cos \alpha_{n+1} \cos \beta_n - a_{12}^n}{L_n}, \quad n = \overline{1, N-1}$$

$$d_{2n,2n+2} = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - a_{22}^n}{L_n}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

(3)

В формуле (2) величины $k_1^{(n)}$ и $k_2^{(n)}$ — главные кривизны поверхности в точке зеркального отражения y_n^* [18]. Матрица (a_{ij}^n) , $(i, j = 1, 2, 3)$ — ортогональная матрица перехода от базиса декартовой системы координат в точке y_{n-1}^* [19]. В приведенных формулах $\{-\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, -\cos \gamma_n\}$ — направление падающего, а $\{-\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, \cos \gamma_n\}$ — направление отраженного луча в точке y_n^* окрестности S_n^* , отнесенной к локальной системе координат.

Можно показать, что если все отражающие поверхности — плоские, т.е. если все $k_1^{(n)} = k_2^{(n)} = 0$, то справедливы очевидные физические представления о том, что луч распространяется так, как будто нет никаких отражений, а расстояние от источника до приемника равно полной длине пробега луча после всех его реальных переотражений.

2. НАСТРОЙКА ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА НА ПЛОСКИХ ОТРАЖАТЕЛЯХ

Для настройки алгоритма МТЛ начнем с простого случая плоских отражателей. Рассмотрим параллелепипедную комнату размером $16 \times 16 \times 6$ м (рис. 1). Из источника $S1 = (-2, 6, 1.5)$ м выпускается N звуковых лучей равномерно по всем направлениям излучения. В нашем алгоритме было взято порядка 5 миллионов лучей.

Сначала тестируется корректность МТЛ при распространении сферической волны в неограниченном пространстве без отражений. Вводится опорный сигнал — акустическое давление в приемнике $R3 = (0, 6, 1.5)$, расположенном на оси симметрии помещения на расстоянии $r = 2$ от источника $S1$. В этом случае принятый сигнал равен $E_0 = |p_0|^2 = 1/r^2 = 1/4$, или в децибелах: $E_0, dB = 10 \lg(1/4) = -6.0 dB$ [20]. Согласно теории МТЛ [1, 2, 3], следует выбрать малую сферическую ε -окрестность приемника, в которой регистрируются пришедшие лучи, принимаем $\varepsilon = 0.2$ м.

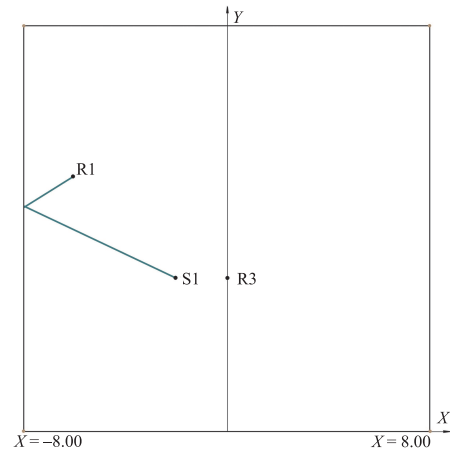


Рис. 1: Вид в плане тестовой комнаты с плоскими границами

При этом число лучей, попавших в ε -окрестность, оказалось равно $N_0 = 12480$. Данное число лучей соответствует уровню принимаемого сигнала $-6.0 dB$.

Дальнейшее тестирование разработанного алгоритма МТЛ произведем для однократного отражения от плоской границы. С этой целью рассмотрим однократное отражение луча $S1 - R1$ при отражении от левой стенки, $R1 = (-6, 10, 1.5)$. Согласно теории, изложенной в предыдущей разделе, значение энергии принятого импульса равно $E_{1-1}^1 = 1/r^2 = 1/80$, или в децибелах $E_{1-1}^1, dB = 10 \lg(1/80) = -19.0 dB$, т.к. полный пролет луча $r = 4\sqrt{5} = 8.94$. Поскольку источник $S1$ и приемник $R1$ расположены в одной горизонтальной плоскости, то в этой же плоскости распространяется и траектория луча. Нижние индексы 1-1 у обозначения энергии E_{1-1}^1 означают источник 1 — приемник 1, а верхний индекс 1 показывает число отражений.

Сравним с полученным значением результат численного эксперимента в том же самом однократном отражении. С этой целью придадим всем другим граням комнаты, кроме левой, коэффициенты звукопоглощения $\alpha = 1$, тогда все лучи однократного отражения, зафиксированные в приемнике $R1$, наверняка отразились от левой стенки. При этом для выделенной левой стенки назначаем нулевой коэффициент звукопоглощения $\alpha = 0$. Для всех граней полагаем коэффициент диффузии $\delta = 0$, что выделяет зеркальное отражение от плоских граней в «чистом» виде. В проведенном численном эксперименте в точке приема было зафиксировано 624 луча, отразившихся от левой стенки. Тогда уровень принятого сигнала в децибелах на фоне опорного сигнала равен $E_{1-1}^1 - E_0, dB = 10 \lg(624/12480) = -13.0 dB$, что совпадает с вычисленным точным значением $(-19.0) - (-6.0) = -13.0 dB$.

Продолжим тестирование алгоритма в случае двукратного отражения от плоских граней. С этой целью источник $S1$ переместим вверх в точку $(-2, 14, 1.5)$ для получения симметричного двойного отражения (рис.2). Поскольку и в этом случае траектория луча

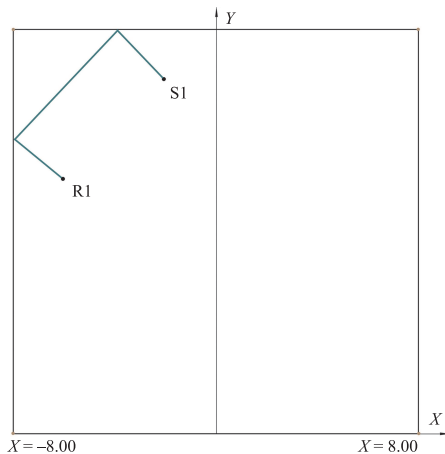


Рис. 2: Двойное отражение от плоских граней

остается в одной горизонтальной плоскости, то длина полного пробега луча равна $r = 8\sqrt{2} = 11.31$. В этом случае $E_{1-1}^2 = 1/r^2 = 1/128$, или в децибелах $E_{1-1}^2, dB = 10 \lg(1/128) = -21.1 dB$. При этом в алгоритме МТЛ в приемнике было принято 396 звуковых лучей. Следовательно, принятый сигнал равен $E_{1-1}^2 - E_0, dB = 10 \lg(396/12480) = -15.0 dB$, что совпадает с вычисленным аналитическим значением $(-21.1) - (-6.0) = -15.1 dB$.

3. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

После того, как численный алгоритм МТЛ корректно настроен, можно провести тестирование аналитических формул, полученных в предыдущей главе для отражения от произвольной криволинейной поверхности. Простейший случай искривленной поверхности — это цилиндрическая поверхность, в которой лишь одна главная кривизна из двух отлична от нуля, а вторая равна нулю.

В данном случае помещение представляет собой комнату, полученную из прямоугольной путем замены части стен слева от оси Oy полуцилиндрической стенкой. Последняя приближается набором равных плоских прямоугольных граней, высота которых совпадает с высотой цилиндрической стенки, вид в плане изображен на рис. 3 при 12-ти приближающих гранях.

Сначала рассмотрим случай однократного отражения $S1 - R1$ от цилиндрической стенки. Источник $S1$ и приемник $R1$ выбираем с равными вертикальными координатами. Тогда звуковой луч лежит в горизонтальной плоскости $z = 1.5 м$. Как и в случае плоского отражателя, для оценки сигнала однократного отражения от цилиндрической поверхности для всех других граней положим $\alpha = 1$, а для самой цилиндрической поверхности $\alpha = 0$.

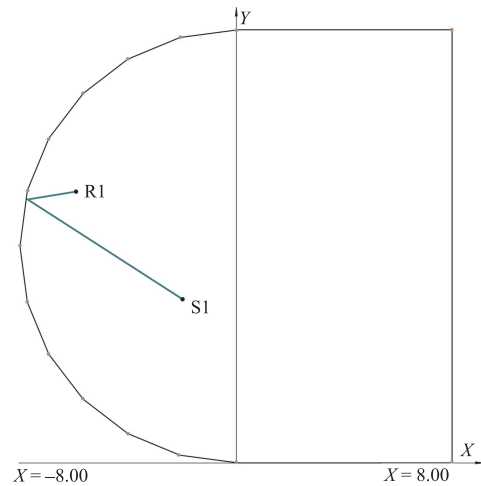


Рис. 3: Вид в плане: однократное отражение от полуцилиндрической поверхности, приближение 12-ю плоскими вертикальными секциями

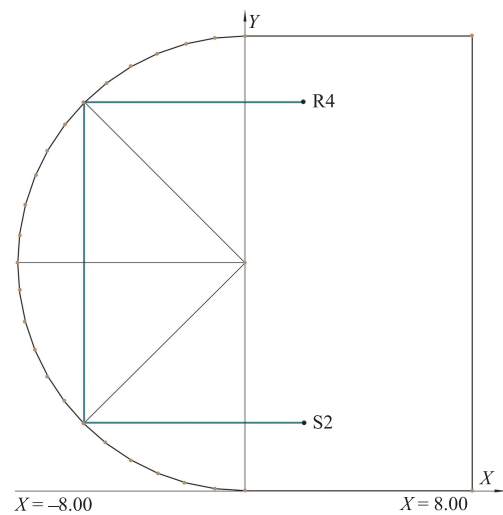


Рис. 4: Двукратное отражение от вертикальной полуцилиндрической стенки

Здесь формула (1) для однократного отражения имеет вид

$$|p|^2 = \frac{1}{|(L + L_0)^2 - 2LL_0(L + L_0)/(R \cos \gamma)|} \quad (4)$$

При этом $R = 8, L_0 = 6.83, L = 1.89, L + L_0 = 8.72, \cos \gamma = 0.948$. Тогда из (4) получим $|p| = 0.147, E_{1-1}^1 = |p|^2 = 0.0216$, или $E_{1-1}^1, dB = 10 \lg(0.0216) = -16.7 dB$. Отклонение от опорного сигнала равно $E_{1-1}^1 - E_0 = (-16.7) - (-6.0) = -10.7 dB$. Это точное теоретическое значение сравнивается с вычислениями по алгоритму МТЛ. Результаты расчетов для разного количества M приближающих плоских граней представлены в табл. 1.

Таблица 1: Результаты однократного отражения от полуцилиндрической стенки при изменении числа приближающихся плоских граней

M - число плоских граней	Число участвующих отражающих граней	N - число лучей, попавших в приемник	Уровень принятого сигнала $10 \lg(N/N_0)$, dB
8	1	694	-12.5
12	2	1322	-9.7
18	2	1138	-10.4
24	2	984	-11.0
30	2	1215	-10.1
36	2	920	-11.3
40	2	1102	-10.5
60	3	1196	-10.2
90	3	1126	-10.4
120	4	1232	-10.0
150	4	1188	-10.2

Таблица 2: Результаты двукратного отражения от полуцилиндрической стенки при изменении числа приближающихся плоских граней

M — число плоских граней	N — число лучей, попавших в приемник	Уровень принятого сигнала $10 \lg(N/N_0)$, dB
8	458	-14.4
12	450	-14.4
18	516	-13.8
24	574	-13.4
30	596	-13.2
36	568	-13.4
40	480	-14.1
60	394	-15.0
90	320	-15.9
120	422	-14.7
150	412	-14.8

Перейдем к случаю двойного отражения от цилиндрической стенки, принимая $S2 = (2, -8/\sqrt{2}, 1.5)$, $R4 = (2, 2 + 8/\sqrt{2}, 1.5)$. Из формулы (1) следует, что

$$|p| = \frac{1}{2R \cos \gamma \sqrt{\zeta(1+2\zeta)(\zeta+2)}},$$

$$\zeta = \frac{x_2}{R \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = 1\sqrt{2}, \quad x_2 = 2. \quad (5)$$

$$|p| = 0.0790, \quad E_{2-4}^2 = |p|^2 = 0.00624,$$

$$dB = 10 \lg(0.00624) = -22.0 \text{ dB}.$$

Таким образом, относительно тестового сигнала уровня -6.0 dB полученное точное значение равно $E_{2-4}^2 - E_0 = (-22.0) - (-6.0) = -16.0 \text{ dB}$.

Как и в случае однократного отражения, эта же задача решается с помощью разработанного алгоритма МТЛ. Результаты вычислений для различного числа M аппроксимирующих граней приведены в табл. 2.

Видно, что точность аппроксимации для двукратного отражения хуже, чем для однократного. Очевидно, что точность порядка 1 dB достигается лишь при числе отражающих граней, начиная с $M = 60$.

4. ОТРАЖЕНИЕ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Здесь рассмотрим помещение цилиндрической формы с полусферическим куполом сверху (рис. 5). Радиус цилиндра и полусферы 8 м, высота цилиндрической части 10 м. Система граней соответствует вписанному в полусферу многограннику с узлами в виде равномерной сетки с постоянным шагом по обоим сферическим углам. При этом в каждом горизонтальном поясе имеем M равных трапеций с горизонтальными основаниями. Однако размеры граней в разных сферических

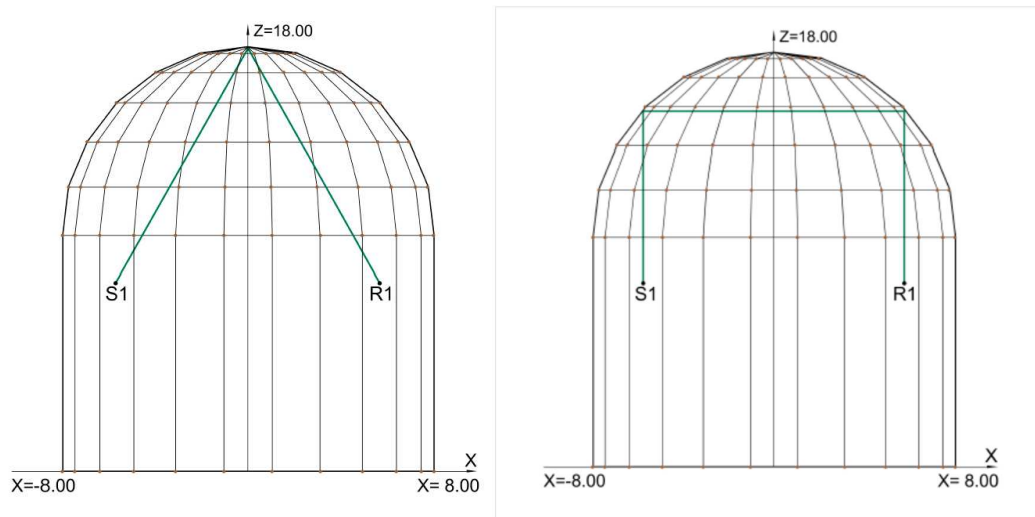


Рис. 5: Однократное отражение от верхней точки полусферического купола (слева) и двукратное отражение от полусферического купола (справа)

Таблица 3: Однократное отражение от полусферической поверхности для разного числа приближающих плоских граней

M — число разбиений по полярному углу	Общее число приближающих граней	N — число лучей, попавших в приемник	Уровень принятого сигнала $10 \lg(N/N_0)$, dB
8	25	216	-17.6
16	81	574	-13.4
24	169	574	-13.4
32	290	538	-13.7
40	442	462	-14.3

поясах различны.

Сначала рассмотрим однократное отражение в вертикальной плоскости $x - z$. Возьмем систему источник — приемник $S1 - R1$: $S1 = (-8/\sqrt{2}, 0, 8)$, $R1 = (8/\sqrt{2}, 0, 8)$.

Здесь формула (1) для однократного отражения дает

$$E_{1-1}^1 = |p|^2 = \frac{1}{4L^2|1 + L^2/R^2 - (L/R)(1 + \cos^2 \gamma)/\cos \gamma|} = 0.0117, \quad E_{1-1}^1, dB = 10 \lg(0.0117) = -19.3 dB, \quad (6)$$

где $L = L_0 = \sqrt{(8/\sqrt{2})^2 + 10^2} = \sqrt{132} = 11.49$, $R = 8$, $\cos \gamma = 10/L = 0.870$. Уровень принимаемого сигнала на фоне опорного

$$E_{1-1}^1 - E_0 = (-19.3) - (-6.0) = -13.3 dB$$

Сравнение этого точного аналитического решения с результатами по алгоритму МТЛ для различного числа приближающих граней отражено в табл. 3. Если не учитывать самый грубый случай $M = 8$, то все остальные результаты находятся в пределах точности в 1 дБ.

Перейдем к случаю двойного отражения от полусферической поверхности.

Возьмем те же источник $S1$ и приемник $R1$, что и для однократного отражения. Траектория звукового луча по-прежнему лежит в вертикальной плоскости $x - z$. Из формулы (1) следует, что

$$|p| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1+2\zeta}} = 0.191, \quad \zeta = \frac{\xi}{R \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E_{1-1}^2 = |p|^2 = 0.0365, \quad E_{1-1}^2, dB = 10 \lg(0.0365) = -14.4 dB. \quad (7)$$

Здесь $\xi = 2$ — расстояние по вертикали от уровня плоскости расположения источника и приемника до опорной плоскости полусферы $z = 10$. Получается, что относительно тестового сигнала уровня $-6.0 dB$ точное значение равно $E_{1-1}^2 - E_0 = (-14.4) - (-6.0) = -8.4 dB$.

Как и в случае однократного отражения, эта же задача решается с помощью разработанного алгоритма МТЛ. Результаты вычислений для разного количества приближающих граней приведены в табл. 4.

Таблица 4: Двукратное отражение от полусферической поверхности для разного числа приближающихся плоских граней

M — число разбиений по полярному углу	Общее число приближающихся граней	N — число лучей, попавших в приемник	Уровень принятого сигнала $10 \lg(N/N_0)$, dB
8	25	166	-18.8
16	81	1478	-9.3
24	169	1748	-8.5
32	290	2042	-7.9
40	442	2648	-6.7

Заметим, что если отбросить заведомо неверное значение при $M = 8$, то среднее значение по остальным случаям, равное -8.1 dB , довольно близко к точному.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общий вывод состоит в том, что результаты в рамках алгоритма МТЛ подтверждают корректность приближения искривленных поверхностей набором плоских многогранников. При этом малое число граней не

обеспечивает достаточную точность. Слишком большое число граней неразумно, т.к. требует больших вычислительных ресурсов, но, по сути, не увеличивает точности вычислений по сравнению со средними значениями M .

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 15-19-10008-П).

-
- [1] *Kuttruff H.* // Room Acoustics. London, 1973.
- [2] *Vorländer M.* // Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality. Berlin, 2008.
- [3] *Помпеи А., Сумбатян М. А., Тодоров Н. Ф.* // Акуст. журнал. 2009. **55**, № 6. С. 760.
- [4] *Mechel F. P.* // J. Sound & Vibration. 2002. **256**. P. 873.
- [5] *Schröder D., Lentz T.* // J. Audio Eng. Soc. 2006. **54**. P. 604.
- [6] *Savioja L.* // Overview of geometrical room acoustic modeling techniques // J. Acoust. Soc. America. 2015. **138**. P. 708.
- [7] *Sumbatyan M. A., Boyev N. V.* // J. Acoust. Soc. America. 1994. **95**. P. 2346.
- [8] *Боев Н. В., Сумбатян М. А.* // Доклады РАН. 2003. **392**, № 5. С. 614.
- [9] *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* // Acta Acustica united with Acustica. 2011. **97**. P. 115.
- [10] *Vercammen M. (Part I.)* // Acta Acustica united with Acustica. 2010. **96**. P. 82.
- [11] *Vercammen M. (Part II.)* // Acta Acustica united with Acustica. 2010. **96**. P. 92.
- [12] *Smith W. J.* // Modern Optical Engineering. New York, 2007.
- [13] *Dereniak E. L., Dereniak T. D.* // Geometrical and Trigonometric Optics. Cambridge, UK, 2008.
- [14] *Glassner A. S.* // An Introduction to Ray Tracing. London, 1991.
- [15] *Gu X., Gortler S. J., Hoppe H.* // ACM Trans. Graph. 2002. **21**, № 3. P. 355.
- [16] *Purcell T. J., Buck I., Mark W. R., Hanrahan P.* // ACM Trans. Graph. 2002. **21**, № 3, P. 703.
- [17] *Shevtsov M., Soupikov A., Kapustin A.* // Computer Graphics Forum. 2007. **26**, № 3, P. 305.
- [18] *Игнатъев Ю. Г.* // Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Казань, 2013.
- [19] *Умнов А. Е.* // Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М., 2011.
- [20] *Pierce* // Acoustics: An Introduction to its Physical Principles and Applications. New York, 1991.

On reflection of sound from curved surfaces in room acoustics

M. A. Sumbatyan^a, N. V. Boyev^b

Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University,
Mlchakova Street 8a, Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: ^asumbat@math.rsu.ru, ^bboyev@math.rsu.ru

We study an approximate approach to reflection of sound from curved surfaces, based on their change by a number of plane reflectors. The precision of such an approximation is still unclear. The present work proposes a new method to solve this urgent

problem. We propose an asymptotically exact solution which corresponds to the Ray theory of sound. Explicit formulas are compared with the Ray Tracing (RT) method.

PACS: 43.20.Dk, 43.20.Ef

Keywords: reflection of sound, curved surface, curvature, Ray Tracing method, asymptotic approach, sound rays

Received 17 November 2019.

Сведения об авторах

1. Сумбатян Межлум Альбертович — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор;
e-mail: sumbat@math.rsu.ru.
 2. Боев Николай Васильевич — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; e-mail: boyev@math.rsu.ru.
-