

Метод нахождения комплексно-значного спектра волновых чисел изотропно-слоистых пластин в низкочастотном диапазоне

Д. Д. Захаров*

Российский университет транспорта (МИИТ), Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9
(Статья поступила 16.11.2019; подписана в печать 15.01.2020)

Излагается новый численно-аналитический метод исследования полного спектра волновых чисел изотропно-слоистых упругих пластин с однородными граничными условиями на лицевых поверхностях. В такой задаче при каждой фиксированной частоте имеется конечное число вещественных волновых чисел и бесконечное (счетное) множество комплексно-значных волновых чисел, что и представляет наибольшую трудность. За последние сорок лет только для двух видов упругих волноводов — однородной изотропной пластины и однородного изотропного цилиндрического тела — полный спектр изучен относительно детально. Несмотря на развитие многих эффективных численных методов, задача нахождения всего счетного множества комплексно-значных волновых чисел для волн с PSV-поляризацией слабо изучена, что и мотивировало работу. Для этой цели предложены удобные матрицы-пропагаторы, получены их обращения в замкнутом виде и построены асимптотики при больших по модулю значениях волновых чисел. Получены в замкнутом виде дисперсионные уравнения и их асимптотическое представление при больших волновых числах или малых частотах. Предложен метод вывода асимптотик волновых чисел в статике, в длинноволновом приближении, а также итерационный алгоритм их уточнения для расчета точных комплексно-значных дисперсионных кривых. Приведены пример расчета спектра волновых чисел для волн Лэмба в трехслойной пластине с оценкой численной и асимптотической погрешности метода. Проведен параметрический анализ результатов.

PACS: 43.20.Mv, 43.20.Bi. УДК: 534.1.

Ключевые слова: слоистые пластины, комплексные волновые числа, волны Лэмба.

ВВЕДЕНИЕ

Среди упругих волноводов конечной толщины до настоящего времени относительно полно были изучены лишь спектры обобщенных волн Лэмба в изотропной пластине и обобщенных волн Похгаммера-Кри в однородном изотропном цилиндре. В случаях слоистого поперечного сечения и/или анизотропии материалов исследование спектров ведется сейчас численными методами, для которых основную сложность представляет счетное множество комплексно-значных волновых чисел k ($\text{Re}k, \text{Im}k \rightarrow \infty$). Такой рост не позволяет рассчитывать весь спектр с использованием дискретизации по толщине волновода, как это принято в прямых численных методах, что ограничивает их применимость лишь для расчета некоторого числа первых комплексно-значных дисперсионных кривых. Обзор работ в этой области можно найти, например, в [1].

Тем не менее, эта малоизученная часть спектра важна не только с фундаментальной точки зрения, но и для прикладных задач — описания эффективного взаимодействия волн с концентраторами напряжений (трещинами, включениями), использования рядов собственных волн для построения тензора Грина или неотражающих граничных условий [2, 3] и т.д.

В настоящей работе предложено сначала в замкнутом виде находить асимптотики дисперсионных кривых

при большом модуле волнового числа $|k| \gg 1$ и индекса дисперсионной кривой, по которым уже легче найти точные значения. Ключевой здесь оказывается информация о поведении волновых чисел в статике, для которых находятся собственные асимптотики, оцениваются погрешности и предложен эффективный метод уточненного расчета.

Показано, что при различии в упругих модулях сред растущую часть асимптотик определяют только геометрические параметры и существуют критические значения геометрических параметров, при которых происходит перераспределение асимптотик из разных семейств. Далее по результатам статистики строятся длинноволновые асимптотики дисперсионных кривых, которые тем точнее и имеют тем больший интервал применимости, чем выше индекс кривой. По-сути, с ростом индекса комплексно-значная дисперсионная кривая имеет все более протяженный пологий участок, и ее изменимость начинает проявляться на все более высоких частотах. Таким образом, наиболее трудную (счетную) комплексно-значную часть спектра удается описать с помощью аналитических формул.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим пластину из изотропных упругих слоев с номерами $j = 1, 2, \dots, n$, толщинами $h_j = z_{j+1} - z_j$, постоянными Ламе λ_j , μ_j и плотностями ρ_j , и занимающих в декартовых координатах области $-\infty < x, y < +\infty$, $z_j \leq z \leq z_{j+1}$. Пусть в поперечном сечении рас-

*E-mail: dd_zakh@mail.ru

пространяются гармонические волны $\exp(ikx - i\omega t)$ с PSV поляризацией (круговая частота ω и волновое число k постоянны). В очевидных случаях этот множитель опускаем вместе с номером. Поле перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ и тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в каждом слое связаны законом Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \partial_x u_x, \\ \sigma_{xz} &= \mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \quad (x \leftrightarrow z),\end{aligned}$$

и удовлетворяют уравнениям движения Ламе

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0.$$

На межфазных границах потребуем выполнения условий непрерывности поля (отсутствия скачков)

$$[\sigma_{xz}] = [\sigma_{zz}] = 0, \quad [u_x] = [u_z] = 0.$$

Для дальнейшего описания введем вектор состояния

$$\xi = (-ik^{-1}u_x \quad k^{-1}u_z \quad k^{-2}\sigma_{zz} \quad -ik^{-2}\sigma_{zx})^T,$$

значения которого на границах слоев связаны с помощью выводимой в явном виде матрицы-пропагатора [4, 5]. В одном слое это матрица $\mathbf{P}_\xi(h)$: $\xi(z_2) = \mathbf{P}_\xi(h) \times \xi(z_1)$, а для n слоев соотношение примет вид

$$\xi(z_{n+1}) = \mathbf{P} \times \xi(z_1),$$

$$\text{где } \mathbf{P} = \mathbf{P}_\xi(h_n) \times \mathbf{P}_\xi(h_{n-1}) \dots \times \mathbf{P}_\xi(h_1).$$

Заметим, что у введенного вектора состояния нормировка компонент отличается от общепринятой и приводит к матрице-пропагатору, которая сразу демонстрирует два вида симметрии: при замене $k \leftrightarrow -k$ или замене k на комплексное сопряжение k^* ; причем частота ω и волновое число k явно содержатся в $\mathbf{P}_\xi(h)$ в виде квадратов. Толщина h появляется в экспонентах вида

$$e^{\mp(k^2 - k_{P,S}^2)^{1/2} h} = e^{\mp((1 - k_{P,S}^2 k^{-2})^{1/2} - 1) kh} \times e^{\mp kh},$$

поэтому экспоненты $e_j = e^{kh_j}$, $h_j = z_{j+1} - z_j$ можно выделить в явном виде так, что в слое j

$$\mathbf{P}_\xi(h_j) = e_j \mathbf{P}_+^{(j)} + e_j^{-1} \mathbf{P}_-^{(j)}.$$

Такой подход с выделением экспонент позволяет получить равенства

$$\mathbf{P} = \sum_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)} \mathbf{P}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \exp\left(k \sum_{j=1}^n \delta_j h_j\right), \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}_{\delta_{n+1-j}}^{(n+1-j)}, \quad \delta_j = \mp,$$

с суммированием по всем сочетаниям знаков $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

Для получения дисперсионного уравнения, описывающего пластину со свободными лицевыми поверхностями $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$, следует рассмотреть в матрице \mathbf{P} блок со строками 3,4 (строки для напряжений при $z = z_n$). Тогда роль свободных констант будут играть перемещения при $z = z_1$ (отвечающие столбцам перемещений 1, 2), и дисперсионное уравнение суть

$$\det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 12 \end{pmatrix} = 0.$$

Из вида $\mathbf{P}_\xi(h)$ следует симметричность расположения спектра $\{k_n(\omega)\}$ по квадрантам комплексной плоскости, и достаточно рассматривать $\Re k \geq 0$, $\Im k \geq 0$.

При симметричной укладке слоев, условие на нижней лицевой поверхности можно заменить другим условием на срединной поверхности $z = 0$: в силу четности/нечетности соответствующих функций по z для изгиба $u_x = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ и для плоской деформации $u_x = 0$, $\sigma_{zz} = 0$. В итоге можно рассматривать полупластину с меньшим числом слоев и отсчетом снизу вверх от срединной поверхности $z_1 = 0$. Дисперсионное уравнение

$$\Psi(k(\omega), \omega) \equiv \psi(k^2(\omega^2), \omega^2) = 0, \quad (2)$$

получается приравниванием к нулю определителя соответствующего минора в матрице \mathbf{P} ($\Psi \equiv \det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 13 \end{pmatrix}$ или $\Psi \equiv \det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \end{pmatrix}$) для полупластины.

2. АСИМПТОТИКИ СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ

Очевидно, $\omega/k \rightarrow 0$ при фиксированной частоте ω и $\Re k \Im k \rightarrow \infty$, т.е. ключевая информация для таких волновых чисел содержится в статике. Рассматривая статический предел для $\Psi(k, \omega)$ (2), можно показать, что дисперсионное уравнение в статике имеет полиномиально-экспоненциальный вид

$$\sum_{\alpha} T_{\alpha} = 0 \quad \left(T_{\alpha} = Q_{\alpha} \zeta^{m_{\alpha}} e^{\zeta \ell_{\alpha}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)} \right), \quad (3)$$

с конечным числом слагаемых T_{α} , где m_{α} — постоянная степень, $\ell_{\alpha}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ — однородная линейная форма от β_j , $\zeta = kh$ — безразмерное волновое число, $\beta_j = h_j/h$ — безразмерная толщина j -го слоя, и h — полная толщина пластины. Коэффициент Q_{α} зависит от толщин слоев и упругих модулей. Асимптотики корней уравнения (3) ищутся в виде

$$\zeta_n^{\text{as}} = i(ap + b) + \ln p + \ln d, \quad p = 2\pi n \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Алгоритм их нахождения следующий. Определяются максимальные значения порядков $f_{\alpha} = m_{\alpha} + c \ell_{\alpha}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ — степеней роста по p для выражений

$$T_\alpha|_{\zeta=\zeta_n^{as}} \sim p^{f_\alpha} Q_\alpha (ia)^{m_\alpha} (1 + O(p^{-1} \ln p))^{m_\alpha} d^{\ell_\alpha(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)} e^{i(ap+b)\ell_\alpha(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)}.$$

При $c > 0$, попарно сравнивая f_α в различных интервалах β_j , находим кусочно-линейную функцию максимального порядка $F = \max_\alpha f_\alpha$ и граничные точки $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ для её интервалов сопряжения (угловых точек). В таких точках ставим дополнительные уравнения на прочие параметры. Например, при $f_1 = f_2$ получим

$$c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) = (m_2 - m_1) / (\ell_1 - \ell_2)$$

Чтобы уравнение (2) выполнялось асимптотически, для $a > 0$, b и d должна выполняться оценка вида

$$\left(T_1 + T_2 + \sum_{\alpha>2} T_\alpha\right) T_1^{-1} = O(p^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0$$

и из условия $T_1 \sim -T_2$ получаем

$$d = (\ell_1 - \ell_2)^{-1} \ln |Q_2/Q_1| a^{m_2 - m_1}, \\ (ap + b)(\ell_1 - \ell_2) \mp \pi + (m_1 - m_2)\pi/2 + \\ + \arg Q_1/Q_2 = 2\pi m_*, \quad m_* \in Z.$$

Если $\ell_1 > \ell_2$, то

$$a = 2\pi m' (\ell_1 - \ell_2)^{-1} p^{-1} (m' \in Z), \\ b = (\ell_1 - \ell_2)^{-1} (\mp \pi - \arg Q_1/Q_2 + 2\pi m'') \\ m' + m'' = m_*.$$

Очевидно, что семейство асимптотик с данными a, b, c, d не меняется, если положить $a = (\ell_1 - \ell_2)^{-1}$ с наименьшим значением $m'' = m_*$, задающим положительную сумму $ap + b$ при $\min p = 2\pi$. При ином выборе m'' семейство асимптотик останется прежним но будет рассматриваться ветвь следующего порядка для $p = 2\pi(n + m'' - m_*)$.

Для оценки погрешности рассмотренной выше асимптотики положим $\eta_n = \zeta_n \ell_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$, $\kappa_n = \eta_n - \eta_n^{as}$ и перейдем к логарифмическому виду уравнения (3), сначала выделяя в левую часть компоненту T_1 и полагая, что $\varphi(\eta_n) = (-T_2 - \sum_{\alpha>2} T_\alpha) Q_1^{-1} \zeta_n^{-k_1}|_{\zeta_n=\eta_n/\ell_1}$:

$$\eta_n = ip + (\eta_n^{as} - ip) + \ln \left[e^{-\eta_n^{as} + ip} \varphi(\eta_n) \right] = \\ = \eta_n^{as} + \ln \left[e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n) \right] \text{ или } \kappa_n = \\ = \ln e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n). \tag{5}$$

Полагая малой величину κ_n , оценим значение показателя степени $\delta > 0$ в равенстве

$$e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n) = 1 + O(p^{-\delta}) \text{ или } \kappa_n = O(p^{-\delta}).$$

Тогда, по асимптотике η_n^{as} можно найти точные значения η_n рекуррентным способом

$$\eta_n^{(\ell+1)} = \eta_n^{as} + \ln \left[e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{(\ell)}) \right], \quad \eta_n^{(0)} = \eta_n^{as}. \tag{6}$$

Обоснование такой процедуры заключается в применимости теорем о неподвижных точках к уравнению (5), а именно:

1. Теоремы Шаудера [6] о существовании неподвижной точки оператора: поскольку можно показать, что при достаточно большом $p = 2\pi n \gg 1$ существуют такие $\varepsilon, C > 0$, что оператор $\ln e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n)$ (5) является вполне непрерывным в круге $|\kappa_n| \leq Cp^{-\varepsilon}$ и отображает круг в себя, что и требуется.

Асимптотическая погрешность формул (4) соответственно оказывается равна $|\eta_n^{as} - \eta_n| = O(p^{-\varepsilon})$, $p \rightarrow \infty$.

2. Теоремы Банаха [6]: поскольку можно показать, что при выполнении условия п.1 отображение $\ln e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n)$ является сжимающим при больших $p \gg 1$. Следовательно, неподвижная точка отображения в круге $|\kappa_n| \leq Cp^{-\varepsilon}$ единственна и последовательность (6) является быстро сходящейся к неподвижной точке, которая и является искомым решением.

Затем рассматривается следующая угловая точка, и т.д. Критические значения геометрических параметров порождают частными случаями, когда какие-либо из найденных точек $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ совпадают друг с другом, т.е. какой-либо из интервалов сопряжения вырождается в точку при некоторых значениях β_j . Получить критические значения можно из уравнений для попарных совпадений точек $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$.

3. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ КОМПЛЕКСНО-ЗНАЧНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

Поскольку в дисперсионном уравнении левая часть представима как явная функция квадратов $\Psi(k_n(\omega), \omega) \equiv \psi(k_n^2(\omega^2), \omega^2)$, то дисперсионное уравнение (2) задает в неявном виде функцию $k_n^2(\omega^2)$, которая может быть разложена в ряд Маклорена по степеням ω^2 . Ограничиваясь двумя слагаемыми в разложении Маклорена получаем низкочастотную длинноволновую асимптотику k_n^{as} для комплексно-значной

дисперсионной ветви в следующем виде

$$k_n^{as}(\omega) = k_n(0) \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{k_n^2(0)} \frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} \right\}^{1/2} \sim k_n(\omega)$$

$$\frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = - \frac{\partial \psi / \partial (\omega^2)}{\partial \psi / \partial (k_n^2)} \Big|_{\omega=0} = O(1).$$

(7)

Кроме того, можно показать, что выполняется оценка

$$\frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = - \frac{\partial \psi / \partial (\omega^2)}{\partial \psi / \partial (k_n^2)} \Big|_{\omega=0} = O(1)$$

при $k_n(0) \in C$, $|\Re k_n(0)|, |\Im k_n(0)| \rightarrow \infty$.

Геометрически это означает, что при $|k_n(0)| = O(p)$ ($n \rightarrow +\infty$) у дисперсионных кривых имеется все более протяженный начальный пологий участок, длина которого возрастает с возрастанием индекса дисперсионной кривой в своем семействе.

Отсюда следует процедура расчета $k_n(\omega)$: при малой частоте ω асимптотика (7) задает начальное приближение и значение $k_n(\omega)$, которое затем уточняется с помощью итераций Ньютона

$$k^{(\ell+1)} = k^{(\ell)} - \Psi(k^{(\ell)}, \omega) [\partial \Psi(k, \omega) / \partial k]^{-1} \Big|_{k=k^{(\ell)}}$$

При больших ω начальное приближение на текущей частоте может быть получено экстраполяцией трехточечным полиномом Лагранжа по уже полученным точным значениям $k_n(\omega)$ для предыдущих частот.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Приведем пример реализации описанного выше алгоритма для спектра волновых чисел PSV волн в трехслойной пластине со свободными от напряжений границами. При плоской деформации трехслойной пластины с симметричным расположением внутреннего слоя $|z| \leq h_1$ (среда 1) и двух одинаковых периферийных слоев $h_1 \leq |z| \leq h_1 + h_2$ (среда 2) для функции $\Psi(k, \omega) = \Delta_{24}^{34} \equiv \det P \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \end{pmatrix}$ получаем в статике уравнение продольных мод в следующем виде

$$T_0 = f(\zeta) \equiv T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = \text{Ln} f(\zeta) = ip + \text{Ln} f(\zeta) \quad (p \equiv 2\pi n),$$

(8)

$$T_0 = e^\zeta,$$

$$T_1 = -\zeta^3 \left| \tilde{h}_3^0 \right|,$$

$$T_2 = -\zeta^2 \tilde{h}_2^1 \text{sh} \beta_1 \zeta = T_2^+ + T_2^- \left(T_2^\pm = \mp \frac{1}{2} \zeta^2 \tilde{h}_2^1 e^{\pm \beta_1 \zeta} \right),$$

$$T_3 = T_3^+ + T_3^- \left(T_3^\pm = \frac{1}{2} \zeta \tilde{h}_1^2 e^{\pm \beta \zeta} \right),$$

$$T_4 = -\zeta \left| \tilde{h}_1^0 \right| + e^{-\zeta} + \tilde{B}_0 \sinh(2\beta - 1)\zeta - \tilde{h}_0^1 \text{sh} \beta_1 \zeta,$$

с безразмерными величинами $\zeta = 2k(h_1 + h_2)$, $\beta = h_2/(h_1 + h_2)$, $\beta_1 = 1 - \beta$. Формулы для постоянных $\tilde{B}_0, \tilde{h}_2^1, \tilde{h}_1^2, \tilde{h}_3^0, \tilde{h}_1^0$ приведены в [7] и для краткости опущены. Выполняя действия п.2 и анализируя порядковые функции $f_\alpha(c)$ для величин T_α , $\alpha = 0 \div 3$ (рис. 1 а, б), получаем два семейства асимптотик, которые естественно назвать β_1 - и β -асимптотиками ($s = \text{sign}(\mu_2 - \mu_1), s_1 = (s + 1)/2$):

$$\beta_1: \zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta_1} \left[p + \frac{\pi s}{2} \right] + \frac{1}{\beta_1} \ln p + \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{2 \left| \tilde{h}_3^0 \right|}{\beta_1 \left| \tilde{h}_2^1 \right|} \quad (9)$$

$$\beta: \zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta} [p + \pi s_1] + \frac{2}{\beta} \ln p + \frac{1}{\beta} \ln \frac{\left| \tilde{h}_1^2 \right|}{2\beta^2}.$$

Критическое значение равно 2/3. Геометрический смысл этого значения состоит в совпадении толщины внутреннего слоя и толщины покрытия.

Можно показать, что семейства асимптотик при $\beta < 2/3$ и $\beta > 2/3$ останутся прежними, но сами корни на комплексной плоскости перераспределяются.

Погрешность асимптотик (9) составляет $O(p^{-\varepsilon})$, но величина $\varepsilon > 0$ по-разному оценивается в докритическом и закритическом диапазоне. В докритическом диапазоне ($0 < \beta < 2/3$) эта величина удовлетворяет неравенствам $0 < \varepsilon < 1$ ($0 < \beta \leq 1/2$), или $0 < \varepsilon < 2\beta^{-1} - 3$ ($1/2 < \beta < 2/3$); в закритическом диапазоне $0 < \varepsilon < \beta_1^{-1} - 3$ ($2/3 < \beta < 3/4$) или $0 < \varepsilon < 1$ ($3/4 \leq \beta < 1$).

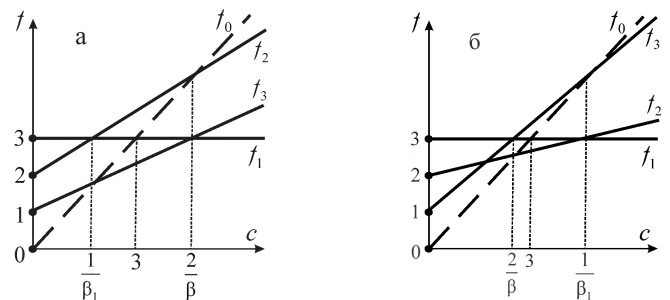


Рис. 1: Порядковые функции

Полностью аналогична ситуация с изгибными модами, вид уравнения для которых которого представлен ниже с измененным выражением для T_4

$$T_0 = f(\zeta) \equiv -T_1 + T_2 - T_3 + T_4 \quad (10)$$

$$\left(T_4 = \zeta \left| \tilde{h}_1^0 \right| + e^{-\zeta} + \tilde{B}_0 \operatorname{sh}(2\beta - 1)\zeta - \tilde{h}_0^1 \operatorname{sh}\beta_1 \zeta \right)$$

и двумя семействами асимптотик корней

$$\beta_1 : \zeta_n^{\text{as}} = \frac{i}{\beta_1} \left[p - \frac{\pi s}{2} \right] + \frac{1}{\beta_1} \ln p + \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{2 \left| \tilde{h}_3^0 \right|}{\beta_1 \left| \tilde{h}_2^1 \right|}; \quad (11)$$

$$\beta : \zeta_n^{\text{as}} = \frac{i}{\beta} (p - \pi s_1) + \frac{2}{\beta} \ln p + \frac{1}{\beta} \ln \frac{\left| \tilde{h}_2^1 \right|}{2\beta^2}.$$

Отметим, что каждое семейство имеет собственную внутреннюю нумерацию.

При этом растущая часть асимптотик как продольных, так и изгибных волн — линейная и логарифмическая по $p = 2\pi n \gg 1$ — не зависит от инерционных и упругих параметров сред, а только от геометрических параметров слоев, как это имеет место и для однослойной пластины [8].

Компоненты меньшего порядка зависят от параметров сред.

Важно также отметить следующее. В приведенном рассмотрении существенно, что среды 1 и 2 имеют различные модули сдвига. Разумеется, уравнения 8 и 10 при вырождении свойств каких либо слоев за счет исчезающе малых толщин или предельного совпадения упругих параметров сред полностью совпадают с уравнениями для однослойной пластины. Однако асимптотики 9 и 11 не являются равномерными по таким малым параметрам, описывающим предельный переход к вырожденным случаям.

Случай $\mu_1 = \mu_2$ означает, что $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ и $\tilde{B}_0 = 0$. Получающиеся при этом уравнения несколько отличаются от уравнений для однородной пластины за счет одного слагаемого в компоненте T_4 и асимптотическая формула корней в статике имеет вид (верхний знак отвечает продольным модам, а нижний знак — изгибу)

$$\zeta_n^{\text{as}} = i(p \mp \pi/2) + \ln p + \ln \left(\left| \tilde{h}_1^0 \right| \right).$$

Погрешность этой асимптотики можно оценить неравенством $|\zeta_n^{\text{as}} - \zeta_n| \leq O(p^{-\beta})$.

Итоговое поведение корней каждого из различных семейств в статике и поведение порождаемых ими дисперсионных кривых в динамике не демонстрирует существенных качественных отличий от случая спектра однородной пластины в области низких частот [8, 13].

5. ПРИМЕР ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНО-ЗНАЧНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

В примере расчета выбирались упругие среды со следующими параметрами: плотностью $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ и скоростями продольной и поперечных волн $c_P = 6400 \text{ м/с}$, $c_S = 3150$ в среде 1 и $\rho = 2700$, $c_P = 6400$, $c_S = 3150$ в среде 2.

На рис. 2 а, б при закритическом значении геометрического параметра $\beta = 3/4 > 2/3$ показаны результаты для первых 50 статических корней ζ_n продольных мод в каждом из семейств. Корни показаны квадратиками и кружочками вместе с соответствующей асимптотической кривой, помеченной символами β_1 и β , соответственно. Количество итераций в формуле (6) при нахождении 10 значащих цифр не превышало нескольких десятков и монотонно убывало с ростом индекса корня. Абсолютная и относительная погрешность также демонстрировала монотонное убывание (от десятка процентов при индексе 1 до долей процента при индексе выше 5) в обоих семействах.

Для дополнительного контроля числа корней использовался принцип аргумента [9] для целой функции из соотношения (8):

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg [e^{\zeta} - f(\zeta)] = m,$$

где Γ есть контур на комплексной плоскости, охватывающий ровно m корней.

В динамике несколько первых дисперсионных кривых вместе со своими низкочастотными асимптотиками (7) показаны на рис. 3 а, б; тип асимптотики и номер в семействе указаны рядом с кривыми. По горизонтали указан безразмерный частотный параметр $\Omega = 2\omega h/c_S$ (h — полутолщина пластины, c_S — скорость волн сдвига в среде 1). Здесь $k_n(0) = \zeta_n/2h$.

Для наглядности каждая кривая приведена в том интервале, где видно ее согласование с асимптотикой (7) (показана пунктиром) и начало расхождения с этой асимптотикой. Чем выше индекс кривой, тем более длинным оказывается пологий участок согласования с асимптотикой в собственном масштабе каждого из семейств. При больших индексах согласование с асимптотикой только улучшается.

Волновой масштаб внутри каждого из семейств β_1 и β определяется характерным временем пробега $\tau_{\alpha} = (h/c_S)_{\alpha}$ сдвиговой волны по толщине каждого слоя α ($\alpha = 1, 2$). Соответственно, первые частоты собственных резонансов (частоты среза) в каждом из слоев, рассматриваемых по отдельности как не взаимодействующие, обратно пропорциональны временам пробега: $\omega_{1\text{рез}} \sim \pi/\tau_1$ и $\omega_{2\text{рез}} \sim \pi/\tau_2$. Для закритического значения $\beta = 3/4$ получается масштабная пропорция частот $\tau_2/\tau_1 \approx 8.4375$. Разница масштабов для времен пробега объемных волн по толщинам слоев аналогична. Для кривых с одинаковым индексом, но из разных

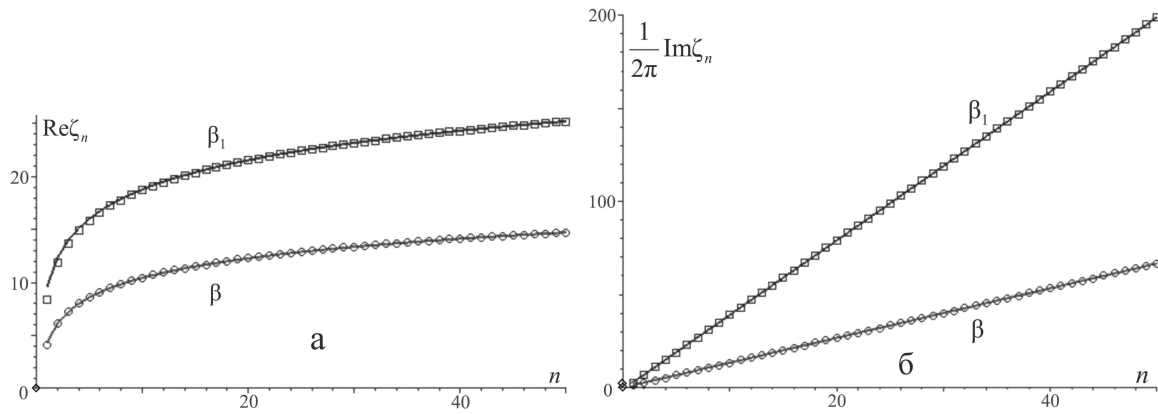


Рис. 2: Вещественная (а) и мнимая (б) часть статических корней (квадраты и кружки) и их асимптотики (сплошная линия)

семейств, отношение интервалов согласования с асимптотиками примерно равно пропорции частотных масштабов.

Как показали расчеты, при докритических значениях $\beta < 2/3$, поведение дисперсионных кривых качественно не отличается и сделанные выше выводы остаются справедливыми.

Поведение комплексно-значных дисперсионных кривых с другим типом симметрии (изгибные моды) в целом аналогично поведению продольных мод [10].

6. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И ЧИСТО МНИМЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ ПРИ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Для полноты картины необходимо остановиться и на поведении таких дисперсионных кривых, где либо вещественная, либо мнимая часть равна нулю.

Заметим, что среди статических корней всегда имеется кратный корень $\zeta = 0$.

В динамике продольных мод он порождает вещественную дисперсионную кривую — фундаментальную моду S_0 . В области низких частот мода S_0 может быть эффективно описана с помощью асимптотически точной теории пластин следующей асимптотикой

$$\omega^2 \left[\sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j) \right] = \left[\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1} - z_j)}{1 - \nu_j} \right] k^2. \quad (12)$$

Здесь ν_j обозначает коэффициент Пуассона в упругой среде для слоя j .

Для изгибных мод удобно использовать систему отсчета, которая удовлетворяет дополнительному условию выбора начала отсчета по вертикали

$$\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^2 - z_j^2)}{1 - \nu_j} = 0,$$

т.к. при этом полностью разделяются уравнения изгибных и продольных мод.

При симметричном расположении слоев это условие выполняется автоматически.

Асимптотика изгибных волн [11, 12] задается следующей формулой

$$\omega^2 \left[\sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j) \right] = \frac{2}{3} \left[\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^3 - z_j^3)}{1 - \nu_j} \right] k^4, \quad (13)$$

и описывает фундаментальную вещественную кривую A_0 и ее чисто мнимый аналог A_{0i} .

При закритическом значении геометрического параметра $\beta = 3/4$ с теми же параметрах сред, что и выше, поведение кривых S_0 , A_0 и A_{0i} и их асимптотик (12), (13) (пунктирные линии) показано на рис. 4 а, б.

В случае однородного слоя подобными кривыми в области низких частот вопрос исчерпывается, но наличие межфазных границ не только может порождать различные семейства комплексно-значных дисперсионных кривых, но и может приводить к появлению дополнительных чисто-мнимых дисперсионных кривых, чего в однослойной пластине нет.

В этом можно убедиться, рассматривая поведение функции $g(y) = -i [e^\zeta - f(\zeta)]_{\zeta=iy}$, для которой оказывается

$$g(y) > 0 (y \rightarrow +0) \text{ и } g(y) < 0 (y \rightarrow +\infty)$$

для продольных мод и

$$g(y) < 0 (y \rightarrow +0) \text{ и } g(y) > 0 (y \rightarrow +\infty),$$

для изгибных мод. Можно показать, что в обоих случаях появляется ровно по одному дополнительному чисто мнимому корню.

При $\beta = 3/4$ и прочих прежних параметрах эти корни принимают значения $\zeta = i2.4128948589$ (продольная мода) и $\zeta = i4.82534157$ (изгибная мода). При увеличении частоты каждый корень порождает собственную чисто мнимую дисперсионную кривую I_0 . В низкочастотном длинноволновом приближении каждая

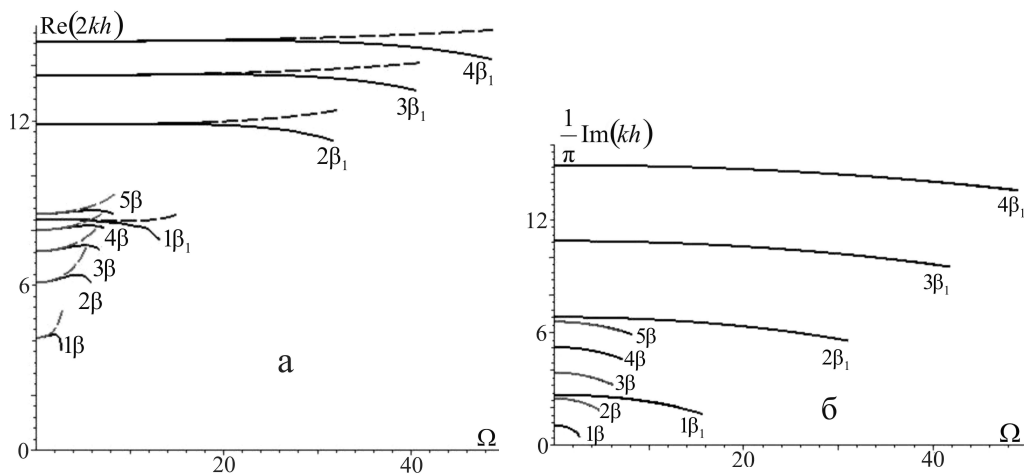


Рис. 3: Вещественная (а) и мнимая (б) часть волновых чисел для комплексных дисперсионных кривых (сплошная линия) и их асимптотики (пунктир)

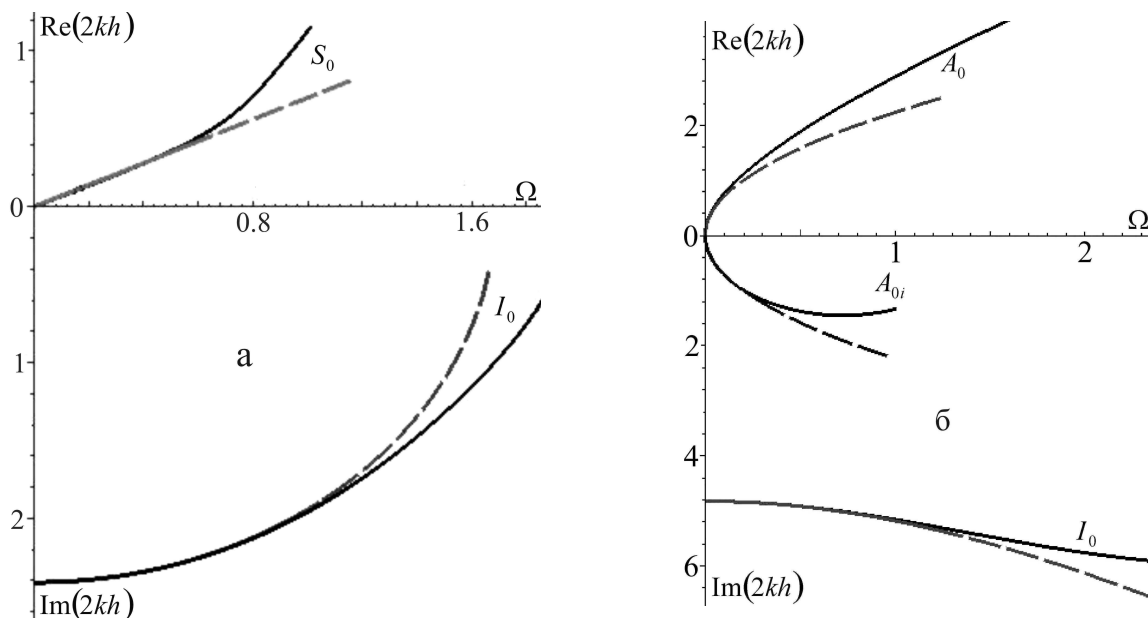


Рис. 4: Вещественные и чисто мнимые дисперсионные кривые для продольных мод (а) и изгибных мод (б)

кривая I_0 описывается той же асимптотической формулой (7), что и комплексно-значные дисперсионные кривые, с подстановкой собственного статического корня. Такие кривые также показаны на рис. 4 а, б вместе со своими асимптотиками (7) (пунктирные линии).

Поведение дисперсионных кривых при докритических значениях $\beta < 2/3$ качественно не отличается равно как и поведение дисперсионных кривых для изгибных мод а аналогичных диапазонах изменения β .

Важно отметить, что межфазные границы должны разделять среды с различными модулями сдвига, при $\mu_1 = \mu_2$ таких дополнительных статических корней и кривых I_0 не возникает [7]. Не возникает также и четко-выраженного деления комплексно-значных кривых на различные семейства [7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод позволяет эффективно описать бесконечную комплексно-значную часть спектра собственных волн с PSV поляризацией в слоистой пластине, а при $|k_n(\omega)| \rightarrow \infty$ сделать это аналитически с помощью простых формул. Численные результаты подтверждают эффективность теории. В области низких частот, где еще не проявляется взаимодействие различных дисперсионных кривых, вместе с описанием фундаментальных вещественных и чисто мнимых мод предложенный метод позволяет описать спектр волновых чисел полностью. Заметим, что каждая граница раздела сред с различными модулями сдвига порождает

ет дополнительный мнимый корень в статике и чисто мнимую низкочастотную дисперсионную кривую.

Математической основой метода является асимптотический подход и возможность получать в замкнутом виде основные уравнения, для чего используются специально адаптированные к заявленным целям матрицы-пропэгаторы и их асимптотические разложения. Далее асимптотический подход применяется для нахождения приближенных формул статических корней при больших индексах, а затем для длинноволновых приближений дисперсионных кривых. При этом для многочисленных и громоздких рутинных выкладок использовался пакет символьных вычислений MAPLE.

Перечислим также и другие случаи применимости метода.

Симметричная укладка слоев по толщине не является ограничением для метода и пластина может иметь несимметрично-слоистую структуру.

Также не является ограничением выбор типа однородных граничных условий на лицевых поверхностях пластины; может быть выбрана любая комбинация свободной границы, жестко защемленной границы или границы с частичным опиранием. Во всех случаях предел дисперсионного уравнения в статике имеет

полиномиально-экспоненциальный вид, что и является определяющим свойством.

Наконец, можно допустить наличие линейно-вязкоупругих материалов сред (например, среду Максвелла или среду Кельвина-Фойхта). При этом, очевидно, нарушится симметрия спектра волновых чисел, не инвариантного по отношению к операции комплексного сопряжения. Однако предельный вид дисперсионного уравнения в статике совпадет с уравнением для упругих сред и первый этап анализа останется без изменений. Измениться лишь ситуация с построением длинноволновых асимптотик дисперсионных кривых — это необходимо будет проделать для двух квадрантов на комплексной плоскости, например первого и второго квадрантов.

В области высоких частот предлагаемый метод может использоваться как дополнение к существующим прямым численным методам, основанным на дискретизации волновода по толщине. Но возможно и автономное применение метода с дальнейшим отслеживанием эволюции начальных участков дисперсионных кривых от низких частот ко все более высоким частотам.

Работа выполнена при финансовой поддержке благотворительного фонда «Основание».

-
- [1] *Hernando Quintanilla F., Fan Z., Lowe M. J. S. Craster R. V.* // *J. Sound Vib.* 2016. **363**. P. 545.
[2] *Zakharov D. D.* // *J. Appl. Math. Mech.* 2013. **77**, N 1. P. 39.
[3] *Zakharov D. D.* // *Comput. Math. & Math. Phys.* 2010. **50**, N 9. P. 1522.
[4] *Thomson W. T.* // *JAP.* 1950. **21**. P. 89.
[5] *Aki K., Richards P. G.* *Quantitative seismology, theory and methods.* Vol.1. Freeman, San Francisco, 1980.
[6] *Dunford N., Schwartz J. T.* *Linear Operators: General theory.* N.Y.: Wiley — Interscience Publishers, 1958.
[7] *Захаров Д. Д.* // *Акуст. ж.* 2017. **63**, № 5. С. 463.
[8] *Меркулов Л. Г., Рохлин С. И., Зобнин О. П.* // *Дефектоскопия.* 1970. № 4. С. 12.
[9] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* // *Методы теории функций комплексного переменного.* Наука. М., 1973.
[10] *Захаров Д. Д.* // *Акуст. ж.* 2018. **64**, № 4. С. 395.
[11] *Zakharov D. D.* // *C. R. Acad. Sci. II.* 1992. **315**, N 8. P. 915.
[12] *Zakharov D. D.* // *J. Appl. Math. Mech.* 1992. **56**, N 5. P. 644.
[13] *Zakharov D. D., Castaing M., Singh D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. 130. N2. P. 764

A method to evaluate the total infinite wavenumber spectrum of the isotropically layered plates at low frequency

D. D. Zakharov^a

*Department of Math Analysis, Russian University of Transport
Moscow 127994, Russia
E-mail: ^add_zakh@mail.ru*

A novel asymptotical and numerical tool to study the total spectrum of wavenumbers for elastic isotropically-layered plates under homogeneous boundary conditions on the faces is presented. In such a problem, for each fixed frequency, there is a finite number of real wavenumbers and an infinite (countable) set of complex-valued wavenumbers, which is the most difficult. Over the past forty years, only for two types of elastic waveguides — a homogeneous isotropic plate and a homogeneous isotropic cylindrical solid — the full spectrum has been studied more or less completely. Despite the development of many efficient numerical methods, the problem to find the entire countable set of complex-valued wavenumbers of PSV-polarized waves is still poorly studied which motivated the work. For this purpose, convenient propagator matrices are introduced, their inverse are obtained in a closed form and the matrix asymptotics at the large wavenumber moduli are deduced. The dispersion equations and their static and quasistatic limits are obtained explicitly. A method to derive the asymptotics of the wavenumbers in statics and at long waves (and low frequency) is suggested. Another iterative algorithm to refine the values and to evaluate the exact complex-valued dispersion curves is presented.

Some numerical examples for spectrum of the Lamb waves in a coated plate are calculated. The numerical and asymptotic errors are estimated. The parametrical analysis is performed.

PACS: 43.20.Mv , 43.20.Bi

Keywords: layered plates, complex wavenumbers, Lamb waves.

Received 16 November 2019.

Сведения об авторах

1. Захаров Дмитрий Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 684-28-42, e-mail: dd_zakh@mail.ru.
-