Предельный переход от распределения Пуассона к распределению Гаусса для физиков

О. А. Чичигина* В. М. Петникова†
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 27.06.2019; Подписана в печать)

Распределение Пуассона получено из гамма-распределения. Переход к нормальному распределению при достаточно больших значениях параметра доказывается без использования формулы Стирлинга. Результаты иллюстрируются на примере движения броуновской частицы.

PACS: 02.50.Ga, 02.70.Rr, 05.40.Jc УДК: 530.162.
Ключевые слова: распределение Пуассона, гамма-распределение, формула Стирлинга, импульсный процесс, броуновское движение.

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей этой работы является доказательство возможности предельного перехода от распределения Пуассона к распределению Гаусса без применения формулы Стирлинга. В традиционных курсах теории вероятностей формула Стирлинга обычно приводится без доказательства, которое основано на понятиях, выходящих за пределы знаний студентов младших курсов. Это создает проблемы в понимании основ теории вероятностей, а, соответственно, и молекулярной физики для студентов физических специальностей. Предлагаемое нами доказательство проводится в рамках элементарных функций от вещественных переменных с использованием самых начальных знаний математического анализа, таких как второй замечательный предел и разложение экспоненты в ряд.

Основной идеей доказательства является использование свойств гамма-распределения и его связи с другими распределениями. В частности, распределение Пуассона[1–7] получается как следствие гамма-распределения. Вероятностные соотношения выводятся путем рассуждения о независимых событиях. По ходу доказательства обсуждаются идеи, важные для применения распределений в физике. Полученные соотношения проиллюстрированы на наглядном примере движения броуновской частицы. А так же излагаются основы теории импульсных процессов.

Предложенное рассуждение может рассматриваться как косвенное доказательство формулы Стирлинга.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим импульсный пуассоновский процесс, характеризующийся числом пришедших независимых импульсов n (рис. 1). Примером такого процесса могут служить соударения броуновской частицы с хаотически движущимися и невзаимодействующими частицами среды. Каждый импульс соответствует одному соударению с одной из частиц среды (рис. 2). Пуассоновский процесс является частным случаем процесса восстановления (renewal process)[8–14]. Он также может быть представлен как последовательность случайных точек на временной оси, которая называются случайным точечным процессом[15, 16]. Моменты появления импульсов являются случайными величинами t_n. Причем, мы считаем вероятность появления более одного импульса на малом интервале бесконечно малой. Это свойство называется ординарностью случайного процесса. Временные интервалы между соседними, следующими друг за другом, импульсами $\vartheta = t_n - t_{n-1}$ тоже являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Их среднее обозначим $\langle\vartheta\rangle = T$. Этот процесс стационарный. Условный период T является константой. Вероятность появления очередного импульса в единицу времени $p = 1/T$ также является постоянной величиной, никак не зависящей от того, когда был предыдущий импульс. Можно сказать, что система моментально "забывает"свое предыдущее состояние. Применительно к броуновской частице это означает, что ее столкновение с одной из частиц среды никак не влияет на то, когда она столкнется с другой частицей среды.

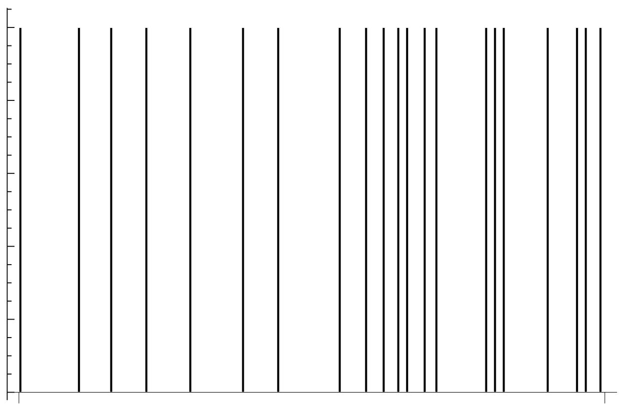

Рис. 1: Пример реализации Пуассоновского процесса

*E-mail: chichigina@ilc.edu.ru
†E-mail: v_petnikova@yahoo.com

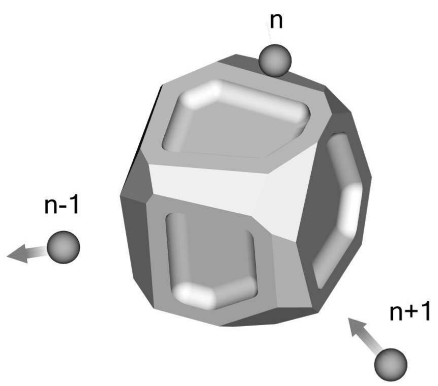

Рис. 2: Последовательные соударения броуновской частицы с частицами среды

2. СВЯЗЬ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСА В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ И ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ ИМПУЛЬСАМИ

Предположим, что произошел импульс, назовем его нулевым, найдем распределение вероятностей для времени ожидания следующего, первого, импульса. Введем шкалу времени, начинающуюся в момент нулевого импульса, разобьем ее на малые интервалы Δt и введем дискретное время $\vartheta = m\Delta t$. Тогда вероятность того, что импульс появится на m-ом интервале равна $p\Delta t$, одинаковая для всех интервалов. Вероятность, что между импульсами будет m интервалов, равна произведению вероятностей независимых событий: (I) на m предыдущих интервалах импульсов не было с вероятностью $(1-p\Delta t)^m$ и (II) на следующем, $(m+1)$-ом, он был с вероятностью $p\Delta t$

$$(1-p\Delta t)^m p\Delta t = (1-p\Delta t)^{\vartheta/\Delta t} p\Delta t.$$

Переходя к пределу малых Δt и используя второй замечательный предел получаем, что эта вероятность определяется следующим образом

$$w(\vartheta)\Delta t = p\,\exp\left(-\vartheta p\right)\Delta t = \frac{1}{T}\,\exp\left(-\frac{\vartheta}{T}\right)\Delta t, \qquad (1)$$

где $w(\vartheta)$ — плотность распределения вероятностей для интервала между соседноми импульсами. Экспоненциальное убывание вероятностей интервалов между импульсами можно проиллюстрировать тем, что длительность этих интервалов соответствует для броуновской частицы времени свободного пробега, без столкновений. Вероятность лететь долго, не испытывая столкновений, меньше, чем вероятность не столкнуться за малый интервал времени. То есть малые времена свободного пробега вероятней, чем большие. Та же самая закономерность прослеживается и для длин свободного пробега. Это удобно наблюдать в презентации "Длина свободного пробега"на сайте cmcstatphys@ilc.edu.ru.

Таким же, как и распределение для интервалов между соседними импульсами (1) будет распределение $w_1(t)$ для первого импульса, если считаем, что в начальный момент был импульс с номером 0

$$w_1(t) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right). \qquad (2)$$

Мы будем обозначать случайную величину, вероятность или плотность распределения вероятностей которой описывается, в скобках, а параметры распределения в виде индекса. В некоторых математических учебниках записывается наоборот.

3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Пусть $w_n(t)$ описывает плотность распределения вероятностей момента появления n-го импульса при условии, что нулевой был в начале отсчета времени, плотность распределения для него $w_0(t) = \delta(t)$.

Найдем плотность распределения вероятностей $w_2(t)$ времени t появления второго импульса. Введем опять дискретное время. Пусть $t_1 = m\Delta t_1$ — время появления первого импульса. Вероятность события, что первый импульс появился на m-ом интервале $w_1(t_1 = m\Delta t_1)\ \Delta t_1$, здесь плотность распределения вероятностей $w_1(t_1)$ определяется по формуле (2) при $t = t_1$. Тогда вероятность события, что следующий, второй, импульс появился на интервале, соответствующем времени t, при условии, что первый был на m-ом интервале будет $w_1(t-t_1)\ \Delta t$. Это событие соответствует тому, что расстояние между первым и вторым импульсами $t - t_1$. Поскольку нас интересует только момент появления второго импульса, а первый может быть когда угодно на временном интервале от 0 до t, то, применяя фрмулу полной вероятности, получаем

$$w_2(t)\ \Delta t = \sum_{m=1}^{\infty} w_1(m\Delta t_1)\ \Delta t_1\ w_1(t - m\Delta t_1)\ \Delta t.$$

Переходя обратно к непрерывному времени и интегрируя по t_1, получаем

$$w_2(t) = \int\limits_0^t w_1(t_1)\ w_1(t-t_1)\ dt_1 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t_1}{T}\right)\exp\left(-\frac{t-t_1}{T}\right) dt_1.$$

Таким образом, имеем свертку вероятностных распределений, описывающую сумму независимых случайных величин t_1 и $t - t_1$. Далее получаем

$$w_2(t) = \frac{t}{T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{T} w_1(t). \tag{3}$$

Рассуждая аналогично для времени появления третьего импульса и используя полученную плотность распределения для времени t_2 появления второго импульса (3), получаем

$$w_3(t) = \int\limits_0^t w_2(t_2)\, w_1(t - t_2)\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T^3} \int\limits_0^t t_2\, \exp\left(-\frac{t_2}{T}\right) \exp\left(-\frac{t - t_2}{T}\right) dt_2,$$

$$w_3(t) = \frac{t^2}{2\,T^3} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{2T} w_2(t).$$

Получая аналогично для четвертого импульса

$$w_4(t) = \int\limits_0^t w_3(t_3)\, w_1(t - t_3)\, dt_3 =$$

$$= \frac{1}{2T^4} \int\limits_0^t t_3^2\, \exp\left(-\frac{t_3}{T}\right) \exp\left(-\frac{t - t_3}{T}\right) dt_3,$$

$$w_4(t) = \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ T^4} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{3T} w_3(t),$$

усматриваем закономерность $w_{n+1}(t) = (t/nT) w_n(t)$ и выписываем плотность распределения вероятностей для произвольного n-го импульса, оно называется гамма-распределением

$$w_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!\, T^n} \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \tag{4}$$

Эта же плотность распределения $w_n(t)$ соответствует распределению для интервалов между m-м и $(n + m)$-м импульсами.

Основные характеристики: матожидание $\langle t \rangle = nT$ и дисперсия $\sigma_t^2 = nT^2$. Важно отметить, что здесь t является случайной величиной, а n — параметром распределения. Гамма-распределение описывает распределение суммы из n независимых случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону, поскольку $w_n(t) = w(\sum_{m=1}^n \vartheta_m)$.

При больших значениях n гамма-распределение переходит в распределение Гаусса. Это будет доказано в дальнейшем.

4. ПЕРЕХОД ОТ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

Распределение Пуассона $P_t(n)$ описывает вероятность того, что к моменту времени t появилось ровно n импульсов. То есть здесь, в отличие от гамма-распределения (4), n является случайной величиной, а t — параметром распределения.

В этой задаче мы зафиксировали время движения броуновской частицы и изучаем случайную величину количества соударений, которое она успела испытать за это время. Понятно, что время движения и количество соударений связаны между собой, поэтому можно ожидать, что и распределения этих двух величин окажутся связанными некоторым выражением.

Получим это распределение Пуассона из гамма-распределения. Вероятность события, что $(n+1)$-й импульс произошел в малом интервале времени $(t, t+\Delta t)$ определяется Гамма-распределением (4) по определению плотности вероятности

$$w_{n+1}(t)\Delta t = \frac{t^n}{n!\, T^{n+1}}\ \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\Delta t. \tag{5}$$

Это же событие состоит из двух независимых событий: (I) до момента t было ровно n импульсов с вероятностью $P_t(n)$ и (II) на интервале Δt появился импульс с вероятностью $T^{-1}\Delta t$. Получаем

$$P_t(n)\ T^{-1}\Delta t. \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), получаем выражение для распределения Пуассона и гамма-распределения в общем виде

$$P_t(n) = w_{n+1}(t) T. \tag{7}$$

Откуда получается выражение для распределения Пуассона

$$P_t(n) = \frac{(t/T)^n e^{-t/T}}{n!} = \frac{(\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}. \tag{8}$$

Его основные характеристики

$$\langle n \rangle = t/T = \lambda, \quad \sigma_n^2 = t/T = \lambda. \tag{9}$$

Это распределение тоже переходит в распределение Гаусса при больших λ. Для доказательства этого факта удобно сначала доказать переход к Гауссовскому гамма-распределения, а затем воспользоваться формулой, связывающей гамма и пуассоновское распределения.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К ГАУССОВСКОМУ

Гамма-распределение (4) описывает положительные случайные величины. Превращение этого распределения в нормальное возможно только в том случае, когда график плотности распределения вероятностей сдвинут далеко от оси ординат, то есть вероятностью того, что случайная величина может принимать малые значения, можно пренебречь. Это выполняется в случае, когда матожидание величины $\langle t \rangle$ много больше стандартного отклонения σ. Для выполнения предельного перехода рассмотрим флуктуацию ξ случайной величины t, распределенной с гамма-распределением, $\xi = t - \langle t\rangle = t - nT$. Плотность распределения вероятностей для этой величины определяется по формуле $w_n(\xi) = w_n(t)|\partial t/\partial\xi|$ и выглядит следующим образом

$$w_n(\xi) = \frac{(\xi + Tn)^{n-1}}{(n-1)!\,T^n}\exp\left(-\frac{\xi + Tn}{T}\right). \qquad (10)$$

Случайная величина ξ имеет нулевое среднее значение и характеризуется дисперсией $nT^2 = \sigma_t^2$. Эта дисперсия должна оставаться конечной величиной при предельном переходе к большим значениям $n \to \infty$. Это означает, что условный период должен быть мал $T \to 0$, и, соответственно, $Tn = \sigma_t^2/T \to \infty$.

Плотность распределения вероятностей (10) нормирована при любом значении n, в том числе и при $n \to \infty$. Значит, можно внести в константу нормировки $C = (n!\,T)^{-1}\,n^n\exp(-n)$ все, что не зависит от ξ, а именно $w_n(\xi) = Cf_n(\xi)$. Теперь можно вычислить предел ненормированной плотности распределения $f_n(\xi)$, а потом нормировать получившееся распределение. Получаем

$$\lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}} f_n(\xi) = \lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}}\left(\frac{\xi}{Tn}+1\right)^{n-1}\exp\left(-\frac{\xi}{T}\right) =$$
$$= \lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}}\left(\frac{\xi}{Tn}+1\right)^{n}\left(\exp\left(-\frac{\xi}{Tn}\right)\right)^{n} =$$

разложим экспоненту в ряд до квадратичного слагаемого

$$= \lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}}\left(\frac{\xi}{Tn}+1\right)^{n}\left(1-\frac{\xi}{Tn}+\frac{\xi^2}{2T^2n^2}\right)^{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\xi^2}{(2\sigma_t^2)n}\right)^{n} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_t^2}\right),$$

здесь мы применили второй замечательный предел. Далее вычисляем константу нормировки и получаем

$$\lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}} w_n(\xi) \equiv w_n^G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Мы получили распределение Гаусса с такой же дисперсией, как и исходное распределение, для флуктуации ξ. Предельное Гауссовское распределение для момента времени появления n-го импульса будет, соответственно,

$$w_n^G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T^2 n}}\exp\left(-\frac{(t-nT)^2}{2T^2n}\right) \qquad (11)$$

Этот результат подтверждает, что сумма большого числа независимых случайных величин распределена по нормальному закону, согласно центральной предельной теореме. Флуктуации броуновской частицы имеют гауссовское распределение. В этом можно убедиться, рассмотрев демонстрацию "Флуктуации поршня"на сайте cmcstatphys@ilc.edu.ru.

Интересно отметить, что данное рассуждение можно считать косвенным доказательством формулы Стирлинга. Согласно теореме о том, что предел произведения равен произведению пределов в том случае, если эти пределы существуют, можно считать константу нормировки в (11) $(2\pi T^2 n)^{-1/2}$ предельным значением константы нормировки C исходного гамма-распределения. Сравнивая их получаем $n! \to \sqrt{2\pi n}\,n^n\exp(-n)$.

6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА К ГАУССОВСКОМУ

Распределение Пуассона (8) описывает дискретную величину n. Однако при больших значениях $\langle n\rangle = t/T = \lambda \gg 1$ прибавление одного импульса можно рассматривать как бесконечно малое приращение, и описывать динамику n как изменение непрерывной величины. Это условие соответствует предельному переходу $n \to \infty$, $T \to 0$ примененному для перехода от гамма-распределения к гауссовскому.

Для доказательства перехода от распределения Пуассона к нормальному воспользуемся выражением для него через гамма-распределение (7)

$$P_t^G(n) \equiv \lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}} P_t(n) = w_{n+1}^G(t)T.$$

Введем малую флуктуацию числа импульсов $\eta = n - \langle n\rangle = n - \lambda = n - t/T$. Запишем предельное выражение для распределения $P_t(\eta)$, заменяя в предельном выражении для гамма-распределения $w_{n+1}^G(t)$ дисперсию на T^2n и время t на $nT + \eta T$

$$\lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}} P_t(\eta) = \lim_{\substack{T\to 0,\\ n\to\infty}}\frac{T}{\sqrt{2\pi T^2 n}}\exp\left(-\frac{(\eta T)^2}{2T^2n}\right) =$$
$$= \lim_{\lambda\gg 1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda+\eta)}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2(\lambda+\eta)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\lambda}\right).$$

здесь мы заменили $n = \lambda + \eta$ и учли малость флуктуации η по сравнению с λ. Мы получили нормальное распределение, с такими же средним и дисперсией, как и в изначальном распределении Пуассона (9).

$$w_\lambda^G(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left(-\frac{(n-\lambda)^2}{2\lambda}\right).$$

Это является еще одним важным подтверждением центральной предельной теоремы. Большинство флуктуирующих физических величин могут быть описаны с помощью нормального распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Базовые физические модели могут служить для получения важных математических соотношений на основе простых рассуждений. Это особенно ценно для преподавания студентам младших курсов, которые еще не изучали необходимые для точного математического доказательства разделы математики.

Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору А. С. Чиркину за плодотворное обсуждение.

[1] *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* / Теория вероятностей и её инженерные приложения. 2-е изд. М.: Высшая школа, 2000.
[2] *Haight, Frank Avery* / Handbook of the Poisson distribution. NY.:Wiley, 1967.
[3] *Гардинер К. В.* / Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
[4] *ван Кампен Н. Г.* / Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
[5] *Кингман Дж.* / Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007.
[6] *Чиркин А. С., Петникова В. М., Чичигина О. А.* / Математические модели флуктуационных явлений. Некоторые вопросы теории. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.
[7] *Петникова В. М., Чиркин А. С., Чичигина О. А.* / Математические модели флуктуационных явлений. Базовые задачи курса. М.: Физический факультет МГУ им.М.В. Ломоносова, 2017.
[8] *Стратонович Р. Л.* / Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961.
[9] *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* / Статистическая радиофизика и оптика. М.: Физматлит, 2010.
[10] *Cox D. R.* / Renewal Theory. New York: Wiley, 1962.
[11] *Тихонов В. И., Миронов М. А.* / Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
[12] *Хинчин А. Я.* / Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.
[13] *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* / Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
[14] *D.J. Daley D. Vere-Jones* / An Introduction to the Theory of Point Processes. **1**. Springer, 2003.
[15] *Lewis P. A. W. (editor)* / Stochastic point processes: statistical analysis, theory and applications. New York: Wiley-Interscience, 1972.
[16] *Чичигина О. А., Петникова В. М., Чиркин А. С.* / Математические модели флуктуационных явлений. Наглядные задачи. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

The limiting transition from the Poisson distribution to the Gauss distribution for physicists

O. A. Chichigina[a], **V. M. Petnikova**[b]

[1]*Department of General Physics and Wave Processes, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*chichigina@ilc.edu.ru,* [b]*petnikova@yahoo.com*

Poisson distribution is derived from gamma-distribution. The passage to normal distribution for sufficiently large values of parameter is proved without using Stirling's formula. Results are illustrated on the example of Brownian particle motion.

PACS: 02.50.Ga, 02.70.Rr, 05.40.Jc.
Keywords: Poisson distribution, gamma-distribution, Stirling's formula, pulse process, Brownian motion.
Received 27 June 2019.

Сведения об авторах

1. Чичигина Ольга Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-26-12, e-mail: chichigina@ilc.edu.ru.
2. Петникова Вера Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-50-35, e-mail: v_petnikova@yahoo.com.