Общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном

О. В. Кечкин,* П. А. Мошарев*†

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей ядерной физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 19

[2] Национальный исследовательский университет МЭИ, кафедра высшей математики
Россия, 111250, Москва, Красноказарменная улица, д. 14

(Статья поступила; Подписана в печать)

В работе представлено общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном в стационарном случае. Один из представленных классов решений описывает поле диона, обладающего нетривиальным дилатонным зарядом. Показано, что для гармонического решения кулоновского типа магнитное поле является чисто кулоновским, в то время как электрическое и дилатонное поля могут быть сложным образом распределены в пространстве.

PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc УДК: 53.01, 537.8

Ключевые слова: электродинамика с дилатоном, точные решения, монополи, дионы.

ВВЕДЕНИЕ: ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА С ДИЛАТОНОМ

Дилатонное обобщение классической электродинамики Максвелла (дилатон-максвелловская электродинамика, ДМЭ) появляется во многих вариантах Теории Великого Объединения, — таких, как многомерная теория Калуцы-Клейна, супергравитация и теория суперструн [1]–[3]. Это нелинейная теория, в которой, кроме классических электрического и магнитного полей, предсказывается существование еще одного, нового скалярного поля — дилатона, взаимодействие которого с полями классической электродинамики в вакууме описывается лагранжианом следующего вида:

$$L = -\frac{1}{4}\, e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi, \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля, A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, ϕ — дилатон, а α — константа связи дилатонного и электромагнитного полей. Легко заметить, что при значении $\alpha = 0$ дилатон и электромагнитный сектор ДМЭ существуют независимо, не взаимодействуя друг с другом.

Различные варианты Теории Великого Объединения предсказывают разные значения константы α. Тот факт, что следствия классической электродинамики хорошо подтверждаются многочисленными экспериментами требует, согласно принципу соответствия, чтобы значения константы α были достаточно малы. В данной работе мы никак не фиксируем константу связи, считая её произвольным (но отличным от нуля) параметром.

В силу существенной нелинейности, поиск точных решений уравнений данной теории представляет собой крайне нетривиальную задачу. В работах [4]–[6] развит подход, позволяющий получать точные решения ДМЭ при помощи методов теории симметрий — в полной аналогии с тем, как это делается при построении стационарных решений Общей Теории Относительности в вакууме. Ограничением этого подхода является то, что он позволяет получать решения, содержащие, кроме дилатона, либо только электростатическое поле, либо только магнитостатическое. В данной работе, в том числе, получен класс решений, включающих сразу все три типа полей.

1. КОМПАКТИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ТРЕХМЕРНЫЙ ЛАГРАНЖИАН

Уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (1) имеют следующий вид:

$$\partial_\mu \left(e^{-2\alpha\phi} F^{\mu\nu}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi - \frac{\alpha}{8} e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

Рассматривая стационарный случай $\partial_0\phi = \partial_0 A^\mu = 0$, и вводя на пространстве решений новый потенциал u согласно соотношению

$$\nabla u = -e^{-2\alpha\phi}\nabla \times \vec{A}, \tag{4}$$

переписываем уравнения (2)–(3) следующим образом:

$$\nabla\left(e^{-2\alpha\phi}\nabla v\right) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla\left(e^{2\alpha\phi}\nabla u\right) = 0, \tag{6}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{\alpha}{4}\left[e^{-2\alpha\phi}\left(\nabla v\right)^2 - e^{2\alpha\phi}\left(\nabla u\right)^2\right] = 0, \tag{7}$$

где $v = A^0$ — стандартный электростатический потенциал. Прямой проверкой можно убедиться в том, что приведенные уравнения являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$\mathcal{L}_3 = -2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 + \frac{1}{2}e^{2\alpha\phi}(\nabla u)^2. \tag{8}$$

*E-mail: kechkin@sinp.msu.ru
†E-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru

2. ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Считая, что все поля зависят от одной гармонической функции $\lambda = \lambda(x^k)$ (где $k = 1,2,3$), то есть рассматривая специальный случай с $\phi = \phi(\lambda), u = u(\lambda), v = v(\lambda)$ и

$$\Delta\lambda = 0, \tag{9}$$

приводим систему уравнений (5) - (7) к виду

$$\left(e^{-2\alpha\phi}v'\right)' = 0, \tag{10}$$

$$\left(e^{2\alpha\phi}u'\right)' = 0, \tag{11}$$

$$\phi'' - \frac{\alpha}{4}\left[e^{-2\alpha\phi}\left(v'\right)^2 - e^{2\alpha\phi}\left(u'\right)^2\right] = 0, \tag{12}$$

где штрих означает производную по λ. Для этой системы можно выписать три интеграла движения

$$e^{-2\alpha\phi}v' = C_1, \tag{13}$$

$$e^{2\alpha\phi}u' = C_2, \tag{14}$$

$$(\phi')^2 - \frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} - \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} = C_3, \tag{15}$$

где C_1, C_2 и C_3 — произвольные вещественные константы. Рассматривая второй из этих интегралов и сравнивая его с выражением (4), делаем вывод, что магнитное поле имеет следующий вид:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -C_2\nabla\lambda. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (15) даётся интегралом

$$\lambda = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} + \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} + C_3}}, \tag{17}$$

который выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода, а интегрирование в элементарных функциях оказывается возможным только при особом выборе параметров.

3. КЛАСС ДИОННЫХ РЕШЕНИЙ

В случае $C_3 = \frac{C_1C_2}{2}$ интеграл (17) принимает следующий вид:

$$\lambda = 2\int \frac{d\phi}{C_1e^{\alpha\phi} + C_2e^{-\alpha\phi}}. \tag{18}$$

При $C_1C_2 > 0$, обозначив $\frac{C_1}{C_2} = k^2$, для решения получаем:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha C_2 k}{2}\lambda + \mathrm{arctg}\,k\right), \tag{19}$$

$$v = -C_2\lambda + \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha C_2 k}{2}\lambda + \mathrm{arctg}\,k\right) - 1\right]. \tag{20}$$

Здесь мы выбрали константы интегрирования таким образом, чтобы поля ϕ и v обращались в ноль при стремлении к нулю функции λ (например, на пространственной бесконечности). Соответствующее выражение для потенциала u также поддаётся вычислению, однако, мы его не приводим, так как его физический смысл исчерпывается наличием магнитного поля, согласно выражению (16).

Далее, при $C_1C_2 < 0$, обозначив $\frac{C_1}{C_2} = -k^2$, получаем решение в следующем явном виде:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda} - 1 + k}{1 - k + (1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda}}, \tag{21}$$

$$v = -C_2\lambda + \frac{2(1-k)}{\alpha k}\left[1 - \frac{2}{(1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda} + 1 - k}\right]. \tag{22}$$

Одним из самых интересных с физической точки зрения объектов теории является центрально–симметричный источник соответствующих силовых полей. Как известно, общее центрально-симметричное решение уравнения Лапласа с нулевой асимптотикой на бесконечности описывает кулоновский потенциал $\lambda = \frac{q}{r}$ (где $q = \mathrm{const}$). Подставляя указанное выражение в полученные решения и раскладывая все потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка, получаем заряды для каждого из полей, а именно: электрический $q_e = C_1q$, магнитный (согласно формуле (16)) $q_m = C_2q$ и дилатонный заряд $q_\phi = \frac{C_1+C_2}{2}q = \frac{q_e+q_m}{2}$.

Имея эти выражения, можно переписать решения (19)–(22) при выбранном виде функции λ в терминах физических констант. Так как формулы (19)–(22) чётны по отношению к параметру k, выбор положительного знака при вычислении квадратного корня в приведенных ниже выражениях не ограничивает множества решений. Формулы, соответствующие выражениям (19)–(20), при условии $q_eq_m > 0$, будут выглядеть следующим образом:

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\frac{q_m}{q_e}}\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}\cdot\frac{\alpha q_m}{2r} + \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}\right)\right], \tag{23}$$

$$v = -\frac{q_m}{r} + \frac{2}{\alpha}\left\{\sqrt{\frac{q_m}{q_e}}\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}\cdot\frac{\alpha q_m}{2r} + \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}\right)\right] - 1\right\}. \tag{24}$$

При условии $q_e q_m < 0$ получим формулы, соответствующие выражениям (21)–(22):

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{-\frac{q_m}{q_e}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\cdot\frac{\alpha q_m}{r}} - 1 + \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}}{\left(1+\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\cdot\frac{\alpha q_m}{r}} + 1 - \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}}, \tag{25}$$

$$v = -\frac{q_m}{r} + \frac{2}{\alpha}\left(\sqrt{-\frac{q_m}{q_e}} - 1\right) \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(1+\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\cdot\frac{\alpha q_m}{r}} + 1 - \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}}\right]. \tag{26}$$

Также интересно отметить, что в варианте (24) при условии $q_m > 0$ потенциал v может иметь бесконечное множество разрывов второго рода в конечной области в окрестности начала координат, радиус которой (расстояние до внешней сингулярности от центра распределения) равен $r_0 = \frac{\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}\cdot\alpha q_m}{\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{q_e}{q_m}}}$. В то же время потенциал (26) при указанных ограничениях на заряды имеет особенность только в начале координат.

4. ЭЛЕКТРО- И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Еще один способ выбора параметров, при котором оказывается возможным явное вычисление интеграла (17), заключается в придании одному из интегралов движения C_1 или C_2 нулевого значения. Фактически при этом мы ограничиваемся рассмотрением по-отдельности электростатического и магнитостатического секторов теории, — аналогично тому, как это было сделано в работе [4]. Надо только иметь в виду, что лагранижан, изученный в той работе, отличался от лагранжиана (1) нетрадиционным выбором знака перед кинетическим членом дилатонного поля, поэтому решения, полученные там, отличаются от представленных далее.

Как видно из уравнений (13) и (14), электростатический сектор теории реализуется при $C_2 = 0$, в то время как магнитостатический — при $C_1 = 0$. В каждом из этих случаев интеграл (17) приобретет вид

$$\lambda = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_{1,2}^2}{4} e^{\pm 2\alpha\phi} + C_3}}. \tag{27}$$

Здесь и далее верхний знак в показателе экспоненты и константа C_1 перед ней соответствуют электростатике, а альтернативный выбор параметров — магнитостатике. В зависимости от знака C_3 будем иметь различный вид решения. Обозначая (в случае $C_3 > 0$) $\frac{4C_3}{C_{1,2}^2} = k^2$, и выбирая константы интегрирования таким образом, чтобы удовлетворить условию исчезания полей при стремлении к нулю потенциала λ, в итоге получаем:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{(k+\sqrt{k^2+1})^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1}{2k(k+\sqrt{k^2+1}) e^{\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda}}, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \mp\frac{4k}{\alpha}\left[\frac{1}{(k+\sqrt{k^2+1})^2 - 1} - \frac{1}{(k+\sqrt{k^2+1})^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1}\right]. \tag{29}$$

Далее, полагая (в случае $C_3 < 0$) $\frac{4C_3}{C_1^2} = -k^2$, получаем для решения с правильной асимптотикой следующие выражения для полей:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{1}{k}\sin\left(\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda + \arcsin k\right), \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \pm\frac{2k}{\alpha}\operatorname{ctg}\left(\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda + \arcsin k\right) \mp \frac{2}{\alpha}\sqrt{1-k^2}. \tag{31}$$

Наконец, в предельном случае $C_3 = 0$ получаем выражения

$$e^{\mp\alpha\phi} = 1 \mp \frac{C_{1,2}\alpha}{2}\lambda, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{C_{1,2}\lambda}{1 \mp \frac{C_{1,2}\alpha}{2}\lambda}. \tag{33}$$

Решения (28)–(33) являются обобщением найденных в работе [7] сферически-симметричных монопольных решений. Аналогично решениям, найденным в работе [5], представленные здесь электрический и магнитный потенциалы при подстановке $\lambda = \frac{q}{r}$ имеют на пространственной бесконечности кулоновский вид с зарядами, равными, соответственно, $q_e = C_1 q$ и $q_m = C_2 q$. Дилатонный заряд для решения (28) равен $q_\phi = q\frac{C_{1,2}\sqrt{1+k^2}}{2}$, для решения (30) $q_\phi = q\frac{C_{1,2}\sqrt{1-k^2}}{2}$, а в предельном случае (32) $q_\phi = q\frac{C_{1,2}}{2}$.

Также формулы (28)–(33) при указанном выборе функции λ могут быть записаны в терминах зарядов. Как и в предыдущем разделе, чётность формул (28)–(31) относительно параметра k позволяет без потери общности решения выбрать всюду положительный знак при вычислении квадратного корня. При условиях $q_\phi q_{e,m} > 0$, $\frac{2q_\phi}{q_{e,m}} > 1$ получаем формулы, соответствующие решениям (28)–(29), следующего вида:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}+\frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2 e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}\cdot\frac{\alpha q_{e,m}}{r}} - 1}{2\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}+\frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right) e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}\cdot\frac{\alpha q_{e,m}}{2r}}}, \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \mp\frac{4}{\alpha}\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}+\frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2-1} - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}+\frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2 e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}-1}\cdot\frac{\alpha q_{e,m}}{r}}-1}\right]. \tag{35}$$

При условиях $q_\phi q_{e,m} > 0$, $\frac{2q_\phi}{q_{e,m}} < 1$ получаем формулы, соответствующие решениям (30)–(31), следующего вида:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}}\cdot\sin\left(\mp\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}\cdot\frac{\alpha q_{e,m}}{2r}+\arcsin\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}\right), \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}\cdot\mathrm{ctg}\left(\mp\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}\cdot\frac{\alpha q_{e,m}}{2r}+\arcsin\sqrt{1-\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}\right)\mp\frac{4q_\phi}{\alpha q_{e,m}}. \tag{37}$$

Наконец, в предельном случае при $q_\phi = \frac{q_{e,m}}{2}$ получаем выражения, соответствующие решениям (32) - (33):

$$e^{\mp\alpha\phi} = 1 \mp \frac{q_\phi\alpha}{r}, \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{2q_{e,m}}{2r \mp q_{e,m}\alpha}. \tag{39}$$

Можно отметить, что электростатические потенциалы, описываемые формулами (35) и (39), при условии $\alpha q_e < 0$ имеют конечную величину во всем пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено решение уравнений ДМЭ, включающее нетривиальные электрическое и магнитное поля. Магнитное поле в случае сферической симметрии всегда имеет кулоновский вид, а электрическое и дилатонное поля распределены в пространстве более сложным образом и при определенном выборе параметров могут иметь конечную величину во всем пространстве. Остаются открытыми вопросы нахождения дифференциального сечения рассеяния пробных частиц на найденных потенциалах и уровней энергии пробной частицы в найденных полях, подобно тому, как это делается в работах [8, 9] для кулоновского диона. Поиск ответов на эти вопросы может вестись с двух позиций: либо в предположении, что пробная частица взаимодействует только с электрическим и магнитным полями, «не замечая» присутствия дилатонного поля, либо рассматривая тот или иной вид обобщенной силы Лоренца, явно учитывающий влияние дилатонного поля на движение пробной частицы (как, например, в согласованной с принципом наименьшего действия обобщённой динамике, развитой в работе [10]).

[1] *Overduin J. M., Wesson P. S.* // Phys. Rept. 1997. **283**. P. 303

[2] *Berman D. S., Thompson D. C.* // Phys. Rept. 2014. **566**,

1.
[3] *Youm D.* // Phys. Rept. 1999. **316**, 1.
[4] *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2016. **31**, 23.
[5] *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Mod. Phys. Lett. A. 2016. **31**, 31.
[6] *Кечкин О. В., Мошарев П. А.* // Труды XVI Межвузовской научной школы молодых специалистов Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине. 2015.
[7] *Gibbons G. W., Wells C. G.* // Class. Quant. Grav. 1994. **11**. 2499.
[8] *Shnir Y. M.* // Magnetic Monopoles. Springer. 2005
[9] *Schwinger J.* // Ann. Physics. 1976. **101**. P. 451.
[10] *Denisova I. P., Kechkin O. V.* // Phys.Part.Nucl.Lett. 2018. **15**, N 5.

General harmonic solution of the equations of dilaton-Maxwell electrodynamics

O. V. Kechkin[1,a], **P. A. Mosharev**[1,2,b]

[1]*Department of General Nuclear Physics, Faculty of Physics,Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia*

[2]*Department of Higher Mathematics, National Research University «Moscow Power Engineering Institute». Moscow 111250, Russia*

E-mail: [a]*kechkin@sinp.msu.ru,* [b]*moscharev.pavel@physics.msu.ru*

The paper presents a general harmonic solution of Maxwell's electrodynamics equations with a dilaton in the stationary case. One of the presented classes of solutions describes the field of a dione with a nontrivial dilaton charge. It is shown that for a harmonic solution of the Coulomb type, the magnetic field is purely Coulomb, whereas the electric and dilaton fields can be distributed in space in a complex way.

PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc
Keywords: electrodynamics coupled to dilaton, exact solutions, dions, monopoles.
Received 11 August 2019.

Сведения об авторах

1. Кечкин Олег Вячеславович — доктор физ. мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-58, e-mail: kechkin@sinp.msu.ru.
2. Мошарев Павел Александрович — аспирант; тел.: (926) 925-44-23, e-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru.