Безмассовая квазичастица в графене в постоянном магнитном поле и поле электромагнитной волны

И. С. Дурандина,* В. Ч. Жуковский†
*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
(Статья поступила 05.12.2018; Подписана в печать 03.04.2019)

Изучено движение электрона в графене в магнитном поле в присутствии внешней электромагнитной волны циркулярной поляризации. Электрон в графене имеет линейный по импульсу энергетический спектр, что соответствует закону дисперсии для безмассовой квазичастицы. Решение,соответствующее циклотронному резонансу, когда частота излучения совпадает с «циклотронной частотой» квазичастицы в отсутствие электромагнитной волны, получено в пределе слабого поля. Поскольку частота вращения в магнитном поле безмассовой квазичастицы зависит от её энергии, линия циклотронного резонанса оказывается очень широкой. Для специального случая, когда частота излучения вдвое превышает «циклотронную» частоту, получено точное решение уравнения движения квазичастицы в магнитном поле и поле волны. Таким образом, в этом случае, с точки зрения описания движения электрона, получаем своеобразное деление частоты волны на два в магнитном поле.

PACS: 81.05.U-, 78.67.-n, 73.50.Fq УДК: 538.95
Ключевые слова: графен, циклотронный резонанс.

ВВЕДЕНИЕ

В 2010 г. Гейм и Новоселов были удостоены Нобелевской Премии за «передовые опыты, связанные с двумерным материалом — графеном» [1–5]. Графен, обладающий уникальными свойствами, интересен как с прикладной точки зрения, так и для фундаментальной науки. Из-за своих необычных свойств электроника на основе графена представляет собой перспективное направление исследований. Возможность описания графена с помощью теоретико-полевых методов делает его объектом изучения физиков-теоретиков. В качестве примера можно привести описание методами эффективной квантовой теории поля влияния дефектов на электронные свойства графена [6, 7], а также описание фазовых переходов во внешних полях [8].

В нелигированном графене при температуре $T = 0$ нижняя (дырочная) зона полностью занята, в то время как верхняя (электронная) — свободна. Уровень Ферми проходит через точки Дирака. Вблизи этих точек состояние электронов и дырок описывается эффективным уравнением Дирака с нулевой эффективной массой квазичастиц. Энергетический спектр электронов в графене линейный, соответствующий закону дисперсии энергии для безмассовых частиц.

$$\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{P}) = \pm v_f P = \pm v_f |\mathbf{P}|. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$ — импульс электрона, рассчитанный в соответствующих точках Дирака, и $v_f \approx 10^8$ см/с — материальный параметр, т. е. скорость Ферми.

Свободная заряженная массивная частица (т.е. электрон) с зарядом $e = -e_0 < 0$, массой m, помещенная в магнитное поле $\mathbf{B}$, движется по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной направлению поля $\mathbf{B}$, с циклотронной частотой (для нерелятивистских скоростей, $v \ll c$, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с)

$$\omega_c = e_0 B/mc. \quad (2)$$

Частица поглощает энергию излучения, если частота внешней электромагнитной волны ω близка к циклотронной частоте, $\omega \simeq \omega_c$. Это явление называется циклотронным резонансом (ЦР), оно широко используется в физике твердого тела для описания материальных свойств, таких как: эффективная масса носителей заряда, сечение поверхности Ферми в металлах и полупроводниках. Явление циклотронного резонанса изучено в магнитных полях порядка $0.1T = 10^3 G$. По полуширине линии ЦР можно определить характерные времена рассеяния, и, тем самым, установить подвижность носителей. По площади линии можно установить концентрацию носителей заряда в образце. Циклотронный резонанс — поглощение или отражение электромагнитных волн проводниками, помещёнными в постоянное магнитное поле, на частотах равных или кратных циклотронной частоте носителей заряда. На примере циклотронного резонанса можно наблюдать различие во взаимодействии с излучением между безмассовыми и массивными частицами. В широко используемых полупроводниках, таких как GaAs (Арсенид галлия), ширина ЦР мала и сопоставима с циклотронной частотой [10].

Магнитооптическая проводимость графена и его циклотронный отклик были изучены в теории линейного отклика в ряде публикаций. Также были проведены

*E-mail: durandina.i.s@yandex.ru
†E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

интенсивные экспериментальные исследования циклотронного резонанса в графене (так же как других электродинамических явлений), так как с развитием технологий становятся доступными образцы графена достаточно большого размера. Опубликованы первые экспериментальные результаты по изучению циклотронного резонанса в однослойном графене. Было обнаружено, что линия циклотронного резонанса чрезвычайно широкая. Следует заметить, что *циклотронный резонанс безмассовых квазичастиц (1) имеет очень небычные физические свойства, а линия циклотронного резонанса может быть очень широкой для совершенно чистого графена.*

В ряде работ (см., например, [11–13]), исследовался нелинейный эффект резонансного взаимодействия безмассовых квазичастиц в графене, помещенном в магнитное поле, с электромагнитной волной. В частности, в работе [11] изучался циклотронный резонанс в графене на основе классических уравнений движения заряженной безмассовой квазичастицы в магнитном поле и слабой электромагнитной волне.

В настоящей работе проводится детальное исследование взаимодействия безмассовой квазичастицы (электрона) в графене с электромагнитной волной в магнитном поле на основе классической электродинамики. Заметим, что классическое приближение может применяться к описанию движения электронов, занимающих высоковозбужденные уровни Ландау $n \gg 1$, в слабом магнитном поле, когда можно пренебречь квантованием энергии и импульса. Изучается как случай «резонанса», когда частота волны совпадает с частотой вращения частицы в магнитном поле в отсутствие волны, при этом рассматривается приближение слабой волны, так и случай «квазирезонанса», когда частота вращения электрона в два раза меньше частоты волны. В последнем случае удаётся получить точное решение уравнений движения электрона без предположения о слабости волны. Заметим, что подобный эффект деления частоты на два демонстрировался ранее в ряде работ, посвященных, например, возбуждению хаотических спиновых волн в «кольцевых» системах в магнитном поле [14, 15].

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Опишем классическое движение квазичастицы в однородном магнитном поле $\mathbf{B}||Oz$ ($\mathbf{B} = \mathrm{const}$) и в присутствии внешней электромагнитной волны

$$\mathbf{E}(t) = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} - \nabla A_0.$$

Для частицы ненулевой массы $m \neq 0$ из функции Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + e/c(\mathbf{vA}) - eA_0$$

получаем уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + e\mathbf{E}. \tag{3}$$

Здесь и ниже для удобства записи сложных формул мы будем применять следующие обозначения: для скалярного произведения $(\mathbf{vp}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}) = (\mathbf{v},\mathbf{p})$, а также для векторного произведения $[\mathbf{vB}] = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$.

Для частицы нулевой массы $m = 0$ с энергией (1) имеем неопределенность в уравнении (3), когда $m \to 0$ и $v \to c$. Обратимся к гамильтонову методу. С помощью функции Гамильтона для заряда в электромагнитном поле

$$H = v_f\sqrt{(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2} + eA_0,\ \ \mathbf{p} - e/c\mathbf{A} = \mathbf{P},$$

где $\mathbf{p}$ – канонический импульс, получим уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = v_f\frac{\mathbf{p} - e/c\mathbf{A}}{\sqrt{(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2}} = \mathbf{v},$$
$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} - e/c\frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial(\mathbf{v}, \mathbf{p} - e/c\mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} + e\frac{\partial A_0}{\partial \mathbf{r}}$$

и

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{v}, \mathbf{p} - e/c\mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} &= -e/c\frac{\partial(\mathbf{v},\mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \\ &= -(e/c)(\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}) - (e/c)\mathbf{v}\times(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{A}),\end{aligned} \tag{4}$$

так что в итоге получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -e/c\frac{d\mathbf{A}}{dt} + e/c(\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}) - e\frac{\partial A_0}{\partial \mathbf{r}} + \\ &\quad + (e/c)\mathbf{v}\times(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{A}) = \\ &= (e/c)\mathbf{v}\times(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{A}) - (e/c)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\frac{\partial A_0}{\partial \mathbf{r}}.\end{aligned} \tag{5}$$

То есть

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + (e/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{6}$$

Если внешнее электрическое поле равно нулю, $\mathbf{E}(t) = 0$, энергия $\mathcal{E} = v_f P$ является интегралом движения, частица вращается в магнитном поле так же, как и в случае массивной частицы, с частотой, зависящей от энергии частицы $\Omega = e_0 B v_f/Pc = e_0 B v_f^2/c\mathcal{E}$ (здесь $e_0 > 0$ — абсолютное значение заряда электрона $e = -e_0$). Однако, если электрическое поле отлично от нуля, $\mathbf{E}(t) \neq 0$, энергия электрона $\mathcal{E} = v_f P$ уже не сохраняется и резонансные условия нарушаются.

2. РЕЗОНАНС В ВОЛНЕ ЦИРКУЛЯРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Предположим, что внешнее электрическое поле

$$\mathbf{E}(t) = E_0(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \tag{7}$$

отлично от нуля $E_0 \neq 0$. Тогда получаем уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{e_0}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} - e_0\mathbf{E}(t), \quad \mathbf{v} = v_f\frac{\mathbf{P}}{P}. \tag{8}$$

Следует отметить, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси z, следовательно векторы напряженностей электрического поля и магнитного поля волны лежат в плоскости XY, где, как мы предполагаем, движется электрон. Поскольку скорость v_f составляет $1/300$ от скорости света c, мы можем пренебречь влиянием магнитного поля волны $\mathbf{B}(t)$ на движение электрона.

Сначала рассмотрим случай без электрического поля. Тогда

$$\mathbf{P}\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{e_0}{c}(\mathbf{P}, \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0, \tag{9}$$

и $\mathbf{P}^2 = \mathrm{const}$, $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{P}) = \pm\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = v_f|\mathbf{P}| = v_f P = \mathrm{const}$.

Имеем $\mathbf{P} = (P_x,\ P_y,\ 0) = P(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)$, тогда согласно уравнению (8) получим

$$\begin{aligned} P\dot\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) &= \\ &= -\frac{e_0 B}{c}v_f(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\times(0,0,1) = \\ &= \frac{e_0 B v_f}{c}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \end{aligned} \tag{10}$$

так что $\dot\varphi = \frac{e_0 B v_f}{cP} = \Omega$ и

$$\mathbf{P} = (P_x,\ P_y,\ 0) = P(\cos(\Omega t + \phi_0),\ \sin(\Omega t + \phi_0),\ 0). \tag{11}$$

Частота вращения безмассовой частицы, как было установлено в предыдущем разделе, зависит от ее энергии $\Omega = e_0 B v_f/Pc = e_0 B v_f^2/\mathcal{E}c$.

Теперь включим электрическое поле, которое имеет *циркулярную поляризацию* в направлении, совпадающем с направлением вращения *безмассовой* частицы. Тогда вместо (9) в соответствии с (8) имеем

$$\mathbf{P}\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -e_0(\mathbf{P}, \mathbf{E}_0) = -e_0 P E_0\cos(\varphi - \omega t). \tag{12}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\frac{e_0}{c}(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}\times\mathbf{B}) - e_0E_0^2 = \\ &= -\frac{e_0}{c}(\mathbf{B}, \mathbf{E}_0\times\mathbf{v}) - e_0E_0^2 = \\ &= -\frac{e_0}{c}BE_0v_f\sin(\varphi - \omega t) - e_0E_0^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (12) можем переписать в виде

$$\frac{dP}{dt} = -e_0E_0\cos(\varphi - \omega t), \tag{14}$$

в то время как уравнение (13) перепишется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}\cos(\varphi - \omega t) - P\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi - \omega t) &= \\ = -\frac{e_0}{c}Bv_f\sin(\varphi - \omega t) - e_0E_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Следует отметить, что уравнения (14) и (15) с точностью до изменения обозначений совпадают с формулами (4) и (5) в работе [11]. Действительно, из уравнения (14) имеем после тривиальных преобразований для уравнения (15)

$$P\frac{d\varphi}{dt} = \frac{e_0}{c}Bv_f + e_0E_0\sin(\varphi - \omega t). \tag{16}$$

В соответствии с начально заявленной проблемой, рассмотрим случай *«резонанса»* $\omega = \Omega$, т.е. совпадение частоты обращения частицы в магнитном поле Ω, без включения электромагнитной волны $E_0 = 0$, с частотой волны ω. Тогда с учетом влияния переменного электрического поля волны $E_0 \neq 0$ введем отклонения $\hat P\varepsilon$ и ϕ

$$P = \hat P(1+\varepsilon),\ \varphi = \hat\varphi + \phi,\ \hat\varphi = \Omega t + \varphi_0 \tag{17}$$

от значений импульса P и фазы φ при $E_0 = 0$

$$\begin{gathered} P = \mathrm{const} = \hat P,\ \varphi = \hat\varphi, \\ \frac{d\hat\varphi}{dt} = \mathrm{const} = \frac{e_0Bv_f}{c\hat P} = \Omega = \omega. \end{gathered} \tag{18}$$

Начнем с уравнения (14)

$$\hat P\dot\varepsilon = -e_0E_0\cos(\phi + \varphi_0), \tag{19}$$

а из уравнения (16) получим, что

$$\frac{d\phi}{dt}(1+\varepsilon) + \varepsilon\omega = \frac{e_0E_0\sin(\phi + \varphi_0)}{\hat P}. \tag{20}$$

Введем безразмерный параметр

$$\xi = \frac{e_0E_0}{\omega\hat P}, \tag{21}$$

тогда уравнения (20) и (19) примут окончательный вид

$$\frac{d\phi}{dt}(1+\varepsilon) + \varepsilon\omega = \omega\xi\sin(\phi + \varphi_0), \tag{22}$$

$$\dot\varepsilon = -\omega\xi\cos(\phi + \varphi_0). \tag{23}$$

A. ПРЕДЕЛ СЛАБОГО ПОЛЯ

Изучим случай слабого поля

$$\xi = \frac{e_0 E_0}{\omega \hat{P}} \ll 1 \tag{24}$$

при $\varepsilon \sim \sqrt{\xi} \ll 1$, $\frac{d\phi}{d(\omega t)} \sim \varepsilon \sim \sqrt{\xi} \ll 1$. Тогда уравнения (22) и (23) можно линеаризовать

$$\frac{d\phi}{dt} = -\varepsilon\omega + \omega\xi \sin(\phi + \varphi_0), \tag{25}$$

$$\dot{\varepsilon} = -\omega\xi \cos(\phi + \varphi_0). \tag{26}$$

Пусть $\varphi_0 = \pi/2$, тогда имеем

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega\varepsilon + \omega\xi \cos\phi, \tag{27}$$

$$\dot{\varepsilon} = \omega\xi \sin\phi \tag{28}$$

или

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi}\cos\phi, \; \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \sqrt{\xi}\sin\phi, \tag{29}$$

где $\tau = \sqrt{\xi}\omega t$. Поскольку $\varepsilon \sim \sqrt{\xi} \ll 1$, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}} \sim 1$ имеем

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}}, \; \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \sqrt{\xi}\sin\phi, \tag{30}$$

тогда отсюда следует уравнение

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\sin\phi, \tag{31}$$

которое представляет собой уравнение нелинейных колебаний. Для малых отклонений фазы от $\hat{\varphi}$, т.е. при $\phi \ll 1$, последнее уравнение может быть линеаризовано,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \xi\omega^2\phi = 0,$$

Тогда решение для ε может быть найдено из второго уравнения в (30). Заметим, что вышеприведенный результат хорошо согласуется с решением, полученным в [11] (уравнение (8)).

3. СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Изучим частное решение уравнений (22), при этом не будем предполагать, что поле волны слабое. Из уравнения (22) вместе с уравнением (23) найдем

$$\frac{d\varepsilon}{d\phi} = -\frac{dt}{d\phi}\omega\xi\cos(\phi + \varphi_0), \tag{32}$$

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1+\varepsilon}{\omega\xi\sin(\phi+\varphi_0) - \varepsilon\omega}, \tag{33}$$

так что

$$\frac{d\varepsilon}{d\phi} = -\frac{(1+\varepsilon)\xi\cos(\phi+\varphi_0)}{\xi\sin(\phi+\varphi_0) - \varepsilon}. \tag{34}$$

Пусть $\xi\sin(\phi+\varphi_0) = y$, тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon - y}$$

или

$$\frac{d(\varepsilon - y)}{dy} + 1 = \frac{1+\varepsilon - y + y}{\varepsilon - y},$$

обозначим $\varepsilon - y = x$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1+y}{x},$$

и тогда интегрируем

$$\begin{aligned}(\varepsilon - \xi\sin(\phi+\varphi_0))^2 &= \\ &= (\xi\sin(\phi+\varphi_0))^2 + 2\xi\sin(\phi+\varphi_0) + 2C,\end{aligned} \tag{35}$$

где $C = \mathrm{const}$ – константа интегрирования.

Таким образом, имеем решение

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \xi\sin(\phi+\varphi_0) \pm \\ &\pm\sqrt{(\xi\sin(\phi+\varphi_0))^2 + 2\xi\sin(\phi+\varphi_0) + 2C}.\end{aligned} \tag{36}$$

Выберем $C = 1/2$, тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \xi\sin(\phi+\varphi_0) \pm (\xi\sin(\phi+\varphi_0)+1) = \\ &\left\{\begin{array}{l} 2\xi\sin(\phi+\varphi_0)+1, \\ -1 \end{array}\right. .\end{aligned} \tag{37}$$

Если положить $\varepsilon = -1$, тогда, согласно уравнениям (37), (17), имеем в уравнении (33) $dt/d\phi = 0$, $P = 0$. При другом выборе имеем, согласно (33)

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{2(\xi\sin(\phi+\varphi_0)+1)}{\omega(\xi\sin(\phi+\varphi_0) - 2\xi\sin(\phi+\varphi_0) - 1)} = -\frac{2}{\omega}, \tag{38}$$

так что $\dot{\phi} = -\omega/2$. Окончательно имеем решения

$$\phi = -\frac{\omega}{2}t, \tag{39}$$

$$\varepsilon = 2\xi\sin(\varphi_0 - \frac{\omega t}{2}) + 1, \tag{40}$$

и в уравнениях (17)

$$\begin{aligned}P &= \hat{P}(1+\varepsilon) = 2\hat{P}(1+\xi\sin(\varphi_0 - \frac{\omega t}{2})), \\ \varphi &= \omega t + \varphi_0 - \frac{\omega}{2}t = \frac{\omega t}{2} + \varphi_0, \; \omega = \Omega.\end{aligned} \tag{41}$$

Эти решения легко проверить, подставив их непосредственно в уравнения (22) и (23).

Для упрощения вычислений изменим обозначения

$$2\hat{P} = P_0,\ \omega/2 = \tilde{\omega},\ 2\hat{P}\xi = 2\hat{P}\frac{e_0E_0}{\omega\hat{P}} = 2\frac{e_0E_0}{\omega} = \frac{e_0E_0}{\tilde{\omega}},$$

тогда

$$P = \hat{P}(1+\varepsilon) = P_0 - \frac{e_0E_0}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t - \varphi_0), \tag{42}$$

$$\varphi = \tilde{\omega}t + \varphi_0,\ \omega = \Omega = 2\tilde{\omega}. \tag{43}$$

Для компонент $\mathbf{P}$ имеем

$$\begin{gathered} P_x = P\cos\varphi = \\ = P_0\cos(\tilde{\omega}t+\varphi_0) - \frac{e_0E_0}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t-\varphi_0)\cos(\tilde{\omega}t+\varphi_0) = \\ = P_0\cos(\tilde{\omega}t+\varphi_0) - \frac{e_0E_0}{2\tilde{\omega}}(\sin 2\tilde{\omega}t - \sin 2\varphi_0), \\ P_y = P\sin\varphi = \\ = P_0\sin(\tilde{\omega}t+\varphi_0) - \frac{e_0E_0}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t-\varphi_0)\sin(\tilde{\omega}t+\varphi_0) = \\ = P_0\sin(\tilde{\omega}t+\varphi_0) + \frac{e_0E_0}{2\tilde{\omega}}(\cos 2\tilde{\omega}t - \cos 2\varphi_0). \end{gathered} \tag{44}$$

Мы можем окончательно переписать результаты в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_x &= P_0\cos(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0) - \frac{e_0E_0}{\omega}(\sin\omega t - \sin 2\varphi_0), \\ P_y &= P_0\sin(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0) + \frac{e_0E_0}{\omega}(\cos\omega t - \cos 2\varphi_0), \end{aligned} \tag{45}$$

где $\omega = 2\tilde{\omega}$.

Для сравнение нашего решения (45) с результатами статьи [11] мы можем преобразовать выражения (45) в форму, подобную записи решения (3) статьи [11]. Для этого в выражении (45) используем очевидные тождества

$$\cos\omega t - \cos 2\varphi_0 = -2\sin(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0)\sin(\frac{\omega t}{2}-\varphi_0), \tag{46}$$

$$\sin\omega t - \sin 2\varphi_0 = 2\cos(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0)\sin(\frac{\omega t}{2}-\varphi_0), \tag{47}$$

так что

$$\begin{aligned} P_x &= P_0\left[1 - \frac{2e_0E_0}{P_0\omega}\sin(\frac{\omega t}{2}-\varphi_0)\right]\cos(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0), \\ P_y &= P_0\left[1 - \frac{2e_0E_0}{P_0\omega}\sin(\frac{\omega t}{2}-\varphi_0)\right]\sin(\frac{\omega t}{2}+\varphi_0). \end{aligned} \tag{48}$$

Полученное здесь решение принципиально отличается от результата [11] тем, что оно является точным как по магнитному полю, так и по полю волны и соответствует делению частоты волны на два.

Для сравнения с формулами (3) статьи [11] преобразуем равенства (48), введя импульс $P(t)$ и фазу $\Phi(t)$

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0\left[1 - \frac{2e_0E_0}{P_0\omega}\sin(\frac{\omega t}{2}-\varphi_0)\right], \\ \Phi(t) &= -\omega t/2 + \varphi_0 - \pi/2. \end{aligned} \tag{49}$$

Тогда равенства (48) принимают вид формул (3) статьи [11]

$$\begin{aligned} P_x &= -P(t)\sin(\omega t + \Phi(t)), \\ P_y &= P(t)\cos(\omega t + \Phi(t)). \end{aligned} \tag{50}$$

Заметим, однако, что наше точное решение (45), (50) отличается от приближенных решений статьи [11] (полученных, кстати, численным путем и проиллюстрированных графически) тем, что у нас частота обращения частицы в магнитном поле ω_B, без включения электромагнитной волны $E_0 = 0$, отличается от частоты волны ω в два раза:

$$\omega_B = e_0Bv_f/P_0c = \omega/2. \tag{51}$$

Таким образом, найденное в данном разделе точное решение при условии «квазирезонанса» (51), т.е. деления частоты, отличается от «резонансного» условия предыдущей главы

$$\Omega = e_0Bv_f/Pc = \omega, \tag{52}$$

при котором аналитически удаётся рассмотреть только случай слабого поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Движение безмассовой квазичастицы в графене существенно отличается от движения массивной частицы во внешнем поле. Частота вращения квазичастицы (электрона) в магнитном поле («циклотронная частота») зависит от её энергии. При решении уравнения движения электрона в условиях резонанса, т.е. совпадения частоты волны с «циклотронная частотой», в случае слабой волны показано, что уравнение для отклонения фазы от ее постоянного значения сводится к уравнению нелинейных колебаний. В специальном случае, когда частота волны вдвое превышает «циклотронную частоту», удаётся получить точное решение уравнения движения электрона в волне произвольной интенсивности. Последний случай можно интерпретировать с точки зрения решения уравнения движения электрона как деление частоты волны на два.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А. Е. Лобанову за внимание к работе.

[1] *Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S. V., Grigorieva I. V., Firsov A. A.* // Science. 2004. **306**, 5696. P. 666.
[2] *Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Katsnelson M., Grigorieva I. V., Dubonos S. V., Firsov A. A.* // Nature. 2005. **438**. P. 197.
[3] *Katsnelson M. I.* // Materials Today. 2007. **10**, 1-2. P. 20.
[4] *Geim A. K.* // Science. 2009. **324**, 5934. P. 1530.
[5] *Castro Neto A. H., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S., Geim A. K.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**, 109.
[6] *Vozmediano M. A. H., Katsnelson M. I., Guinea F.* // Phys. Reports. 2010. **496**, 4–5. P. 109.
[7] *Ebert D., Zhukovsky V. Ch., Stepanov E. A.* // J. of Phys.: Condensed Matter. 2014. **26**, 12.
[8] *Ebert D., Klimenko K. G., Kolmakov P. B., Zhukovsky V. Ch.* // Annals of Phys. 2016. **371**. P. 254.
[9] *Neto A. H. C., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S., Geim A. K.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**, 109.
[10] *Kukushkin I. V., Muravev V. M., Smet J. H., Hauser M., Dietsche W., Klitzing K.* // Phys. Rev. B. 2006. **73**, 113310.
[11] *Mikhailov S. A.* // Phys. Rev. B. 2009. **79**, 241309(R).
[12] *Mikhailov S.A., Ziegler K.* // J. of Phys.: Condensed Matter. 2008. **20**, 38.
[13] *Avetissian H. K., Ghazaryan A. G., Mkrtchian G. F., Sedrakian K. V.* // J. Nanophoton. 2017. **11(1)**, 016004.
[14] *Wu M., Hagerstrom A. M., Eykholt R., Kondrashov A., Kalinikos B.A.* // Phys. Rev. Lett. 2009. **102**, 237203.
[15] *Hagerstrom A., Wu M., Eykholt R., Kalinikos B.A.* // Phys. Rev. B. 2011. **83**, 104402.

Massless quasi-particle in a constant magnetic field and electromagnetic wave in graphene

I. S. Durandina[a], **V.Ch.Zhukovsky**[b]

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]durandina.i.s@yandex.ru, [b]zhukovsk@phys.msu.ru

The motion of an electron in graphene in a magnetic field in the presence of an external electromagnetic wave of circular polarization is studied. Electron in graphene has linear momentum energy spectrum corresponding to the dispersion law for massless quasiparticles. The solution corresponding to cyclotron resonance when a frequency of radiation coincides with a «cyclotron frequency» of quasiparticles in the absence electromagnetic wave is obtained in the limit of a weak field. Since a rotational frequency of massless quasiparticles in magnetic field depends on its energy a cyclotron resonance line turns out to be very broad. For the special case, where the frequency of radiation is twice the «cyclotron» frequency, the exact solution of the equation of motion of quasiparticle in a magnetic field and field of the wave is obtained. Thus in this case in terms of describing the electron motion we obtain a kind of the wave frequency halving in a magnetic field.

PACS: 81.05.U-, 78.67.-n, 73.50.Fq.
Keywords: graphene, cyclotron resonance.
Received 12 May 2018.

Сведения об авторах

1. Дурандина Ирина Сергеевна — студентка; e-mail: durandina.i.s@yandex.ru.
2. Жуковский Владимир Чеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: 8(495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.