

**Установление колебаний в генераторе обратной волны в рамках двумерной модели**Г. М. Вдовина,<sup>\*</sup> А. А. Фунтов,<sup>†</sup> А. Д. Коваль<sup>‡</sup>*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов, кафедра электроники, колебаний и волн  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83*

(Статья поступила 09.08.2019; Подписана в печать 12.08.2019)

Исследуются процессы установления колебаний в генераторе обратной волны в сверхрегенеративном режиме в рамках линейной теории. При этом ток электронного потока превышает пусковое значение. При анализе вводится комплексная частота, мнимая часть которой характеризует нарастание колебаний во времени. Рассмотрение проводится в рамках двумерной модели с учетом влияния фокусирующего магнитного поля конечной величины. В этом случае в электронном потоке помимо продольных высокочастотных смещений возможно появление поперечных. Результаты получены с применением метода последовательных приближений. Выведены условия для получения искомой характеристики, отвечающей за нарастание волны, приведены зависимости данной величины от соотношения тока электронного пучка и пускового значения тока при различных значениях циклотронного угла пролета. Также построены зависимости для времени установления колебаний при различных параметрах системы в линейном приближении. В предельных случаях полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами одномерной теории. Отдельно рассмотрен случай циклотронного резонанса, когда в электронном пучке возбуждается только медленная циклотронная волна, что заметно упрощает исходную задачу и исходные соотношения.

PACS: 84.40.Fe; 84.30.Le

УДК: 621.385.632.3, 621.385.6

Ключевые слова: лампа обратной волны, генератор, установление колебаний, магнитное поле, циклотронный резонанс.

**ВВЕДЕНИЕ**

В рамках линейной двумерной теории рассматривается процесс установления колебаний в генераторе обратной волны в сверхрегенеративном режиме, т.е. когда ток электронного потока превышает его пусковое значение. Время, в течение которого происходит установление собственных колебаний в системе, определяет переходный процесс. Рассмотрение проводится с учетом влияния продольного фокусирующего магнитного поля конечной величины. Учет последнего приводит к появлению высокочастотных смещений электронов в пучке в поперечном направлении. В данном случае целью было рассмотреть на сколько критично влияние магнитного поля на процесс установления колебаний.

Качественно процесс установления колебаний в генераторах обратной волны был описан еще в середине прошлого столетия (например, [1–3]). Принято последовательно выделять несколько этапов, каждый из которых длится определенный промежуток времени:

1. электроны движутся вдоль линии передачи, но нарастания не происходит;
2. пройденное электронами расстояние становится больше пусковой длины, соответствующей возбуждению колебаний;

3. электроны долетели до коллекторного конца (за время  $t_1$ ), и устанавливается форма распределения амплитуды поля в продольном направлении (за время  $t_2$ );
4. распределение амплитуды вдоль оси не меняется, но колебания продолжают нарастать в линейном приближении по экспоненциальному закону от времени (в течение  $t_3$ , что составляет основную часть времени установления колебаний,  $V_s = V_{x0} \exp(\alpha t_3)$ );
5. нелинейные факторы замедляют рост амплитуды колебаний (в течение времени  $t_4 \ll t_3$ ).

В указанных работах рассматривается линейная одномерная теория, в том числе подробно выводятся дисперсионные соотношения, исследуются случаи больших пространственных зарядов, однако двумерная модель так и не была исследована. Также интерес представляет работа [4], в которой приведено сравнение результатов теоретического и экспериментального исследования переходного процесса установления колебаний. В ней расчеты проведены на основе нестационарной нелинейной теории лампы обратной волны (ЛОВ).

**1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ**

Перейдем к количественному анализу установления колебаний. Пусть имеется электронный поток, движущийся в направлении  $x$  со средней скоростью  $v_0$ . Вектор индукции фокусирующего магнитного поля  $B(B, 0, 0)$  также направлен по оси  $x$ . В качестве

<sup>\*</sup>E-mail: vdovinagm@gmail.com<sup>†</sup>E-mail: aafuntov@mail.ru<sup>‡</sup>E-mail: annettekoval@gmail.com

исходных соотношений используются выражения для высокочастотных продольных  $\tilde{x}$  и поперечных  $\tilde{y}$  смещений, полученные из уравнения движения, и уравнение возбуждения продольной составляющей электрического поля  $E_x$  :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tilde{x} = \eta E_x, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tilde{y} = j\eta E_x \operatorname{cth}(\beta_0 y_0) - \omega_c^2 \tilde{y}, \quad (2)$$

$$E_x(x) = \frac{\beta_e \beta_0^2 K_0 I_0}{2 \operatorname{sh}(\beta_0 d)} \exp(-j\beta_0 x) \times \int_0^x (j\tilde{x} \operatorname{sh}(\beta_0 y_0) + \tilde{y} \operatorname{ch}(\beta_0 y_0)) \exp(j\beta_0 \xi) d\xi, \quad (3)$$

где  $\eta$  — удельный заряд электрона,  $\omega_c = \eta B$  — циклотронная частота,  $I_0$  — ток электронного потока,  $\beta_0$  — постоянная распространения волны в линии без электронного потока,  $\beta_e$  — постоянная распространения волны в присутствии электронного потока,  $d$  — ширина пространства взаимодействия,  $y_0$  — координата влета пучка в пространство взаимодействия,  $K_0$  — сопротивление связи.

Уравнения (1)–(3) выведены из уравнения движения аналогично тому, как это сделано в [2] в том случае, если речь идет об обратной волне.

При анализе собственных колебаний вводится комплексная частота  $\omega_1 = \omega - j\alpha$ , аналогично тому, как это описано в [3]. В целом прием достаточно искусственный, однако помогает избежать применения специального математического аппарата. Замена частоты в уравнениях для монохроматических колебаний на комплексную позволяет ввести параметр  $\alpha$ , который характеризует нарастание ( $\alpha > 0$ ) или затухание ( $\alpha < 0$ ) колебаний во времени. Идея подобной замены заключается в том, что в каждый момент времени колебания являются квазигармоническими, и амплитуда колебаний за период изменяется на пренебрежимо малую величину. При токе пучка равном пусковому значению тока и  $\alpha = 0$  колебания в системе являются чисто гармоническими и реализуется пусковой режим в ЛОВ. Если же ток пучка меньше пускового значения, то  $\alpha < 0$ , и собственные колебания в ЛОВ затухнут со временем.

Применяя к уравнениям (1)–(2) преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях и подставляя полученные выражения для продольных и поперечных смещений в уравнение для напряженности электрического поля (3), можно получить в результате:

$$E_x(l) = E_0 \exp(-j\beta_0 l) \left(1 + (2\pi C N_{st})^3 \frac{I_0}{I_{st}} F(\Phi_0, \phi_c, Y)\right) \quad (4)$$

$$F(\Phi_0, \phi_c, Y) = \operatorname{sh}(\beta_0 y_0) \frac{2 - j(\Phi_0 - jY) \exp(-j(\Phi_0 - jY)) - 2 \exp(-j(\Phi_0 - jY)) - j(\Phi_0 - jY)}{(\Phi_0 - jY)^3} + \operatorname{ch}^2(\beta_0 y_0) \operatorname{sh}^{-1}(\beta_0 y_0) \left( \frac{j(\Phi_0 - jY + \phi_c) + \exp(-j(\Phi_0 - jY + \phi_c)) - 1}{2\phi_c(\Phi_0 - jY + \phi_c)^2} - \frac{j(\Phi_0 - jY - \phi_c) + \exp(-j(\Phi_0 - jY - \phi_c)) - 1}{2\phi_c(\Phi_0 - jY - \phi_c)^2} \right). \quad (5)$$

Если на входе в пространство взаимодействия пучок немодулированный и при  $x = l$  входной сигнал отсутствует, то определение параметров режима установления колебаний аналогично поиску пусковых условий генератора  $E_x(l) = 0$ . Тогда от уравнения (4) можно перейти к системе уравнений вида

$$0 = 1 + (2\pi C N_{st})^3 \frac{I_0}{I_{st}} \operatorname{Re}[F(\Phi_0, \phi_c, Y)], \quad (6)$$

$$0 = \operatorname{Im}[F(\Phi_0, \phi_c, Y)] \quad (7)$$

Система (6)–(7) с учетом (5) позволяет определить зависимость введенного параметра  $\alpha$  и непосредственно времени установления колебаний от различных параметров системы таких, как ток электронного пучка  $I_0$  и циклотронный угол пролета  $\phi_c = (\omega_c/v_0)l$ , где  $l$  — длина пространства взаимодействия. В уравнениях (4)–(7) введены параметры  $\Phi_0 = (\beta_e - \beta_0)l$  — относительный невозмущенный угол пролета,  $Y = (\alpha l/v_0)(1 + |v_0/u|)$ ,  $u$  — скорость переноса энергии вдоль замедляющей системы,  $C N_{st}$  — безразмерная пусковая длина,  $C$  — параметр усиления Пирса,  $I_{st}$  — пусковое значение тока пучка.

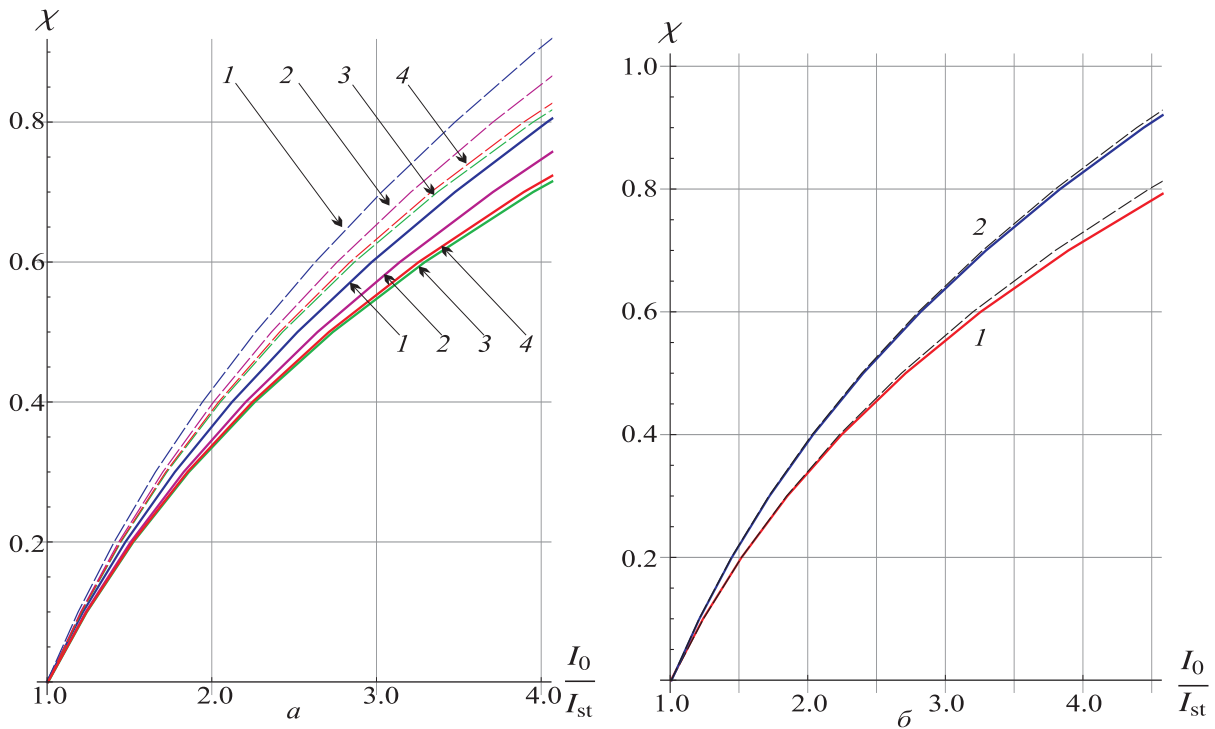


Рис. 1: Зависимости параметра  $\chi$  от отношения  $I_0/I_{st}$ : (а) 1 –  $\phi_c = 2\pi$ , 2 –  $2.5\pi$ , 3 –  $4\pi$ , 4 –  $5\pi$ ; сплошные кривые  $|u/v_0| = 3$ , прерывистые  $|u/v_0| = 6$ ; (б) 1 –  $|u/v_0| = 3$ , 2 –  $|u/v_0| = 6$ , прерывистые линии – результаты одномерной теории, сплошные – результаты двумерной теории при  $\phi_c = 5\pi$  (1) и  $\phi_c = 10\pi$  (2)

### 2. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПАРАМЕТРЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ УСТАНОВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

С использованием системы (6)–(7) получены зависимости параметра  $\chi = \alpha/C$  от отношения  $I_0/I_{st}$  при различных значениях циклотронного угла  $\phi_c$  и отношения скоростей  $|u/v_0|$  (рис. 1,а). Видно, что во всей рассматриваемой области  $\chi > 0$  и колебания нарастают во времени по закону  $\exp(\alpha t)$ . С ростом  $\phi_c$  и, соответственно, с ростом магнитного поля  $B$ , значения параметра  $\chi$  снижаются за исключением значений от  $3\pi$  до  $4\pi$ , что может быть связано с изменением пусковых условий в зависимости от циклотронного угла  $\phi_c$  (рис. 2).

Из рис. 1,а видно, что минимальное значение  $\phi_c$ , для которого были проведены расчеты равно  $2\pi$ . В действительности, чтобы понять, в каком диапазоне следует использовать  $\phi_c$ , следует перейти к размерным переменным. В табл. 1 представлены результаты подобного перехода с учетом зависимости циклотронного угла от магнитного поля вида:

$$\phi_c = \frac{(\eta B)l}{v_0} \rightarrow B = \frac{\phi_c \sqrt{2\eta V_0}}{\eta l},$$

где  $V_0$  – ускоряющее напряжение,  $l$  – длина пространства взаимодействия. Видно, что использовать значения  $\phi_c$  менее  $2\pi$  нет смысла.

Если  $\phi_c > 5\pi$ , что соответствует значениям магнитного поля, когда поперечные высокочастотные смещения электронов можно не учитывать, построенные кривые стремятся к кривой, полученной в одномерном случае (рис. 1,б).

На рис. 2 приведены необходимые для решения системы уравнений (6)–(7) вспомогательные зависимости безразмерной пусковой длины  $CN_{st}$  (рис. 2, а) и пускового значения  $|\Phi_{0st}|$  (рис. 2,б) от циклотронного угла пролета  $\phi_c$ . Данные величины соответствуют началу генерации на обратной волне. Рассчитаны они при условии, что  $\alpha = \chi = 0$ . Известно, что в одномерном случае они, соответственно, равны  $CN_{st} = 0.315$  и  $\Phi_0 = -\pi$ .

Согласно [2, 5] основной вклад во время установления колебаний вносит величина  $t_3$ , которую в линейном случае можно определить из соотношения  $V_s = V_{x0} \exp(\alpha t_3)$ . На рис. 3 приведены зависимости  $t_3/T = f(I_0/I_{st})$  при  $V_s/V_{x0} = 10^5$  для случая без магнитного поля (рис. 3, а) (с целью сравнения с известными результатами одномерной теории [2, 5]) и с учетом магнитного поля при фиксированном отношении скоростей  $u$  и  $v_0$ . Величина  $T = 2\pi/\omega$  характеризует период колебаний. Из рис. 3,б следует, что при отношении  $I_0/I_{st} = 3$  для  $\phi_c = 2\pi$  величина  $t_3 \approx 175T$ , а при  $\phi_c = 5\pi - t_3 \approx 192T$ , а при  $I_0/I_{st} = 2 - t_3 \approx 297T$  и  $t_3 \approx 339T$ , соответственно. В [2, 3] также имеются численные оценки для времени  $t_3$ . Например, при

Таблица I: Связь циклотронного угла и индукции магнитного поля

$\phi_c$ , рад	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$5\pi$
$B$ , Тл ( $l \sim 10^{-2}$ м, $V_0 = 5$ кВ)	0.075	0.149	0.225	0.299	0.375

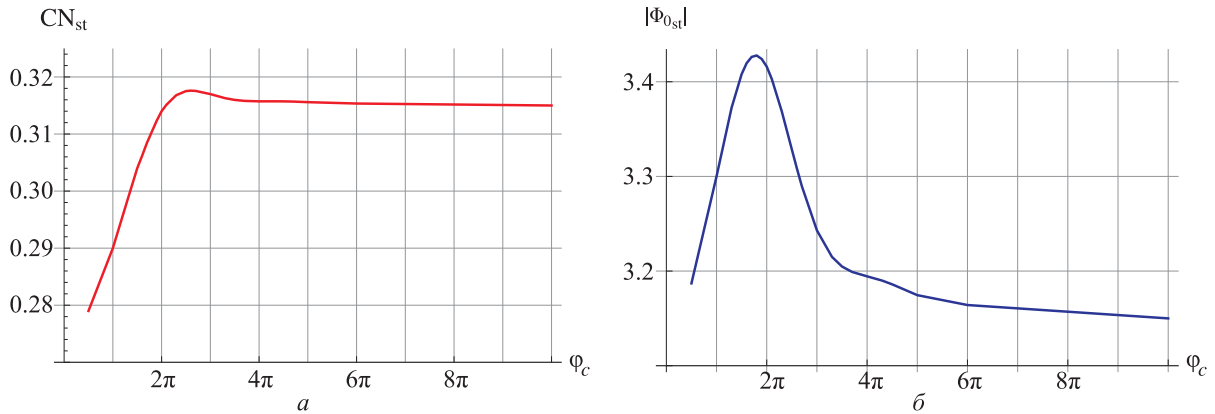


Рис. 2:

Зависимости безразмерной пусковой длины  $CN_{st}$  (а) и пускового значения  $|\Phi_{0st}|$  (б) от циклотронного угла пролета  $\phi_c$

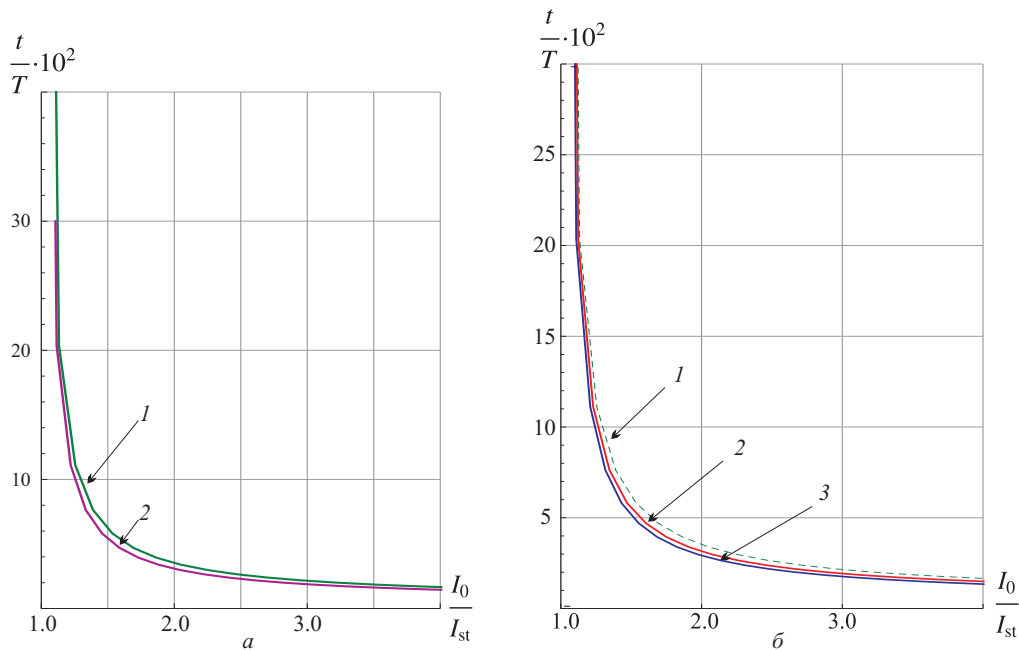


Рис. 3: Зависимости  $t_3/T$  от отношения  $I_0/I_{st}$  (а)  $\phi_c = 0$  1 –  $|u/v_0| = 3$ , 2 –  $|u/v_0| = 6$ ; (б) 1 –  $\phi_c = 0$ ,  $|u/v_0| = 3$ , 2 –  $\phi_c = 5\pi$ ,  $|u/v_0| = 6$ , 3 –  $\phi_c = 2\pi$ ,  $|u/v_0| = 6$

$|u/v_0| = 3$ ,  $C = 0.015$ ,  $N = 30$  и  $I_0/I_{st} = 3$  в первом приближении  $t_3/T \approx 210$ , а  $t_1/T \approx 30$  и  $t_2/T \approx 10$ , что действительно занимает меньшую часть времени.

### 3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

В некоторых случаях исходные соотношения (1)–(3) удастся упростить, если рассматривать в электронном потоке только медленную циклотронную волну (МЦВ). Тогда можно говорить о циклотронном резо-

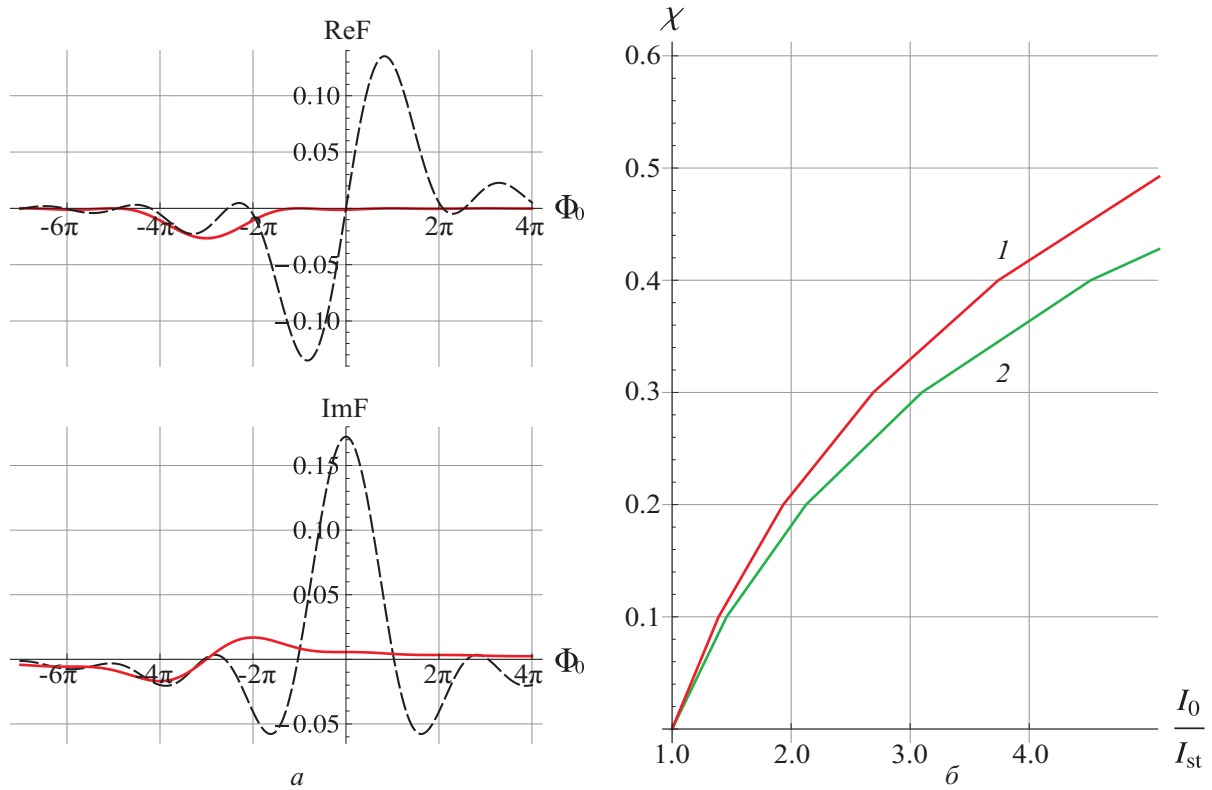


Рис. 4: а) Зависимости действительной и мнимой частей функций  $F_1(\Phi_0)$  для МЦВ (сплошные кривые) и  $F(\Phi_0)$  (прерывистые) при  $\phi_c = 3\pi$ ; б) зависимости параметра  $\chi$  от отношения  $I_0/I_{st}$  для  $\phi_c = 5\pi$ , 1 -  $|u/v_0| = 6$ , 2 -  $|u/v_0| = 3$

нансе. Условие, удовлетворяющее циклотронному резонансу для МЦВ имеет вид

$$\Phi_0 = -\phi_c. \tag{8}$$

Для решения поставленной задачи в рамках сделанного предположения (8) допустимо вместо пары уравнений (1)–(2) использовать дифференциальное уравнение первого порядка для поперечных ВЧ смещений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{y} = j \frac{\eta}{2\omega_c} E_x \text{cth}(\beta_0 y_0) + j\omega_c \tilde{y}.$$

Проводя аналогичные действия, можно получить выражение для напряженности электрического поля с упрощенной функцией

$$E_x(l) = E_0 \exp(-j\beta_0 l) \left(1 + (2\pi C N_{st})^3 \frac{I_0}{I_{st}} F_1(\Phi_0, \phi_c, Y)\right), \tag{9}$$

$$F_1(\Phi_0, \phi_c, Y) = \text{ch}^2(\beta_0 y_0) \frac{j(\Phi_0 - jY + \phi_c) + \exp(-j(\Phi_0 - jY + \phi_c)) - 1}{2\phi_c (\Phi_0 - jY + \phi_c)^2}.$$

Причем действительная часть функции  $F_1(\Phi_0, \phi_c, Y)$  принимает максимальное значение по модулю при  $\Phi_0 = -\phi_c$  и с увеличением циклотронного угла пролета  $\phi_c$  смещается влево относительно начала координат (рис. 4, а). Как известно (см., например, [2]), когда мнимая часть функции  $F_1(\Phi_0, \phi_c, Y)$  обращается в 0, а действительная часть становится отрицатель-

ной, происходит передача энергии от электронного потока к электромагнитной волне. Значение функции  $F_1(\Phi_0, \phi_c, Y)$  в точке экстремума равно

$$\lim_{\Phi_0 \rightarrow -\phi_c} F_1(\Phi_0, \phi_c, Y) = \frac{-\exp(-Y)}{4\phi_c}.$$

Зависимости коэффициента нарастания  $\chi$  от отноше-

ния  $I_0/I_{st}$  с учетом (9) представлены на рис. 4,б при разных значениях отношения скоростей  $|u/v_0|$ . Как видно из рис. 1,а и рис. 4,б значения параметра  $\chi$  принимают меньшие значения в последнем случае, что отвечает меньшей скорости нарастания колебаний в системе. Данные результаты пригодны только в случае циклотронного резонанса вдали от пусковых условий ЛОВ, полученных в рамках общего подхода.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы рассмотрены процессы установления колебаний в генераторе обратной волны в сверхрегенеративном режиме с учетом влияния фокусирующего магнитного поля. При этом был использован прием [4], позволяющий ввести комплексную частоту, мнимая часть которой характеризует нарастание колебаний во времени. Также по полученным данным удалось оценить время установления колебаний при различных соотношениях тока пучка к пусковому значению и при разных значениях магнитного

поля. С ростом  $\phi_c$  параметр, отвечающий за нарастание колебаний в системе со временем, снижается (за исключением значений от  $3\pi$  до  $4\pi$  — рис. 1,а (кривые 3, 4) и рис. 2,а). При значениях  $\phi_c > 4\pi$  полученные результаты двумерной теории согласуются с известными результатами одномерной теории.

В дальнейшем полученные результаты могут быть использованы при построении двумерной теории с учетом пространственного заряда. Интерес представляет обратиться к модели ленточного электронного потока. В последнее время наблюдается все больший интерес к ленточным пучкам в связи с удобством их использования совместно с плоскими электродинамическими структурами (см., например, [6–8]). Следует в дальнейшем рассмотреть совместное влияние и циклотронного угла пролета, и параметра пространственного заряда. Подобные пучки, как и полые трубчатые электронные потоки, являются неустойчивыми при определенном соотношении указанных величин.

Авторы выражают благодарность профессору Д.И.Трубецкову за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

- 
- [1] Викулов И. К., Иванов В. А., Мнойн В. И., Тагер А. С. // Радиотехника и электроника. 1966. **11**, № 1. С. 51.
  - [2] Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.
  - [3] Викулов И. К., Тагер А. С. // Радиотехника и электроника. 1967. **12**, № 12. С. 2146.
  - [4] Гамаюнов Ю. Г., Патрушева Е. В., Толстиков А. В. // Радиотехника и электроника. 2015. **60**, № 3. С. 311.
  - [5] Викулов И. К. // XX Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио. Тезисы докладов и сообщений. Изд. НТОиЭ им. А.С. Попова. 1964. С. 13.
  - [6] Galdetskiy A., Rakova E. // Eighteenth International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 2017. P. 1.
  - [7] Ryskin N.M., Rozhnev A.G., Starodubov A.V., Serdobintsev A.A., Pavlov A.M., Benedik A.I., Torgashov R.A., Torgashov G.V., Sinitsyn N.I. // Electron Device Letters IEEE. 2018. **39**, N. 5. P. 757.
  - [8] P. Yin, Xu J., Fang S., Shi N., Zhao G., Wang W., Yin H., Yue L., Wei Y., Li D. et al. // 43rd International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz), Nagoya. 2018. P. 1.

---

## The steady state oscillations in the generator of the backward wave in the framework of the two-dimensional model

G. M. Vdovina<sup>a</sup>, A. A. Funtov<sup>b</sup>, A. D. Koval<sup>c</sup>

*Department of Electronics, Vibrations and Waves, Faculty of Nonlinear Processes, Saratov State University Saratov 410012, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>vdovinagm@gmail.com, <sup>b</sup>aafuntov@mail.ru, <sup>c</sup>annettekoval@gmail.com*

The processes of establishing steady-state oscillations in the backward wave generator has been considered in the superregenerative mode within the framework of the linear theory. In this case, the electron current exceeds the starting value. In the analysis, a complex frequency is introduced, the imaginary part of which characterizes the increase of oscillations in time. The consideration is carried out in the framework of a two-dimensional model, taking into account the influence of a focusing magnetic field of finite magnitude. In this case, in addition to the longitudinal high-frequency displacements, the appearance of transverse ones is possible in the electron beam. The results are obtained using the method of successive approximations. The conditions for obtaining the characteristic responsible for the wave growth are derived, the dependences of this quantity on the ratio of the electron beam current and the starting current value for various values of the magnetic field are given. Also the dependencies for the time of the establishment of oscillations for different parameters of the system in a linear approximation have been represented. In limiting cases, the results obtained agree well with the well-known results of the one-dimensional theory. The case of cyclotron resonance is considered separately, when only a slow cyclotron wave is excited in the electron beam, which noticeably simplifies the original problem and the initial relations.

PACS: 84.40.Fe; 84.30.Le

*Keywords:* backward wave oscillator, generator, steady state oscillations, magnetic field, cyclotron resonance.

*Received 09 August 2019.*

**Сведения об авторах**

1. Вдовина Галина Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (8452) 21-07-26, e-mail: vdovinagm@gmail.com.
  2. Фунтов Александр Андреевич — ассистент; тел.: (8452) 21-07-26, e-mail: aafuntov@mail.ru.
  3. Коваль Анна Дмитриевна — студентка; e-mail: annettekoval@gmail.com.
-