

Собственные моды в периодической плоской системе металлических стержнейА. А. Анастасиев^{1,*}, М. И. Гозман², И. Я. Полищук^{1,2,†}, Ю. И. Полищук¹, Е. А. Цыркунова³¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Россия, 141701, Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

³Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ». Россия, 115409, Москва, Каширское ш., д. 31

(Статья поступила 15.08.2019; Подписана в печать 16.08.2019)

Настоящая работа посвящена исследованию направляемых мод в периодических системах волноводов, изготовленных из серебра. Элементарная ячейка рассматриваемых систем содержит несколько волноводов. Для расчетов используется формализм многократного рассеяния, основанный на точном решении уравнений Максвелла для уединенного волновода. Также используется подход, основанный на представлении решеточных сумм в виде быстро сходящихся рядов, который позволяет существенно оптимизировать временные затраты на численное моделирование и увеличить точность расчетов. Показывается, что при ненулевых константах распространения в системе возникают расположенные близко моды в количестве, равном числу волноводов в элементарной ячейке системы. Частота этих мод уменьшается с ростом квазиволнового вектора. С увеличением значения константы распространения спектр системы смещается в область высоких частот. В работе показывается, что при зигзагообразной конфигурации системы оказывается возможным добиться касания дисперсионных кривых.

PACS: 42.79.Gn, N 78.67.Qa, 73.20.Mf, 72.80.Tm

УДК: 535.13, 537.86, 538.911

Ключевые слова: низкоразмерные фотонные кристаллы, нанопластика, наноплазмоника, метаматериалы, массивы волноводов, направляемые моды.

ВВЕДЕНИЕ

Оптические волноводы являются основной составляющей большинства современных оптических и оптоэлектронных устройств. Зачастую их основное назначение состоит в передаче сигналов от одного функционального блока конкретного устройства к другому. В развитии современной электроники явно прослеживается тенденция к постепенному уменьшению размеров устройств. Это приводит к тому, что уменьшается расстояние между узлами конкретного устройства и как следствие увеличивается их взаимодействие. Может показаться на первый взгляд, что это взаимодействие играет отрицательную роль и приводит исключительно к нарушению функционирования отдельных узлов и к разрушению сигналов, которыми они обмениваются, однако в некоторых случаях оно приводит к возникновению качественно новых эффектов. В частности, это утверждение справедливо для одномерных массивов идентичных волноводов, которые относятся к семейству низкоразмерных фотонных кристаллов.

Другой пример низкоразмерных фотонных кристаллов — это системы, образованные наночастицами. В работах [1] и [2] было показано, что система, состоящая из нескольких идентичных взаимодействующих сфер, изготовленных из диэлектрика, обладает свойствами, которыми не обладает уединенная сфера того же радиуса и изготовленная из того же материала. На-

пример, показатель добротности для мод шепчущей галереи в таких системах увеличивается экспоненциально с ростом числа сфер. Множество работ посвящено исследованию направляемых мод в плоских массивах цилиндрических волноводов. Например, в работе [3] показано, что направляемые моды с большим показателем добротности (т.е. распространяющиеся практически без потерь на излучение) формируются исключительно благодаря взаимодействию волноводов. Очевидно, что такие моды можно наблюдать только тогда, когда их частота попадает в рамки окна прозрачности материала волновода. Массивы диэлектрических волноводов, расположенных по кругу, обладают свойствами, сходными со свойствами плоских массивов [4].

В работе [5] были изучены направляемые моды в плоских массивах плотно расположенных серебряных волноводов. При этом предполагалось, что константа распространения, т.е. проекция волнового вектора плазмона на ось волновода, равна нулю. Следует отметить, что направляемые моды с ненулевыми константами распространения также представляют интерес, поскольку они тесно связаны с такими явлениями, как андерсоновская локализация, оптические блоховские осцилляции, туннелирование Блоха-Зенера и т.д. [6–11]. В работе [12] было рассмотрено рассеяние плоской электромагнитной волны на периодической системе металлических волноводов, элементарная ячейка которой содержит несколько волноводов. При определенных условиях в таких системах возникают эффекты аномального преломления и аномального отражения, однако свойства собственных мод этих систем оказываются плохо освящены.

*E-mail: santafracks@gmail.com†E-mail: iyppolishchuk@googlemail.com

Настоящая работа организована следующим образом. В первом разделе мы рассматриваем основные положения формализма многократного рассеяния (ФМР) [3]. Затем мы применяем ФМР к исследованию собственных мод в периодических массивах волноводов со сложной элементарной ячейкой и обсуждаем полученные результаты.

1. ФОРМАЛИЗМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Формализм многократного рассеяния применяется в работе для определения структуры электромагнитных полей. Он основан на точном решении уравнений Максвелла для уединенного волновода.

Рассмотрим систему N параллельных волноводов бесконечной длины, помещенных в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} и магнитной проницаемостью μ_{ex} .

Радиус волновода с номером j равен R_j , диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ_j и μ_j соответственно, ось волноводов совпадает с осью Oz . Сторонних токи и заряды в системе отсутствуют, поэтому система уравнений Максвелла запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь под ϵ и μ следует понимать ϵ_j и μ_j , если рассматривается область внутри волновода j , и ϵ_{ex} и μ_{ex} , если рассматривается область вне волноводов. Тогда, как было показано в работе [3], поле в волноводе под номером j , обладающее свойством конечности при $\rho_j \rightarrow 0$, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= e^{i\beta z - i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\varphi_j}}{J_m(\kappa_j R_j)} (a_{jm} \mathbf{M}_{jm} - b_{jm} \mathbf{N}_{jm}) \\ \mathbf{B}_j &= e^{i\beta z - i\omega t} n_j \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\varphi_j}}{J_m(\kappa_j R_j)} (a_{jm} \mathbf{N}_{jm} + b_{jm} \mathbf{M}_{jm}) \\ \mathbf{M}_{jm} &= \frac{i\beta}{\kappa_j} J'_m(\kappa_j \rho_j) \mathbf{e}_\rho^j - \frac{\beta m}{\kappa_j^2 \rho_j} J_m(\kappa_j \rho_j) \mathbf{e}_\varphi^j + J_m(\kappa_j \rho_j) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{N}_{jm} &= \frac{n_j \omega m}{c \kappa_j^2 \rho_j} J_m(\kappa_j \rho_j) \mathbf{e}_\rho^j + \frac{in_j \omega}{c \kappa_j} J'_m(\kappa_j \rho_j) \mathbf{e}_\varphi^j \\ n_j &= \sqrt{\mu_j \epsilon_j}, & \kappa_j &= \sqrt{\frac{n_j^2 \omega^2}{c^2} - \beta^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $J_m(z)$ — функция Бесселя, (ρ_j, φ_j, z) — полярные координаты точки, в которой наблюдаются поля, относительно оси j -го волновода, ω — частота направляемой моды. Константа распространения β является z -проекцией волнового вектора плазмона, который распространяется в системе волноводов. Орты \mathbf{e}_ρ^j , \mathbf{e}_φ^j , \mathbf{e}_z привязаны к цилиндрической системе координат, связанной с волноводом j , \mathbf{M}_{jm} и \mathbf{N}_{jm} — векторные цилиндрические гармоники. Коэффициенты разложения a_{jm} , b_{jm} носят название парциальных амплитуд. Штрих означает дифференцирование по аргументу функции. Нормировочный множитель $J_m(\kappa_j R_j)$ в знаменателе в формулах (2) введен с целью повышения точности расчетов в процессе численного моделирования.

Электромагнитное поле в пространстве, окружающем волноводы, представляется суперпозицией полей отдельных волноводов. Поле вне j -го волновода, создаваемое только этим волноводом, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= e^{i\beta z - i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\varphi_j}}{H_m^{(1)}(\kappa_{ex} R_j)} (c_{jm} \tilde{\mathbf{M}}_{jm} - d_{jm} \tilde{\mathbf{N}}_{jm}) \\ \mathbf{B}_j &= e^{i\beta z - i\omega t} n_{ex} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\varphi_j}}{H_m^{(1)}(\kappa_{ex} R_j)} (c_{jm} \tilde{\mathbf{N}}_{jm} + d_{jm} \tilde{\mathbf{M}}_{jm}) \\ \tilde{\mathbf{M}}_{jm} &= \frac{i\beta}{\kappa_{ex}} H_m^{(1)'}(\kappa_{ex} \rho_j) \mathbf{e}_\rho^j - \frac{\beta m}{\kappa_{ex}^2 \rho_j} H_m^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_j) \mathbf{e}_\varphi^j + H_m^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_j) \mathbf{e}_z \\ \tilde{\mathbf{N}}_{jm} &= \frac{n_{ex} \omega m}{c \kappa_{ex}^2 \rho_j} H_m^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_j) \mathbf{e}_\rho^j + \frac{in_{ex} \omega}{c \kappa_{ex}} H_m^{(1)'}(\kappa_{ex} \rho_j) \mathbf{e}_\varphi^j \\ n_{ex} &= \sqrt{\mu_{ex} \epsilon_{ex}}, & \kappa_{ex} &= \sqrt{\frac{n_{ex}^2 \omega^2}{c^2} - \beta^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $H_m^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода. Коэффициенты разложения c_{jm}, d_{jm} называются парциальными амплитудами. Нормировочный множитель $H_m^{(1)}(\kappa_{ex}R_j)$ в знаменателе в формулах (3) введен с целью повышения точности численных расчетов. Все остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в формулах (2).

Парциальные амплитуды $a_{jm}, b_{jm}, c_{jm}, d_{jm}$ могут быть найдены из граничных условий для уравнений Максвелла на поверхности каждого волновода, выражающих непрерывность тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} и непрерывность нормальных компонент векторов \mathbf{V} и \mathbf{D} . Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon_j \mathbf{E}_j^{in} \mathbf{e}_\rho^j)_{|\rho_j=R_j} &= (\varepsilon_{ex} \mathbf{E}^{out} \mathbf{e}_\rho^j)_{|\rho_j=R_j} & (\mu_j \mathbf{H}_j^{in} \mathbf{e}_\rho^j)_{|\rho_j=R_j} &= (\mu_{ex} \mathbf{H}^{out} \mathbf{e}_\rho^j)_{|\rho_j=R_j} \\ (\mathbf{E}_j^{in} \mathbf{e}_\varphi^j)_{|\rho_j=R_j} &= (\mathbf{E}^{out} \mathbf{e}_\varphi^j)_{|\rho_j=R_j} & (\mathbf{H}_j^{in} \mathbf{e}_\varphi^j)_{|\rho_j=R_j} &= (\mathbf{H}^{out} \mathbf{e}_\varphi^j)_{|\rho_j=R_j} \\ (\mathbf{E}_j^{in} \mathbf{e}_z)_{|\rho_j=R_j} &= (\mathbf{E}^{out} \mathbf{e}_z)_{|\rho_j=R_j} & (\mathbf{H}_j^{in} \mathbf{e}_z)_{|\rho_j=R_j} &= (\mathbf{H}^{out} \mathbf{e}_z)_{|\rho_j=R_j} \end{aligned} \quad (4)$$

В рамках формализма многократного рассеяния используются только четыре из них — непрерывность тангенциальных (φ и z) компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Два других условия удовлетворяются при этом тождественно. Для разложения суммарного поля вне j -го волновода по цилиндрическим гармоникам этого волновода используется теорема сложения Графа [13] (здесь ρ_{lj}, φ_{lj} , — полярные координаты l -го волновода относительно j -го)

$$H_m^{(1)}(\kappa_{ex}\rho_l) e^{im\varphi_l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{n-m}^{(1)}(\kappa_{ex}\rho_{lj}) e^{i(m-n)\varphi_{lj}} J_n(\kappa_{ex}\rho_j) e^{in\varphi_j} \quad \rho_{lj} > \rho_j \quad (5)$$

С учетом теоремы Графа (5) из уравнений (4) получаем два матричных уравнения, которые должны решаться совместно:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_j}{\mu_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jm} \\ b_{jm} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{ex}}{\mu_{ex}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_{jm} \\ d_{jm} \end{pmatrix} + \sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex}\rho_{lj}) J_m(\kappa_{ex}R_j) e^{i(n-m)\varphi_{lj}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R_l)} \begin{pmatrix} c_{ln} \\ d_{ln} \end{pmatrix} \right], \\ \begin{pmatrix} \frac{\beta m}{\kappa_j^2 R_j} & \frac{in_j \omega J'_m(\kappa_j R_j)}{c \kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} \\ \frac{in_j^2 \omega J'_m(\kappa_j R_j)}{\mu_j c \kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} & -\frac{n_j \beta m}{\mu_j \kappa_j^2 R_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jm} \\ b_{jm} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\beta m}{\kappa_{ex}^2 R_j} & \frac{in_{ex} \omega H_m^{(1)'(\kappa_{ex} R_j)}}{c \kappa_{ex} H_m^{(1)}(\kappa_{ex} R_j)} \\ \frac{in_{ex}^2 \omega H_m^{(1)'(\kappa_{ex} R_j)}}{\mu_{ex} c \kappa_{ex} H_m^{(1)}(\kappa_{ex} R_j)} & -\frac{n_{ex} \beta m}{\mu_{ex} \kappa_{ex}^2 R_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{jm} \\ d_{jm} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{\beta m}{\kappa_{ex}^2 R_j} & \frac{in_{ex} \omega J'_m(\kappa_{ex} R_j)}{c \kappa_{ex} J_m(\kappa_{ex} R_j)} \\ \frac{in_{ex}^2 \omega J'_m(\kappa_{ex} R_j)}{\mu_{ex} c \kappa_{ex} J_m(\kappa_{ex} R_j)} & -\frac{n_{ex} \beta m}{\mu_{ex} \kappa_{ex}^2 R_j} \end{pmatrix} \left[\sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex}\rho_{lj}) J_m(\kappa_{ex}R_j) e^{i(n-m)\varphi_{lj}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R_l)} \begin{pmatrix} c_{ln} \\ d_{ln} \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

После исключения из уравнений (6) парциальных амплитуд a_{jm} , и b_{jm} , получаем замкнутую систему уравнений для парциальных амплитуд c_{jm} и d_{jm} :

$$S_{jm} \begin{pmatrix} c_{jm} \\ d_{jm} \end{pmatrix} - \sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex}\rho_{lj}) J_m(\kappa_{ex}R_j) e^{i(n-m)\varphi_{lj}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R_l)} \begin{pmatrix} c_{ln} \\ d_{ln} \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} S_{jm} &= -\frac{1}{AB - E^2} \begin{pmatrix} BC - E^2 & F \\ -F & AD - E^2 \end{pmatrix} \\ A &= \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_{ex} J'_m(\kappa_{ex}R_j)}{\kappa_{ex} J_m(\kappa_{ex}R_j)} - \frac{\varepsilon_j J'_m(\kappa_j R_j)}{\kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} \right) & B &= \frac{\omega}{c} \left(\frac{\mu_{ex} J'_m(\kappa_{ex}R_j)}{\kappa_{ex} J_m(\kappa_{ex}R_j)} - \frac{\mu_j J'_m(\kappa_j R_j)}{\kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} \right) \\ C &= \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_{ex} H_m^{(1)'(\kappa_{ex}R_j)}}{\kappa_{ex} H_m^{(1)}(\kappa_{ex}R_j)} - \frac{\varepsilon_j J'_m(\kappa_j R_j)}{\kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} \right) & D &= \frac{\omega}{c} \left(\frac{\mu_{ex} H_m^{(1)'(\kappa_{ex}R_j)}}{\kappa_{ex} H_m^{(1)}(\kappa_{ex}R_j)} - \frac{\mu_j J'_m(\kappa_j R_j)}{\kappa_j J_m(\kappa_j R_j)} \right) \\ E &= \frac{\beta m}{R_j} \left(\frac{1}{\kappa_{ex}^2} - \frac{1}{\kappa_j^2} \right) & F &= \frac{2}{\pi} \frac{n_{ex} \omega}{c \kappa_{ex}^2 R_j} \frac{E}{J_m(\kappa_{ex}R_j) H_m^{(1)}(\kappa_{ex}R_j)} \end{aligned} \quad (8)$$

Связь парциальных амплитуд, принадлежащих одному волноводу, дается выражением

$$\begin{pmatrix} a_{jm} \\ b_{jm} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{n_{ex} \omega}{c \kappa_{ex}^2 R_j} \frac{1}{J_m(\kappa_{ex}R_j) H_m^{(1)}(\kappa_{ex}R_j)} \frac{E}{AB - E^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{in_{ex} B}{\mu_{ex} E} & 1 \\ -\frac{n_{ex} \mu_j}{\mu_{ex} n_j} & \frac{A}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{jm} \\ d_{jm} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Таким образом, зная решение уравнения (7), с применением формул (9), (3) и (2), можно определить во всем пространстве электромагнитное поле, создаваемое системой волноводов.

2. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ВОЛНОВОДОВ

Рассмотрим периодическую систему волноводов с элементарной ячейкой произвольной конфигурации. Будем использовать двойной индекс Jj для нумерации волноводов. Первое число означает номер элементарной ячейки, принимающий значения $0, \pm 1, \pm 2$ и т.д., второе — номер волновода в этой ячейке, принимающий значения от 1 до N . Тогда уравнение (7) примет вид

$$S_m^j \begin{pmatrix} c_m^{Jj} \\ d_m^{Jj} \end{pmatrix} - \sum_{(Ll) \neq (Jj)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_{Jj}^{Ll}) J_m(\kappa_{ex} R^j) e^{i(n-m)\varphi_{Jj}^{Ll}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex} R^l)} \begin{pmatrix} c_n^{Ll} \\ d_n^{Ll} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

Отметим, что матрица S_m^j , в силу периодичности системы, не зависит от номера элементарной ячейки, так же как все параметры волноводов (радиус, диэлектрическая и магнитная проницаемости). Зависимость от номера волновода в элементарной ячейке сохраняется, поскольку в пределах одной ячейки волноводы могут быть различными. Далее, $\rho_{Jj}^{Ll} = |\mathbf{a}(L-J) + \boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_j|$ — расстояние между волноводами с номерами (Jj) и (Ll) , φ_{Jj}^{Ll} — угол между векторами $\mathbf{a}(L-J) + \boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_j$ и \mathbf{a} (период системы).

Решение уравнения (10) имеет вид блоховской волны, характеризующейся квазиволновым вектором \mathbf{k}

$$\begin{pmatrix} a_m^{Jj} \\ b_m^{Jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m^j \\ b_m^j \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}J}, \quad \begin{pmatrix} c_m^{Jj} \\ d_m^{Jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_m^j \\ d_m^j \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}J}, \quad -\pi < \mathbf{k}\mathbf{a} \leq \pi \quad (11)$$

После подстановки формулы (11) в выражение (10) получаем уравнение

$$S_m^j \begin{pmatrix} c_m^j \\ d_m^j \end{pmatrix} - \sum_{(Ll) \neq (Jj)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_{Jj}^{Ll}) J_m(\kappa_{ex} R^j) e^{i(n-m)\varphi_{Jj}^{Ll}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex} R^l)} \begin{pmatrix} c_n^l \\ d_n^l \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}(L-J)} = 0 \quad (12)$$

В уравнении (12) можно выделить решеточную сумму и записать ее в виде быстро сходящихся рядов. Это полезно при численном моделировании, поскольку решеточная сумма в том виде, в котором она возникает в уравнении (12), сходится крайне медленно, и для достижения требуемой точности необходим учет десятков тысяч слагаемых. Преобразование решеточной суммы использует подход, подробно описанный в статье [14]. Он основан на представлении функций Ганкеля в виде контурных интегралов и использовании их аналитических свойств.

Сначала преобразуем сумму в левой части уравнения (12)

$$\begin{aligned} & \sum_{(Ll) \neq (Jj)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex} \rho_{Jj}^{Ll}) J_m(\kappa_{ex} R^j) e^{i(n-m)\varphi_{Jj}^{Ll}}}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex} R^l)} \begin{pmatrix} c_n^l \\ d_n^l \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}(L-J)} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(\kappa_{ex} R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex} R^j)} \begin{pmatrix} c_n^j \\ d_n^j \end{pmatrix} \sum_{L=1}^{+\infty} H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex} aL) (e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} + e^{i\pi(n-m)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}L}) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l \neq j} \frac{J_m(\kappa_{ex} R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex} R^l)} \begin{pmatrix} c_n^l \\ d_n^l \end{pmatrix} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}^{(1)}(\kappa_{ex} |\mathbf{a}L + \boldsymbol{\rho}_{lj}|) e^{-i(m-n)\varphi_{Jj}^{L,l}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} \end{aligned} \quad (13)$$

Второе слагаемое содержит решеточную сумму в самом общем виде, поэтому сначала рассмотрим его. Решеточная сумма в первом слагаемом может быть получена из решеточной суммы во втором слагаемом путем вычитания слагаемого с $L = 0$ и последующего предельного перехода $|\boldsymbol{\rho}_{lj}| \rightarrow 0$.

Введем обозначения: $\mathbf{a}L + \boldsymbol{\rho}_{lj} = \mathbf{R}_L$, $\varphi_{Jj}^{L+J,j} = \varphi_L$ (угол между векторами \mathbf{R}_L и \mathbf{a}). Выберем систему координат, ось Oz которой направим вдоль оси волноводов, а ось Ox вдоль вектора \mathbf{a} .

Функцию Ганкеля первого рода можно представить контурным интегралом [13]

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \exp(-iz \sin \tau + i\nu\tau) d\tau, \quad \text{Re} z > 0 \quad (14)$$

Интеграл в правой части (14) сходится вдоль любого контура, расположенного в заштрихованной области (рис. 1), в том числе вдоль контура C_α . Допустим, что $0 < \varphi_L < \pi$. Положим $\alpha = \varphi_L - \frac{\pi}{2}$. Тогда после подстановки $\tau = t + \alpha - \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_L) e^{-i\nu\varphi_L} & = \frac{e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}}{\pi} \int_{C_\alpha} \exp(-i\kappa_{ex} R_L \sin \tau + i\nu(\tau - \alpha)) d\tau = \\ & = \frac{e^{-i\pi\nu}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \exp(i\kappa_{ex} R_L \sin(t + \varphi_L) + i\nu t) dt \end{aligned} \quad (15)$$

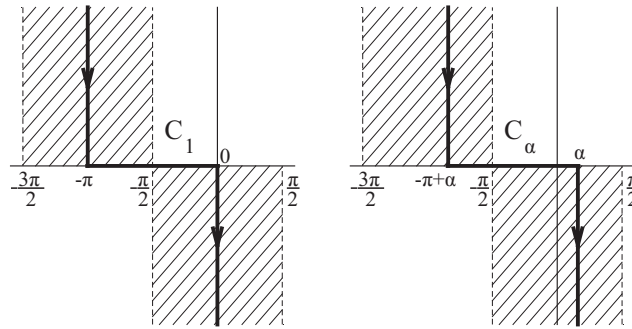


Рис. 1: Контуры интегрирования. заштрихованы области сходимости

Видим, что аналитические свойства контурного интеграла позволяют выбрать подходящий контур интегрирования C_α и тем самым (после замены переменного) скомпенсировать нетривиальную часть фазы φ_L . С помощью замены $\sin t = y$ переместим контур интегрирования на действительную ось:

$$\begin{aligned}
 & H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_L) e^{-i\nu\varphi_L} = \\
 & = \frac{e^{-i\pi\nu}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(iy\kappa_{ex}(aL + \rho_{lj,x}) + i\sqrt{1-y^2}\kappa_{ex}\rho_{lj,y} + i\nu \arcsin y\right) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Наконец, применим формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{isx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-isy} dy = 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi\mu) \tag{17}$$

Получаем выражение для решеточной суммы в виде быстро сходящегося ряда

$$\begin{aligned}
 & \sum_{L=-\infty}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_L) e^{-i\nu\varphi_L} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} = \\
 & = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-i\pi\nu}}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} \exp\left(-i\kappa_{ex}\rho_{lj,x}y_\mu + i\kappa_{ex}\rho_{lj,y}\sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \arcsin y_\mu\right) \\
 & \quad y_\mu = \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\kappa_{ex}a} + \frac{2\pi\mu}{\kappa_{ex}a}, \quad \rho_{lj,y} > 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Вычисления для случая $-\pi < \varphi_L < 0$ производятся аналогично. Единственное отличие в том, что следует положить $\alpha = \varphi_L + \frac{\pi}{2}$ для соблюдения сходимости интегралов в (15). Обобщая результаты, получаем выражение для решеточной суммы, справедливое для всех значений фазы φ_L :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{L=-\infty}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_L) e^{-i\nu\varphi_L} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} \equiv V_\nu\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}, \rho_{lj}\right) = \\
 & = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-i\pi\nu\theta(\rho_{lj,y})}}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} \exp\left(-i\kappa_{ex}\rho_{lj,x}y_\mu + i\kappa_{ex}|\rho_{lj,y}|\sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \operatorname{sgn}(\rho_{lj,y}) \arcsin y_\mu\right) \\
 & \quad y_\mu = \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\kappa_{ex}a} + \frac{2\pi\mu}{\kappa_{ex}a}, \quad \sqrt{1-y_\mu^2} = i\sqrt{y_\mu^2-1}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь рассмотрим решеточную сумму в первом слагаемом в выражении (13):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{L=1}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} aL) (e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} + (-1)^\nu e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}L}) \equiv U_\nu\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) = \\
 & = \lim_{|\rho_{lj}| \rightarrow 0} \left[\sum_{L=-\infty}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_L) e^{-i\nu\varphi_L} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}L} - H_\nu^{(1)}(\kappa_{ex} R_0) e^{-i\nu\varphi_0} \right]
 \end{aligned} \tag{20}$$

Допустим, что $0 < \varphi_0 < \pi$. Тогда, используя интегральное представление для функции Ганкеля из правой части (16) и переходя к переменной интегрирования μ , такой, что $y = y_\mu = \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\kappa_{ex}a} + \frac{2\pi\mu}{\kappa_{ex}a}$, получаем

$$U_\nu\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \right) \frac{2e^{-i\pi\nu} \exp\left(i\kappa_{ex}\varepsilon\sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \arcsin y_\mu\right)}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} \tag{21}$$

Совершенно аналогично получаем выражение для случая $-\pi < \varphi_0 < 0$:

$$U_\nu \left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \right) \frac{2 \exp \left(i\kappa_{ex}\varepsilon \sqrt{1-y_\mu^2} + i\nu \arcsin y_\mu \right)}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} \quad (22)$$

Отметим, что решетчатая сумма обладает следующей симметрией по индексу: $U_{-\nu} = e^{i\pi\nu} U_\nu$. Это следует из определения (20). Такой же симметрией обладает полусумма выражений (21) и (22). Таким образом, мы можем для определенности считать, что индекс решетчатой суммы положителен, и продолжить преобразование любой из формул (21) и (22). Случай $\nu = 0$ будет рассмотрен отдельно ниже, поскольку требует иного подхода.

В выражении (21) разобьем интеграл и сумму на две части:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \right) \frac{2e^{-i\pi\nu}}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} \exp \left(i\kappa_{ex}\varepsilon \sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \arcsin y_\mu \right) = \\ & = \left(\sum_{\mu=1}^{+\infty} - \int_{\mu_0}^{+\infty} d\mu \right) \frac{2e^{-i\pi\nu} \exp(-i\nu \arcsin y_\mu)}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2e^{-i\pi\nu}}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} \exp \left(i\kappa_{ex}\varepsilon \sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \arcsin y_\mu \right), \quad \mu_0 = -\frac{\mathbf{ka}}{2\pi} \end{aligned} \quad (23)$$

Первая часть в выражении (23) сходится вне зависимости от наличия экспоненциального множителя, обеспечивающего сходимость. Сумму в ней оставим без изменений, а интеграл преобразуем к виду:

$$\int_{\mu_0}^{+\infty} \frac{2e^{-i\pi\nu} \exp(-i\nu \arcsin y_\mu)}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} d\mu = \frac{e^{-i\pi\nu}}{i\pi\nu} \quad (24)$$

Вторая часть в выражении (23) сходится только в присутствии экспоненциального множителя, обеспечивающего сходимость. Преобразуем ее так, чтобы получить замкнутое выражение в виде полиномов:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2e^{-i\pi\nu}}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} \exp \left(i\kappa_{ex}\varepsilon \sqrt{1-y_\mu^2} - i\nu \arcsin y_\mu \right) = \\ & = \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2 \exp(i\nu \arcsin y_\mu)}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2 \exp(i\kappa_{ex}\varepsilon \sqrt{1-y_\mu^2})}{\kappa_{ex}a \sqrt{1-y_\mu^2}} \left(\exp(-i\pi\nu - i\nu \arcsin y_\mu) - \exp(i\nu \arcsin y_\mu) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (25) сходится независимо от наличия экспоненциального множителя, обеспечивающего сходимость. Как и ранее, сумму в нем оставляем без изменений, а вычисление интеграла приводит к результату, который отличается от выражения (24) отсутствием множителя $e^{-i\pi\nu}$. Метод с выделением разности во втором слагаемом в правой части выражения (25) позволяет получить замкнутое выражение в виде многочлена, зависящего от y_μ , при всех целых значениях ν . Если ν четно, то

$$\begin{aligned} & \exp(-i\pi\nu - i\nu \arcsin y_\mu) - \exp(i\nu \arcsin y_\mu) = \\ & = i\sqrt{1-y_\mu^2} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m)!}{(n-m)!(2m)!} y_\mu^{2m-1}, \quad \nu = 2n \end{aligned} \quad (26)$$

В случае нечетного ν мы имеем

$$\begin{aligned} & \exp(-i\pi\nu - i\nu \arcsin y_\mu) - \exp(i\nu \arcsin y_\mu) = \\ & = -2\sqrt{1-y_\mu^2} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m)!}{(n-m)!(2m)!} y_\mu^{2m}, \quad \nu = 2n + 1 \end{aligned} \quad (27)$$

Для вычисления предела во втором слагаемом в правой части выражения (25) воспользуемся формулой Эйлера [15]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu\varepsilon} d\mu - \sum_{\mu=0}^{+\infty} (\mu+z)^{n-1} e^{-(\mu+z)\varepsilon} \right] = \frac{B_n(z)}{n} \quad (28)$$

Здесь $B_n(z)$ — полином Бернулли. Таким образом, если ν четно, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2 \exp(i\kappa_{ex}\varepsilon\sqrt{1-y_\mu^2})}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} (\exp(-i\pi\nu - i\nu \arcsin y_\mu) - \exp(i\nu \arcsin y_\mu)) = \\ = \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m-1)!}{(n-m)!(2m)!} \left(\frac{2\pi}{\kappa_{ex}a}\right)^{2m} B_{2m}\left(\frac{-\mathbf{ka}}{2\pi}\right), \quad \nu = 2n \end{aligned} \tag{29}$$

Если ν нечетно, то аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{\mu_0} d\mu \right) \frac{2 \exp(i\kappa_{ex}\varepsilon\sqrt{1-y_\mu^2})}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} (\exp(-i\pi\nu - i\nu \arcsin y_\mu) - \exp(i\nu \arcsin y_\mu)) = \\ = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m)!}{(n-m)!(2m+1)!} \left(\frac{2\pi}{\kappa_{ex}a}\right)^{2m+1} B_{2m+1}\left(\frac{-\mathbf{ka}}{2\pi}\right), \quad \nu = 2n + 1 \end{aligned} \tag{30}$$

В формулах (29) и (30) перейдем к положительным аргументам полиномов Бернулли. Для этого воспользуемся свойством $(-1)^n B_n(-z) = B_n(z) + nz^{n-1}$. Наконец, объединяя формулы, получаем выражение для решеточной суммы U_ν :

$$\begin{aligned} U_\nu\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) = \frac{2e^{-i\pi\nu}}{\kappa_{ex}a} \sum_{\mu=0}^{+\infty} \frac{\exp(-i\nu \arcsin y_\mu)}{\sqrt{1-y_\mu^2}} + \frac{2}{\kappa_{ex}a} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\exp(i\nu \arcsin y_\mu)}{\sqrt{1-y_\mu^2}} + \frac{i}{\pi\nu} (1 + e^{-i\pi\nu}) + \\ + \begin{cases} \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m-1)!}{(n-m)!(2m)!} \left(\frac{2\pi}{\kappa_{ex}a}\right)^{2m} B_{2m}\left(\frac{\mathbf{ka}}{2\pi}\right), \nu = 2n \\ -\frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m 2^{2m} (n+m)!}{(n-m)!(2m+1)!} \left(\frac{2\pi}{\kappa_{ex}a}\right)^{2m+1} B_{2m+1}\left(\frac{\mathbf{ka}}{2\pi}\right), \nu = 2n + 1 \end{cases} \quad y_\mu = \frac{\mathbf{ka}}{\kappa_{ex}a} + \frac{2\pi\mu}{\kappa_{ex}a} \end{aligned} \tag{31}$$

Выражение (31) справедливо для положительных значений ν . Для отрицательных значений ν следует воспользоваться симметрией $U_{-\nu} = (-1)^\nu U_\nu$. Выражение для решеточной суммы с нулевым индексом может быть получено путем предельного перехода $\nu \rightarrow 0$ в любой из формул (21) или (22). Опуская подробные вычисления, сразу приведем результат:

$$\begin{aligned} U_0\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \right) \frac{2 \exp(i\kappa_{ex}\varepsilon\sqrt{1-y_\mu^2})}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_\mu^2}} = \\ = -1 - \frac{2i}{\pi} \left(C + \ln \frac{\kappa_{ex}a}{4\pi} \right) + \frac{2}{\kappa_{ex}a\sqrt{1-y_0^2}} + \frac{2}{\kappa_{ex}a} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y_\mu^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y_{-\mu}^2}} + \frac{i\kappa_{ex}a}{\pi\mu} \right) \\ y_\mu = \frac{\mathbf{ka}}{\kappa_{ex}a} + \frac{2\pi\mu}{\kappa_{ex}a} \end{aligned} \tag{32}$$

Вернемся к уравнению (12), которое позволяет определить парциальные амплитуды для периодической системы с произвольной конфигурацией элементарной ячейки. Теперь оно может быть записано в виде

$$\begin{aligned} S_m^j \begin{pmatrix} c_m^j \\ d_m^j \end{pmatrix} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\kappa_{ex}R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R^j)} U_{m-n}\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) \begin{pmatrix} c_n^j \\ d_n^j \end{pmatrix} - \\ - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l \neq j} \frac{J_n(\kappa_{ex}R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R^l)} V_{m-n}\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}, \boldsymbol{\rho}_{lj}\right) \begin{pmatrix} c_n^l \\ d_n^l \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Решеточные суммы U_ν и V_ν , входящие в уравнение (33), определяются формулами (19), (31) и (32). Уравнение (33) имеет нетривиальные решения только в случае

$$\begin{aligned} \det \left\| S_m^l \delta_{m,n} \delta_{l,j} - \frac{J_m(\kappa_{ex}R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R^j)} U_{m-n}\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{l,j} - \right. \\ \left. - \frac{J_m(\kappa_{ex}R^j)}{H_n^{(1)}(\kappa_{ex}R^l)} V_{m-n}\left(\frac{\mathbf{ka}}{\pi}, \frac{\kappa_{ex}a}{\pi}, \boldsymbol{\rho}_{lj}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1 - \delta_{l,j}) \right\| = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Определитель в (34) зависит от нескольких «внешних» параметров: частоты, константы распространения

и квазиволнового вектора. Таким образом, решение уравнения (34) определяет один из параметров

как неявную функцию двух других. Из трех возможных вариантов такой зависимости наиболее интересной для изучения является зависимость частоты моды от константы распространения и квазиволнового вектора: $\omega = \omega(\beta, k)$. Эта зависимость носит название закона дисперсии.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для моделирования была выбрана система, элементарная ячейка которой содержит два волновода (рис. 2). Параметры системы: период $a = 280\text{нм}$, расстояние между волноводами в паре $b = a$, радиус каждого волновода $R = 100\text{нм}$, угол $\varphi = 90^\circ$. Материал волновода — серебро, данные о диэлектрической проницаемости серебра в интересующем нас диапазоне частот взяты из таблиц [16]. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды полагается равной 1. Как показано в работе [12], в системе с похожими параметрами возможно возникновение эффекта аномаль-

ного отражения, поэтому изучение закона дисперсии в такой системе представляет интерес.

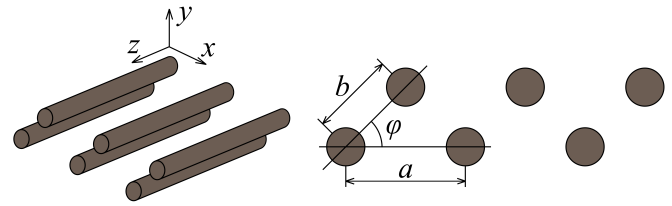


Рис. 2: Система волноводов

На рис. 3 представлены законы дисперсии направляемых мод для различных констант распространения. Горизонтальная штрихпунктирная линия изображает нижнюю границу окна прозрачности серебра. Верхняя граница окна прозрачности лежит около частоты 3.9 эВ и не видна на рисунках. Штриховая линия носит название светового конуса. Она отвечает закону дисперсии свободного фотона: $n_{ex}\omega = c\sqrt{\beta^2 + k^2}$.

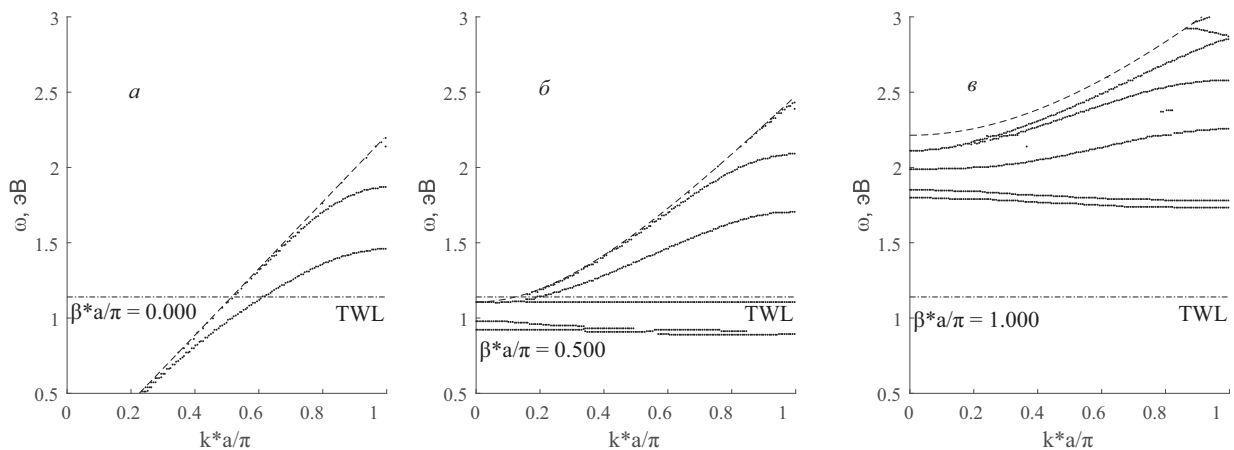
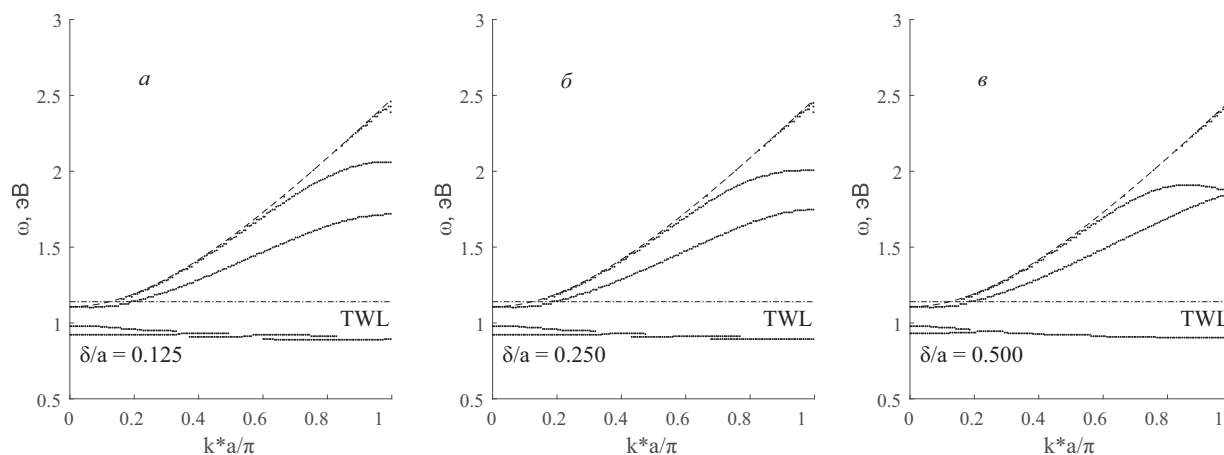


Рис. 3: Законы дисперсии мод для различных констант распространения β

Отметим, что при ненулевых константах распространения в области частот $n_{ex}\omega < \beta c$ имеются расположенные близко кривые, количество которых совпадает с числом волноводов в элементарной ячейке системы (на рис. 3, б и в две самые нижние кривые). В отличие от всех остальных кривых они практически не обладают дисперсией. В случае $\beta = 0$ количество дисперсионных кривых также совпадает с числом волноводов в элементарной ячейке (рис. 3, а). Также следует отметить постепенное смещение всех дисперсионных кривых в область высоких частот с ростом константы распространения.

Рассмотрим влияние смещения слоев волноводов на закон дисперсии системы. Обозначим величину смещения $\delta = b \cos \varphi$. Расстояние между слоями $b \sin \varphi = a$ будем сохранять неизменным. Период системы и радиусы волноводов также остаются прежними. Для того, чтобы рассмотреть влияние смещения как на моды, существующие только при $\beta \neq 0$, так и на моды, существующие при $\beta = 0$, выберем константу распространения $\beta = \frac{\pi}{2a}$. Видим, что при зигзагообразной конфигурации системы (рис. 4, в) возникает касание дисперсионных кривых.

Рис. 4: Дисперсионные кривые при различных смещениях слоев δ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются собственные моды в периодических массивах металлических волноводов со сложной (т.е. состоящей из более, чем одного волновода) элементарной ячейкой. Исследуется влияние величины константы распространения и такой геометрической характеристики, как относительное смещение слоев волноводов, на закон дисперсии системы. Показывается, что в рассмотренных системах имеется два типа направляемых мод. Первый из них существует только при ненулевых константах распространения и представляет собой группу близко расположенных дисперсионных кривых, количество которых совпадает с числом волноводов в элементарной ячейке системы. Эти моды являются практически бездисперсионными и их частота уменьшается с ростом величины квазиволнового вектора.

Другой тип собственных мод может быть обнаружен в системе и при нулевой константе распространения. В случае $\beta = 0$ их количество также совпадает с числом волноводов в элементарной ячейке системы. В отличие от мод первого типа они обладают существенной дисперсией и их частота увеличивается с ростом вели-

чины квазиволнового вектора. Общим свойством мод обоих типов является увеличение характерной частоты с ростом константы распространения, приводящее к сдвигу спектра системы в область высоких частот. Таким образом, константа распространения позволяет реализовать механизм выбора той или иной моды для передачи сигнала на желаемой частоте за счет изменения характерной частоты моды.

Благодаря относительному сдвигу слоев волноводов можно добиться того, что дисперсионные кривые второго типа будут касаться в точке, расположенной на границе первой зоны Бриллюэна. При этом система волноводов имеет зигзагообразную форму с параметрами $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\varphi = 45^\circ$ (рис. 4). Это обстоятельство можно использовать для реализации переключения между модами.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 19-02-00433, 18-32-00204).

- [1] Blaustein G.S., Gozman M.I., Samoylova O., Polishchuk I.Ya., Burin A.L. // Opt. Express. 2007. **15**. P. 17380.
- [2] Polishchuk I.Ya., Gozman M.I., Blaustein G.S., Burin A.L. // Phys. Rev. E. 2010. **81**. P. 026601.
- [3] Polishchuk I.Ya., Anastasiev A.A., Tsyvkunova E.A., Gozman M.I., Solov'ov S.V., Polishchuk Yu.I. // Phys. Rev. A. 2017. **95**. P. 053847.
- [4] Bulgakov E.N., Sadreev A.F. // Phys. Rev. A. 2018. **97**. P. 033834.
- [5] Belan S., Vergeles S. // Opt. Mat. Expr. 2015. **5**. P. 130.
- [6] Zheng M.J., Xiao J.J., Yu K.W. // Phys. Rev. A. 2010. **81**. P. 033829.
- [7] Lederer F., Stegeman G.I., Christodoulides D.N., Assanto G., Segev M., Silberberg Y. // Phys. Rep. 2008. **463**. P. 1.
- [8] Christodoulides D.N., Lederer F., Silberberg Y. // Nature (London). 2003. **424**. P. 817.
- [9] Szameit A., Pertsch T., Nolte S., Tunnermann A., Lederer F. // Phys. Rev. A. 2008. **77**. P. 043804.
- [10] Dreisow F., Szameit A., Heinrich M., Pertsch T., Nolte S., Tunnermann A., Longhi S. // Phys. Rev. Lett. 2009. **102**. P. 076802.
- [11] Gozman M.I., Polishchuk Yu.I., Polishchuk I.Ya., Tsyvkunova E.A., Solid State Commun. 2015. **213**. P. 16.
- [12] Belan S., Parfenyev V., Vergeles S.S. // Opt. Mat. Expr.

2015. **5**. P. 2843.

- [13] *Ватсон Г. Н.* // Теория бесселевых функций. М.: Издательство иностранной литературы, 1949.
[14] *Twersky V.* // Arch. Rational Mech. Anal. 1961. **8**. P.

323.

- [15] *Norlund N. E.* // Springer (Berlin). 1924.
[16] *Johnson P., Christy R.* // Phys. Rev. B. 1972. **6**. P. 4370.

The guided modes in the periodic planar system of metallic cylinders

A. A. Anastasiev^{1,a}, M. I. Gozman², I. Ya. Polishchuk^{1,2,b}, Yu. I. Polishchuk¹, E. A. Tsyvkunova³

¹*National research centre "Kurchatov institute", Moscow, 123182, Russia*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, 141701, Russia*

³*National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, 115409, Russia*

E-mail: ^asantafracks@gmail.com, ^biypolishchuk@gmail.com

The guided modes in periodic systems consisting of silver cylinders are studied. The elementary cell in such systems comprises several identical guides. We employ the multiple scattering formalism based on the exact solution of Maxwell's equations for the single waveguide problem. We also engage the technique that utilizes the transformation of the lattice sums into fast convergent series. This method greatly increases the accuracy of calculations and sufficiently optimizes the time-cost of numerical simulations. It is shown that under condition of nonzero propagation constant these systems possess closely located guided modes. The number of these modes equals the number of cylinders inside one elementary cell. The frequency of these modes decreases as quasi-wave vector runs over the Brillouin zone and approaches its edge. The modes are shifted towards the high frequency region as propagation constant value increases thus allowing the modes to be found in the near infrared or even visible part of spectrum. It is also possible to simultaneously match the quasi-wave number and the frequency of dispersion curves in zigzag-shaped waveguide systems.

PACS: 42.79.Gn, 72.80.Tm, 73.20.Mf, N 78.67.Qa

Keywords: lowdimensional photonic crystals, nanophotonics, nanoplasmonics, metamaterials, waveguide arrays, guided modes.

Received 15 August 2019.

Сведения об авторах

1. Анастасиев Антон Александрович — лаборант-исследователь; e-mail: santafracks@gmail.com.
 2. Гозман Михаил Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ассистент.
 3. Полищук Илья Яковлевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: iypolishchuk@gmail.com.
 4. Полищук Юрий Ильич — инженер.
 5. Цывкунова Елена Александровна — канд. тех. наук, доцент.
-