

О дрейфовых свойствах волнового пакета Стокса, распространяющегося по электрически заряженной границе раздела жидких сред

А. А. Очиров* Д. Ф. Белоножко ††

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова,
физический факультет, кафедра инфокоммуникаций и радиофизики
Россия, 150003, Ярославль, ул. Советская, д. 14/2

† Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова,
физический факультет, кафедра микроэлектроники и общей физики
Россия, 150003, Ярославль, ул. Советская, д. 14/2

(Статья поступила 30.07.2019; Подписана в печать 31.07.2019)

Выполнен аналитический асимптотический расчет скорости дрейфовых течений и траекторий движения индивидуальных жидких частиц в системе из двух несмешивающихся перемещающихся друг относительно друга идеальных жидкостей по электрически заряженной поверхности раздела которых распространяется волновой пакет Стокса.

PACS: 47.20.Ft, 47.35.+i, 47.65.-d УДК: 532.5.031

Ключевые слова: дрейф Стокса, массоперенос, электрический заряд, волновой пакет Стокса.

ВВЕДЕНИЕ

В середине XIX века выдающийся английский ученый Дж. Г. Стокс указал на то, что при распространении периодической волны с амплитудой ζ , круговой частотой ω и волновым числом k по поверхности идеальной жидкости, в самой жидкости возникает медленный горизонтальный перенос вещества [1]. Его скорость

$$U_{drift} = \zeta^2 \omega k \exp(2kz) \quad (1)$$

максимальна на поверхности жидкости и экспоненциально убывает с глубиной (с уменьшением значения вертикальной координаты z). Это явление носит название «дрейф Стокса».

Несмотря на давнюю историю вопроса, в университетских курсах общей физики до сих пор культивируется представление о том, что распространение синусоидальной бегущей волны по поверхности жидкости вызывает циркуляцию ее частичек по замкнутым круговым траекториям без какого-либо переноса вещества вдоль направления распространения волны [2, 3]. В действительности, из-за затухания движения с глубиной, приповерхностная частичка жидкости в своем движении описывает не окружности, а вертикальные петли, с несколько сокращенной по длине нижней частью. В результате, через период волнового движения частичка возвращается не в исходное положение, а в немного смещенное в направлении распространения волны. Описанное систематическое смещение пропорционально квадрату амплитуды волны и с течением времени повторяется тем чаще, чем больше частота волнового движения. Именно поэтому скорость дрейфа Стокса (1) пропорциональна квадрату амплитуды и частоте волны.

Особенно активно феномен дрейфа Стокса начал исследоваться начиная с середины XX века. Строились модели влияния вязкости [4], разрабатывались подходы, учитывающие сложность спектрального состава волнового возмущения [5, 6], анализировалась возможность влияния на дрейф пленки поверхностно-активного вещества [7]. Лавинообразное увеличение количества различных уточняющих формул, к сожалению, не перешло в качество. Когда дело доходит до практических оценок, большая часть всех этих формул по самым разным причинам оказывается неработоспособной. В прикладном плане наиболее употребительной до сих пор остается классическая формула Стокса или ее несложные обобщения [8].

В настоящее время интерес к изучению Дрейфа Стокса несколько не уменьшился [8–11]. Но если раньше основное внимание уделялось определению параметров усредненного дрейфового течения, то сейчас, становится ясно, что для полного понимания явления необходимо подробнее разобраться в вопросе о форме траекторий индивидуальных жидких частиц, вовлеченных в волновое движение. В работе [12] доказано существование аналитического решения задачи об определении траектории движения индивидуальных жидких частиц. В другой недавней публикации предложен алгоритм численного расчета их траекторий [13]. В статье [14] развита аналитическая асимптотическая методика расчета скорости дрейфа Стокса и траекторий движения жидких частиц в системе двух перемещающихся друг относительно друга несмешивающихся идеальных жидкостей по поверхности раздела которых распространяется простейшая периодическая капиллярно-гравитационная волна. Методика [14] успешно справилась и с более общей задачей, в которой дрейф инициировался волновым пакетом Стокса [15]. Настоящее исследование — следующее обобщение модели [15]. На этот раз в задачу вводится возможность дополнительного воздействия на частоту волнового возмущения. В качестве физического пара-

*E-mail: otchirov@mail.ru

†E-mail: belonozhko@mail.ru

метра, способного управлять частотой волны выбрана поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по невозмущенной поверхности раздела контактирующих сред.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются две идеальные несжимаемые несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ и $\rho' < \rho$, которые в декартовой системе координат $Oxyz$ контактируют вдоль плоскости Oxy . Вертикальная ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести g . Нижнюю более плотную жидкость, заполняющую полупространство $z < 0$, будем считать в среднем неподвижной и идеально проводящей. Верхняя жидкость, занимающая область $z > 0$, полагается диэлектрической (с диэлектрической проницаемостью близкой к единице), движущейся посту-

пательно с постоянной скоростью U_0 в положительном направлении оси Ox . Скорость U_0 считается существенно дозвуковой, чтобы жидкости можно было считать несжимаемыми [16]. Пусть поверхность раздела несет поверхностный электрический заряд, который в невозмущенном состоянии распределяется с поверхностной плотностью $\kappa_0 = E_0/(4\pi)$ (E_0 - вертикальная компонента напряженности электрического поля над невозмущенной поверхностью). Полагается, что вдоль поверхности раздела в направлении оси Ox распространяется волновое возмущение, которое представляет собой волновой пакет Стокса, состоящий из двух капиллярно-гравитационных волн с одинаковой амплитудой ζ и с близкими волновыми числами $k_{\pm} = k \pm \Delta k$ ($2\Delta k \ll k$). Для простоты движение жидкости считается независимым от горизонтальной координаты y .

Математическая формулировка задачи определения электрического Φ и гидродинамических потенциалов верхней φ' и нижней φ жидкостей имеет вид:

$$z > \xi : \quad \Delta\varphi' = 0; \quad \Delta\Phi = 0; \quad P' = p_0 - \rho'gz - \rho'\partial_t\varphi' - (\rho'/2) \left[(\partial_x\varphi' + U_0)^2 + (\partial_z\varphi')^2 \right]; \quad (2)$$

$$z = \xi : \quad \partial_t\xi + \partial_x\xi\partial_x\varphi = \partial_z\varphi; \quad \partial_t\xi + (\partial_x\varphi' + U_0)\partial_x\xi = \partial_z\varphi'; \quad P - P' + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma\partial_{xx}\xi \left(1 + (\partial_x\xi)^2 \right)^{-3/2}; \quad (3)$$

$$z < \xi : \quad \Delta\varphi = 0; \quad P = p_0 - \rho gz - \rho\partial_t\varphi - (\rho/2) \left[(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2 \right]; \quad (4)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla\varphi' \rightarrow 0; \quad \nabla\Phi \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (5)$$

Задача (2)–(5) сформулирована в переменных Эйлера. Для расчета скорости дрейфа и траекторий жидких частиц ее решение необходимо будет преобразовывать к переменным Лагранжа [17]. Использование лагранжева описания непосредственно на этапе формулировки задачи наталкивается на определенные трудности. Дело в том, что в рамках модели идеальных контактирующих жидкостей жидкие частицы, относящиеся к разным средам, на поверхности раздела могут «проскальзывать» друг относительно друга, что вызывает проблемы с записью граничных условий на поверхности раздела $z = \xi(x, t)$ в переменных Лагранжа. Поясним ситуацию на примере условия равенства давлений. В начальный момент времени $t = 0$ условие баланса давлений в лагранжевых переменных сводится к соотношению:

$$z = \xi(x, z, t)|_{t=0} : P_L(x, z, t)|_{t=0} = P'_L(x, z, t)|_{t=0}. \quad (6)$$

В описании Лагранжа функция $P_L(x, z, t)$ при произвольном значении t имеет смысл давления в этот момент времени, но не в точке (x, z) , а там где оказалась

жидкая частичка, про которую известно, что она изначально (при $t = 0$) располагалась в точке (x, z) . Жидкие частицы из разных сред, контактирующие друг с другом при $t = 0$, в другой момент времени в общем случае находятся в разных точках пространства, и равенство

$$P_L(x, z, t) = P'_L(x, z, t)$$

при произвольном значении t просто теряет смысл. В переменных Эйлера подобного рода проблем не возникает. Методика приведения решения задачи, записанного в переменных Эйлера, к переменным Лагранжа подробно описана в [14].

Задача (2)–(5) решалась методом разложения по малому параметру $\varepsilon = \zeta k$, пропорциональному амплитуде волнового движения. Неизвестные функции искались в виде разложения:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \\ \varphi' \\ \Phi \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi'_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2)–(5) и осуществляя, как это принято в асимптотическом анализе таких задач, снесение граничных условий на (3) на равновесный уровень $z = 0$ несложно перейти к задачам первого и второго по ε порядков малости. Описание процедуры сноса гра-

ничных условий на равновесный уровень можно найти в [15].

Математическая формулировка задачи первого порядка малости по амплитуде волны запишется следующим образом:

$$z > 0 : \quad \Delta\varphi'_1 = 0; \quad \Delta\Phi_1 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_1 = 0; \tag{8}$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad \partial_t \xi_1 - U_0 \partial_x \xi_1 - \partial_z \varphi'_1 = 0; \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \tag{9}$$

$$g \xi_1 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_1 + \rho' \partial_t \varphi'_1 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_1 = 0;$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_1 \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \tag{10}$$

Задача второго порядка малости описывается соотношениями:

$$z > 0 : \quad \Delta\varphi'_2 = 0; \quad \Delta\Phi_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_2 = 0; \tag{11}$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \xi_1; \quad \Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \partial_z \Phi_1; \tag{12}$$

$$\partial_t \xi_2 - U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_x \xi_1;$$

$$g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \left((\partial_x \Phi_1)^2 + (\partial_z \Phi_1)^2 \right) + \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \frac{\rho}{2} \left((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2 \right) - \rho' \xi_1 \partial_{zt} \varphi'_1 -$$

$$-\frac{\rho'}{2} \left((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1 \right) + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \partial_z \Phi_1;$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \tag{13}$$

Последовательное решение сначала (8)–(10), затем (11)–(13) приводит к аналитическим выражениям, описывающим эйлерово поле скоростей во втором приближении по ε .

2. РЕШЕНИЕ

Решение задачи (8)–(10) в виде суперпозиции двух бегущих синусоидальных волн с близкими волновыми числами легко находится стандартными методами математической физики:

$$\xi_1 = \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) + \zeta \cos(\omega_- t - k_- x); \tag{14}$$

$$\varphi_1 = -\zeta \exp(k_+ z) \frac{\omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) - \zeta \exp(k_- z) \frac{\omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x); \tag{15}$$

$$\varphi'_1 = -\zeta \exp(-k_+ z) \frac{k_+ U_0 - \omega_+}{k_+} \sin(\omega_+ t - k_+ x) -$$

$$-\zeta \exp(-k_- z) \frac{k_- U_0 - \omega_-}{k_-} \sin(\omega_- t - k_- x); \tag{16}$$

$$\Phi_1 = E_0 \zeta \cos(\omega_+ t - k_+ x) \exp(-k_+ z) + E_0 \zeta \cos(\omega_- t - k_- x) \exp(-k_- z). \tag{17}$$

Здесь $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega = \omega \pm \Delta k \partial_k \omega$ — круговые частоты компонент волнового пакета.

Дисперсионное уравнение задачи, связывающее круговую частоту волнового движения ω с волновым числом и другими параметрами задачи имеет вид:

$$\omega = \frac{k \rho' U_0 \pm \sqrt{k g (\rho^2 - \rho'^2) - k^2 \rho \rho' U_0^2 + k (\rho + \rho') (k \gamma - W \sqrt{\rho g \gamma})}}{\rho + \rho'}. \tag{18}$$

Безразмерный параметр $W = 4\pi \kappa_0^2 / \sqrt{\rho g \gamma}$ называется параметр Тонкса–Френкеля. Он имеет смысл безраз-

мерного квадрата поверхностной плотности электрического заряда и характеризует отношение электрических и лапласовских сил на поверхности раздела сред.

Анализ дисперсионного уравнения позволяет определить при каких значениях параметров системы волновое возмущение становится неустойчивым — превращается в деформацию свободной поверхности с нарастающей во времени амплитудой. В рассматриваемой задаче имеются два механизма дестабилизации системы. Первый — неустойчивость по отношению к наличию тангенциального скачка поля скоростей на поверхности раздела. Ее еще называют неустойчивость Кельвина – Гельмгольца. Она возникает благодаря подъемной силе на гребнях волнового возмущения, которая в условиях неустойчивости превалирует над капиллярными силами и действием поля силы тяжести. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца возникает, если скорость верхней среды U_0 превышает некоторое критическое значение, которое для каждого волнового числа свое. Второй механизм дестабилизации — неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку поверхностного электрического заряда. Эта неустойчивость проявляет себя, когда на гребнях волнового возмущения начинают преобладать электрические силы. Такая неустойчивость называется неустойчивость Тонкса–Френкеля. Для ее возникновения необходимо чтобы величина параметра Тонкса–Френкеля W (пропорционального квадрату безразмерной поверхностной плотности заряда) превысила некоторое критическое значение. Критическое значение W зависит от волнового числа поверхностного возмущения. Состояние системы, в котором дестабилизирующие и стабилизирующие факторы в точности компенсируют друг друга будем называть состоянием нейтральной устойчивости.

На рис. 1, 2 приведены примеры расчета кривых нейтральной устойчивости, которые разделяют устойчивые и неустойчивые состояния системы на плоскости соответствующих ситуации безразмерных параметров. Расчеты проводились в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$. Рис. 1 иллюстрирует закономерности реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при различных значениях поверхностной плотности электрического заряда, а рисунок 2 описывает закономерности реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля при различных значениях скорости верхней среды.

На рис. 1 изображено семейство кривых нейтральной устойчивости в плоскости параметров (U_0, k) для разных значений параметра Тонкса–Френкеля. Кривой (1) соответствует значение $W = 0$ (поверхностный заряд отсутствует), кривой (2) — значение $W = 1$, кривой (3) — значение $W = 2$, а кривой (4) — значение $W = 3$.

Из рис. 1 видно, что в присутствии поверхностного электрического заряда неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей развивается при меньших значениях U_0 (величины тангенциального разрыва).

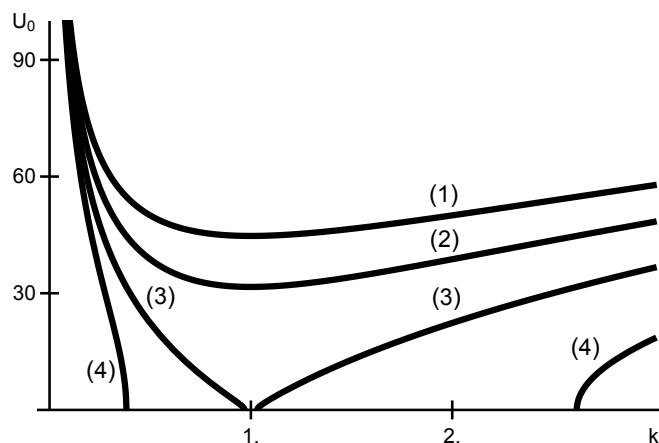


Рис. 1: Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (U_0, k) для разных значений параметра Тонкса–Френкеля

На рис. 2 показано семейство кривых нейтральной устойчивости на плоскости параметров (W, k) для разных значений скорости U_0 . Кривая (1) соответствует безразмерной скорости $U_0 = 0$ (т.е. при отсутствии относительного движения сред), кривая (2) — безразмерной скорости $U_0 = 30$, а кривая (3) — безразмерной скорости $U_0 = 50$.

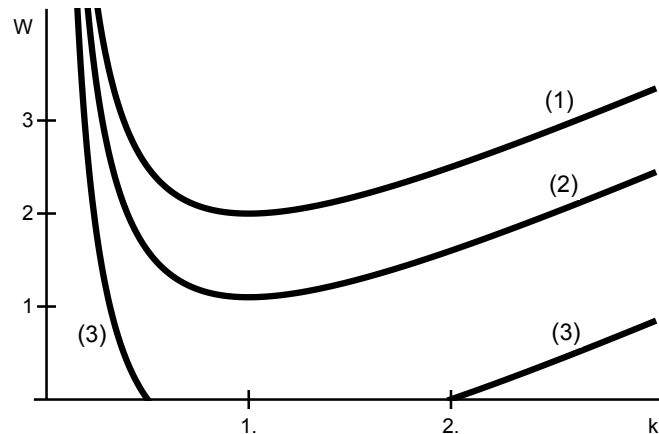


Рис. 2: Кривая нейтральной устойчивости в области параметров (W, k) для разных значений тангенциального разрыва скоростей

Относительное движение жидких сред снижает пороговое значение поверхностной плотности электрического заряда, необходимого для развития неустойчивости по отношению к избытку электрического заряда. Таким образом дестабилизирующие факторы, действующие в рассматриваемой системе, эффективно усиливают действие друг друга. Можно заметить, что существует волновое число, наиболее восприимчивое к совместному действию обоих механизмов дестабилизации. В выбранных безразмерных переменных при условии $\rho' \ll \rho$ оно принимает значение $k_* \approx 1$. Это соответствует размерному волновому числу $k_* = \sqrt{\rho g / \gamma}$.

Для решения задачи второго порядка малости, в правую часть соотношений (12) необходимо подставить решение задачи первого порядка (14) — (17). Но предварительно представляется целесообразным преобразовать соотношение (14) к выражению, пропорциональному произведению вида [20]:

$$\cos(\omega t - kx + \beta) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx + \chi) \quad (19)$$

с константами β и χ играющими роль начальных фаз.

В произведении (19) естественным образом выделяются два временных масштаба: быстрый $T = 2\pi/\omega$, соответствующий периоду несущей волнового пакета, и медленный $\tau = 2\pi/\Delta\omega$, определяющий период огибающей.

С учетом сказанного результат подстановки (14) — (17) в правые части граничных условий (12) может быть записан в следующем виде:

$$\partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = -2\zeta^2 \Delta k \omega \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 &= -2\zeta^2 \Delta k (kU_0 - \omega) \times \\ &\times \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = 2k\zeta^2 \sqrt{\pi W \sqrt{\rho g \gamma}} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \Pi(t) + O(\Delta k^2); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} g\xi_2(\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= \\ = -\zeta^2 k(1+k) W \sqrt{\rho g \gamma} (\cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + 1) + \Pi(t) + O(\Delta k^2). \end{aligned} \quad (23)$$

В правых частях выписанных выражений учитывались только линейные по Δk слагаемые. Быстро меняющиеся со временем компоненты сумм (с характерным временем изменения порядка периода несущей волнового пакета $T = 2\pi/\omega$) обозначены общим символом $\Pi(t)$. Наличие такого рода слагаемых никак не сказывается на дрейфовой части компонент скорости и полный вид аналитических выражений для них в рамках настоящего рассмотрения непринципиален.

Для нахождения дрейфовых компонент скорости достаточно решить усеченную задачу второго порядка малости по амплитуде волнового движения, в которой учтены только медленно меняющиеся со временем слагаемые. Решение задачи второго порядка малости для горизонтальных составляющих скоростей медленно меняющихся со временем в нижней u_d и в верхней u'_d жидкостях имеет вид:

$$u_d = -2\zeta^2 \Delta k \omega \exp(2z\Delta k) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx), \quad (24)$$

$$u'_d = 2\zeta^2 \Delta k (kU_0 - \omega) \exp(2z\Delta k) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx). \quad (25)$$

Из соотношений (15) и (16) легко перейти к эйлеровому представлению для компонент поля скоростей в первом приближении по амплитуде волнового движения, а соотношения (25) представляют собой эйле-

рово представление лишь части добавок второго порядка малости к компонентам поля скоростей. Но именно эти компоненты дают вклад в дрейфовые составляющие течения, которые возникают после преобразования выписанных соотношений к лагранжевому описанию движения. Для перехода от скорости в описании Эйлера к скорости в описании Лагранжа следует воспользоваться известным соотношением [21, 22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \left(\left(\int_0^t \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $V_1(\mathbf{r}, t)$ — эйлерова скорость течения в первом приближении по амплитуде волнового возмущения, являющаяся решением линеаризованной задачи (в нашем случае — задачи (8) — (10), а $V_2(\mathbf{r}, t)$ — поправка второго по амплитуде волны порядка малости.

При использовании формулы (26) возникают некоторые нетривиальные расчетные нюансы, которые подробно описаны в работе [14]. Применяя методику [14] к расчетам по формуле (26), и выделяя только дрейфовые составляющие поля скоростей можно прийти к следующим выражениям для скорости дрейфа в нижней U_{drift} и в верхней среде U'_{drift} :

$$\begin{aligned}
 U_{drift} &= \zeta^2 e^{2k+z_0} (k\omega + \Delta k\omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{2k-z_0} (k\omega - \Delta k\omega - k\Delta\omega) + \\
 &\quad + 2\zeta^2 k\omega e^{2kz_0} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + u_d, \\
 U'_{drift} &= \zeta^2 e^{-2k+z_0} (k\Omega + \Delta k\Omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{-2k-z_0} (k\Omega - \Delta k\Omega - k\Delta\omega) + \\
 &\quad + 2\zeta^2 k\Omega e^{-2kz_0} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + u'_d + U_0.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Здесь $\Omega = kU_0 - \omega$ — круговая частота циклических движений индивидуальных жидких частиц в верхней среде. При ее расчете, как показано в [14], необходимо согласовывать все происходящие в системе циклические движения таким образом, чтобы при переходе в инерциальную систему отсчета, связанную с движущейся верхней средой, корректно выполнялись соотношения, описывающие эффект Доплера. В формуле (27) и далее нижний индекс «0» при координате означает, что соотношение записано в лагранжевых переменных, в которых координата имеет смысл начального положения жидкой частички (при $t = 0$).

В общем случае формула (26) позволяет получить не только дрейфовые, но и полные выражения для компонент поля скоростей во втором приближении по амплитуде волнового движения. Результат получается довольно громоздкий, но его можно привести к удоб-

ной аналитической асимптотической форме. В скорости движения каждой индивидуальной жидкой частицы можно выделить две компоненты, относящиеся к разным типам движения. Первая составляющая отвечает за циклическое движение частицы. Она состоит из главного (лидирующего) слагаемого первого порядка малости по амплитуде волны и малой добавки второго порядка малости. Вторая компонента скорости описывает горизонтальное дрейфовое движение. Для нее лидирующим слагаемым является выражение второго по амплитуде волны порядка малости. Для удобства аналитического анализа и практического использования представляется целесообразным записать выражения для лагранжевых компонент поля скорости с точностью до лидирующих слагаемых в каждом из описанных типов движения:

$$\begin{aligned}
 u_L(x_0, z_0, t) &= \zeta\omega_- \exp(k_-z_0) \cos((\omega_- - k_-U_{drift})t - k_-x_0) + \\
 &\quad + \zeta\omega_+ \exp(k_+z_0) \cos((\omega_+ - k_+U_{drift})t - k_+x_0) + U_{drift}; \\
 v_L(x_0, z_0, t) &= -\zeta\omega_- \exp(k_-z_0) \sin((\omega_- - k_-U_{drift})t - k_-x_0) - \\
 &\quad - \zeta\omega_+ \exp(k_+z_0) \sin((\omega_+ - k_+U_{drift})t - k_+x_0);
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 u'_L(x_0, z_0, t) &= U_{drift} + \zeta(k_-U_0 - \omega_-) \exp(k_-z_0) \times \\
 &\quad \times \cos((\omega_- - k_-U'_{drift})t - k_-x_0) + \zeta(k_+U_0 - \omega_+) \exp(k_+z_0) \cos((\omega_+ - k_+U'_{drift})t - k_+x_0); \\
 v'_L(x_0, z_0, t) &= -\zeta(k_-U_0 - \omega_-) \exp(k_-z_0) \times \\
 &\quad \times \sin((\omega_- - k_-U'_{drift})t - k_-x_0) - \zeta(k_+U_0 - \omega_+) \exp(k_+z_0) \sin((\omega_+ - k_+U'_{drift})t - k_+x_0).
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Соотношения (28)–(29) записаны для случая, когда частота ω , рассчитанная по дисперсионному уравнению (18), является действительным числом. При этом система находится в устойчивом состоянии: волновое возмущение распространяется по границе раздела жидкостей без нарастания амплитуды. В случае неустойчивости частота становится комплексной $\omega = \omega_r + i\omega_i$, а формулы (28) — (29) изменяются. Амплитудные множители при косинусах и синусах становятся другими, но, самое главное, при них появляются

множители экспоненциально нарастающие во времени $\exp((\omega_i \pm \Delta k \partial_k \omega_i)t)$. Дрейфовые слагаемые при этом умножаются на $\exp(2\omega_i t)$ и тоже становятся нарастающими во времени.

Для получения траекторий движения индивидуальных жидких частиц в параметрической форме достаточно выполнить интегрирование соотношений (28)–(29) по t . Однако, компактного и удобного для анализа аналитического выражения при этом не получается. На практике, если параметры системы известны, соответ-

ствующее интегрирование проще выполнить численно.

Тем не менее, простой аналитический вид выражений для скоростей индивидуальных жидких частиц (28)–(29) позволяет провести качественный анализ закономерностей влияния поверхностного заряда на движение жидкостей, не обращаясь к конкретным расчетам. В частности, понятно, что в обеих жидкостях жидкие частицы движутся по петлеобразным траекториям с модулированными вдоль огибающей волнового пакета радиусами витков. При этом частота циклических движений жидкой частицы всегда меньше частоты волновой моды, вызвавшей это движение. Поверхностный электрический заряд, согласно дисперсионному уравнению (18) заметно влияет на частоту волнового движения. При докритических по отношению к реализации зарядовой неустойчивости значениях поверхностной плотности заряда частота волнового возмущения существенно уменьшается при увеличении параметра W , характеризующего поверхностную плотность заряда. В связи с тем, что частота входит в амплитудные множители всех составляющих скорости индивидуальной жидкой частицы, соответствующие амплитуды уменьшаются вместе с уменьшением частоты. Получается, что поверхностный электрический заряд играет роль управляющего параметра: увеличение его поверхностной плотности приводит к уменьшению скорости и циклических и дрейфовых движений в обеих средах. Из дисперсионного уравнения (18), следует что при $U_0 = 0$, увеличивая значение параметра W можно обратить частоту в ноль. И дрейфовые и циклические движения окажутся полностью подавленными. Если же $U_0 \neq 0$, то увеличение поверхностной плотности электрического заряда способно уменьшить, но не подавить дрейфовые и циклические движения индивидуальных жидких частиц.

Расчеты показывают, что в качественном смысле поверхностный электрический заряд не изменяет обнаруженные в работе [15] закономерности горизонтального массопереноса вызванного распространением по гра-

нице раздела волнового возмущения. Поверхностный заряд способен лишь количественно уменьшить величину горизонтального массопереноса, но, при наличии движения верхней среды, не способен на его полное подавление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При распространении по горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей волнового пакета, в приповерхностной области возникают горизонтальные дрейфовые течения, интенсивностью которых можно управлять. Для этого необходимо создать условия, при которых в рассматриваемой системе появляется физический параметр, способный влиять на частоту волнового движения. В качестве такого параметра может эффективно выступать поверхностная плотность электрического заряда, распределенного по поверхности раздела жидкостей. При увеличении поверхностной плотности электрического заряда, интенсивность дрейфовых движений, вызванных распространением волнового возмущения существенно уменьшается. Если же жидкости участвуют в относительном сдвиговом течении с тангенциальным скачком скорости на поверхности раздела, то влияние поверхностного электрического заряда на интенсивность возбужденных волновым возмущением дрейфовых течений ослабевает. С ростом величины тангенциального скачка поля скоростей заряд теряет свою эффективность, как фактор препятствующий формированию дрейфовых течений, но усиливает свое влияние в качестве механизма дестабилизации системы: увеличение поверхностной плотности заряда способствует снижению порогового значения величины тангенциального скачка поля скоростей по превышении которого развивается неустойчивость тангенциального разрыва.

-
- [1] Stokes G. G. // Trans. of the Cambridge Phil. Soc. 1847. **8**. P. 441.
- [2] Сивухин Д. В. // Общий курс физики. Том 1. Механика. Уч. пос. М.: Физматлит, 1989.
- [3] Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. // Курс общей физики. Механика/ Под ред. В. А. Алешкевича. М.: Физматлит, 2011.
- [4] Longuet-Higgins M. S. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1953. **245**, N 903. P. 535.
- [5] Chang M. S. // J. of Geophys. Res. 1969. **74**, N 6. P. 1515.
- [6] Huang N. E. // J. of Geophys. Res. 1970. **75**, N 12. P. 2211.
- [7] Weber J. E., Saetra O. // Phys. of Fluids. 1995. **7**. N 2. P. 307.
- [8] Isobe A. et al. // Marine pollution bulletin. 2014. **89**. N 1-2 .P. 324.
- [9] Herreman W., Lesaffre P. // J. of Fluid Mech. 2011. **679**. P. 32.
- [10] Feng M. et al. // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. 2010. **68**. N 7. P. 1182.
- [11] Röhrs J. et al. // Limnology and Oceanography. 2014. **59**. N 4. P. 1213.
- [12] Shnirelman A. // arXiv preprint arXiv:1205.5837. 2012.
- [13] Okamoto H., Shōji M. // PPhil. Trans. R. Soc. Lond. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2012. **370**, N 1964. P. 1661.
- [14] Белоношко Д. Ф., Очиров А. А. // ЖТФ. 2018. **88**, № 5, С. 675
Belonozhko D. F., Ochirov A. A. // Technical Physics. 2018. **63**. N 5. P. 653.
- [15] Очиров А. А. // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2018. № 6. 1860301.
- [16] Batchelor G. K. // An Introduction to Fluid Dynamics.

- Cambridge University Press., 2000.
Бэтчелор Дж.К. // Введение в динамику жидкости. Москва. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004., 768 с.
- [17] *Абрашкин А., Якубович Е.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. Litres, 2018.
- [18] *McGoldrick L. F.* // J. Fluid Mech. 1972. **52**, N4, P. 723
- [19] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. **48**, N3, P. 463
- [20] *Островский Л. А., Потанов А. И.* // Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит. 2003.
- [21] *Le Blon P., Mysak L.* // Waves in Ocean. Amsterdam: Elsevier, 1978.
Ле Блон П., Майсек Л. // Волны в океане Ч.1. М.: Мир, 1981. 480 с
- [22] *Phillips O.M.* // The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge University Press., 1977. 336 p

On the drift properties of the Stokes wave packet propagating along an electrically charged interface between liquid media

A. A. Ochirov^{1,a}, D. F. Belonozhko^{2,b}

¹*Department of Infocommunications and Radiophysics of the Faculty of Physics, P.G.Demidov Yaroslavl State University Yaroslavl 150003, Russia*

²*Department of Microelectronics and General Physics of the Faculty of Physics, P.G.Demidov Yaroslavl State University Yaroslavl 150003, Russia*

E-mail: ^aotchirov@mail.ru, ^bbelonozhko@mail.ru

The analytical asymptotical expressions of velocity of drift flow and expressions for trajectories of individual liquid particles are derived for system of two immiscible liquids shifting with relate to each other along the electrically charged interface with the Stokes's wave packet propagating along the interface.

PACS: 47.20.Ft, 47.35.+i, 47.65.-d

Keywords: Stokes drift, mass transfer, electric charge, Stokes wave packet.

Received 30 July 2019.

Сведения об авторах

1. Очиров Артем Александрович — ст. преподаватель; тел.: (4852)79-77-70, e-mail: otchirov@mail.ru.
 2. Белоножко Дмитрий Фёдорович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (4852)30-32-62, e-mail: belonozhko@mail.ru.
-