

## Спонтанная генерация магнитных вакуумных эффектов сверхкритическим кулоновским источником в планарной КЭД

П. А. Грашин\* К. А. Свешников†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия,  
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

(Статья поступила 19.06.2019; Подписана в печать 22.08.2019)

Для планарной электрон-позитронной системы типа графена и гетероструктур на его основе рассмотрен эффект спонтанной генерации самосогласованных аксиального вакуумного тока и магнитного поля дипольного типа при наличии внешнего сверхкритического протяжённого кулоновского источника с зарядом  $Z$ . Показано, что основной вклад в эффект дают достигающие нижнего континуума дискретные уровни. Детально исследована форма индуцированного вакуумного магнитного поля. Показано также, что возникающая таким образом магнитная компонента поляризации вакуума значительно понижает вакуумную энергию системы, что доказывает возможность ее спонтанного возникновения при  $Z > Z_{cr,1}$ .

PACS: 12.20.Ds, 31.30.J-, 31.30.jf, 81.05.ue

Ключевые слова: 2+1-мерная КЭД, поляризация вакуума, графен и графеноподобные гетероструктуры, вакуумная плотность заряда, вакуумная плотность тока, вакуумная энергия

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, двумерные кристаллы, такие как графен и основанные на нем планарные гетероструктуры, обладают весьма интересным свойством — поведение носителей заряда в них описывается 2+1-мерным уравнением Дирака (УД) для безмассовых (или массивных, если рассматривается графен на подложке) фермионов, в котором скорость света заменена на скорость Ферми  $v_F$ . При этом эффективная постоянная тонкой структуры в графене  $\alpha_g \sim 1$  оказывается существенно больше, чем в 3+1-мерной КЭД. Благодаря этому оказывается возможным непосредственное экспериментальное наблюдение многих существенно пертурбативных КЭД-эффектов. Один из них — глубокая перестройка вакуумного состояния, обусловленная достижением нижнего континуума дискретными уровнями при наличии достаточно сильного квазистатического внешнего ЭМ-источника.

Для графена в качестве источника электростатического поля кулоновского типа может выступать заряженная примесь. При этом сам графен играет роль вакуума, а носители заряда — электроны и дырки — являются аналогом виртуальных частиц. Для точечных и протяжённых кулоновских источников эта задача достаточно хорошо изучена (см., например, [1–6] и цитируемую там литературу). Отдельно отметим работу [7], в которой с помощью самоспряжённого расширения дираковского гамильтониана делается попытка определить электронные состояния при  $Z\alpha > 1$  для точечного кулоновского источника. Наконец, в работах [8, 9] на основе оригинальной комбинации анали-

тических методов, компьютерной алгебры и численных расчётов были детально исследовано поведение вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии в планарной графеноподобной системе со сверхкритическим протяжённым кулоновским источником радиуса  $R_0$  с учетом экранировки.

Отдельный интерес представляет вопрос о поляризации вакуума в планарных системах при наличии внешнего магнитного поля. В работе [10] рассмотрены эффекты поляризации вакуума в модели заряженных фермионов с аномальным магнитным моментом и аксиально-векторным взаимодействием в постоянном однородном магнитном поле, найдены поправки к эффективному лагранжиану и исследовано поведение индуцированного тока при различных параметрах модели. В [11] вычислен 2+1-мерный поляризационный оператор при наличии постоянного однородного магнитного поля для конечного химического потенциала, а также исследовано его поведение. В [12] была точно решена задача о движении электрона в окрестности тонкой трубки магнитного потока. При этом вакуумная плотность тока была рассчитана путём прямого суммирования по состояниям «морских» электронов. Также в этой работе методом собственного времени Швингера-Фока было получено выражение для вакуумной плотности энергии. Для случая безмассовых фермионов поведение индуцированного в вакууме тонкой трубкой магнитного потока тока исследовано в [13]. Наконец, в работе [14] рассмотрено влияние на вакуум бесконечно тонкого соленоида на большом расстоянии от его оси.

Кроме того, достаточно подробно вопрос о магнитных эффектах поляризации вакуума исследовался для внешнего вектор-потенциала типа Ааронова-Бома (АБ). В работе [15] для скрещенных кулоновского и магнитного АБ-потенциалов посредством самоспряжённого расширения дираковского гамильтониана

\*E-mail: [grashin.petr@physics.msu.ru](mailto:grashin.petr@physics.msu.ru)

†E-mail: [costa@bog.msu.ru](mailto:costa@bog.msu.ru)

подробно исследованы свойства виртуальных связанных состояний, возникающих в сверхкритическом режиме для безмассовых фермионов, а в [16] рассмотрен случай массивных фермионов. Наконец, в работе [17] при помощи контурного интегрирования по методу Вихманна–Кролла (ВК) [18] получены аналитические выражения для вакуумных плотностей заряда и тока и исследовано их поведение в пределе малых и больших расстояний для АБ–потенциала.

Однако вопрос о поляризации вакуума в планарных КЭД–системах до сих пор не рассматривался для магнитных полей дипольного типа. В то же время, такие магнитные поля представляют особый интерес как физически наиболее реалистичные. В частности, обусловленные ими эффекты в УД исследовались в связи с гипотезой А. Барута о возрастании роли магнитного взаимодействия на сверхмалых расстояниях (например, [19] и приведенные там ссылки). Помимо этого, сверхсильные магнитные поля дипольного типа с напряженностью, на несколько порядков превышающую квантово–электродинамическую  $\sim 4.13 \times 10^{13}$  Гс, должны возникать при столкновениях релятивистских тяжелых ядер, когда на малое время (порядка адронных масштабов) может возникать кластер с ненулевым орбитальным моментом относительного движения [20]. Основные трудности при решении таких задач связаны с отсутствием аналитических решений УД. Это делает невозможным вычисление вакуумной энергии путём представления её в виде суммы интеграла от фазы упругого рассеяния и вклада дискретного спектра, что показало свою эффективность в чисто кулоновских задачах [8, 9, 21–25]. Однако, недавно разработанный в работах [26, 27] метод вычисления вакуумной энергии путём представления в виде контурного интеграла от логарифмической производной вронскиана решает эту проблему.

Как уже было отмечено выше, в работе [9] было детально исследовано поведение вакуумной энергии для протяжённого кулоновского источника в планарной КЭД–системе типа графена. В том числе, был установлен факт быстрого убывания вакуумной энергии в закритической области  $\sim (-Z^3/R_0)$ , где  $Z$  и  $R_0$  — заряд и радиус кулоновского источника соответственно. Столь быстрое убывание вакуумной энергии в области отрицательных значений приводит, в частности, к полной экранировке собственной электростатической энергии источника при относительно небольших зарядах примеси ( $Z \sim 6$  для  $\alpha_g \simeq 0.8$ ). Такое поведение вакуумной энергии указывает, что с ростом заряда источника эффекты поляризации вакуума достаточно быстро становятся существенно нелинейными и непертурбативными. Таким образом, можно ожидать и возникновения новых эффектов, в том числе связанных с магнитной компонентой поляризации вакуума. В частности, можно предположить, что за счёт опускающихся в нижний континуум дискретных уровней будет возникать эффект спонтанной генерации самосогласованных вакуумных аксиального тока

и магнитного поля дипольного типа.

В настоящей работе исследуется вопрос о возможности такого эффекта в планарной электрон–позитронной системе при наличии внешнего сверхкритического кулоновского источника, создающего потенциал в виде проекции на плоскость поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R_0$  с экспоненциальным обрезанием при  $r > R_0$  (коэффициент обрезания  $\sigma$ ):

$$A_0(\mathbf{r}) = Z|e| \left( \frac{1}{R_0} \theta(R_0 - r) + \frac{e^{-\sigma(r-R_0)}}{r} \theta(r - R_0) \right). \quad (1)$$

Самосогласованный режим ищется методом последовательных приближений. Прежде всего в систему вводится внешний затравочный ток, после чего при помощи метода ВК вычисляется порождаемый им вакуумный ток. Затем рассчитываются вектор–потенциалы, соответствующие затравочному и вакуумному токам, и проводится их сравнение. Затравочный ток модифицируется последовательными итерациями с целью максимально сблизить затравочный и индуцированный вакуумом вектор–потенциалы. Каждый из этапов этой процедуры более подробно описывается ниже.

Затравочная плотность тока имеет следующий вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = e j_0 \rho e^{-\lambda\sqrt{\rho}} \delta(z) \mathbf{e}_\varphi. \quad (2)$$

Здесь и далее  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}|_{z=0}$  — планарный радиус–вектор,  $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ . Выбор такого профиля тока обусловлен тем, что главный вклад в поляризацию вакуума возникает за счет достигающих порога нижнего континуума дискретных уровней, а зависимость  $\rho e^{-\lambda\sqrt{\rho}}$  есть характерная черта ВФ дискретных уровней непосредственно на пороге. Для уровней на пороге  $\lambda = 2\sqrt{8Z\alpha}$ , а в общем случае  $\lambda$  является величиной, которая будет подбираться из условия минимизации вакуумной энергии.

Амплитуда тока  $j_0$  выражается через его дипольный магнитный момент  $\mu$  следующим образом

$$j_0 = \frac{\mu \lambda^8}{10080 \pi}, \quad \mu = \frac{1}{2e} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})]_z d^3\mathbf{r}. \quad (3)$$

Поскольку мы рассматриваем плоскость, находящуюся в трёхмерном пространстве, соответствующий этому току вектор–потенциал вычисляется по известной формуле 3–мерной электродинамики:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4)$$

Подставляя (2) в (4), после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r})|_{z=0} &= \mathbf{e}_\varphi A(\rho), \\ A(\rho) &= 4e j_0 \left[ \int_0^\rho d\rho' \rho' e^{-\lambda\sqrt{\rho'}} \left( K\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) - E\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \int_\rho^\infty d\rho' \rho'^2 e^{-\lambda\sqrt{\rho'}} \left( K\left(\frac{\rho^2}{\rho'^2}\right) - E\left(\frac{\rho^2}{\rho'^2}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $K(z)$  и  $E(z)$  — полные эллиптические интегралы.

Далее везде используется система единиц  $\hbar = v_F = m = 1$  ( $v_F$  - скорость Ферми в графене, пояснения по поводу выбора системы единиц приведены в разделе 4). При этом эффективная электромагнитная константа связи  $\alpha$  становится безразмерной, что существенно упрощает все дальнейшие выкладки.

**1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ В РАЗМЕРНОСТИ 2+1**

В 2+1-мерной КЭД вакуумные плотности заряда и тока в первом порядке теории возмущений находятся через вакуумный поляризационный потенциал

$$j_{VP,\mu}^{(1)}(\rho) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_2 A_{VP,\mu}^{(1)}(\rho). \tag{6}$$

В первом порядке теории возмущений вакуумный поляризационный потенциал выражается через поляризационный оператор  $\Pi_R(-q^2)$  и Фурье-образ внешнего

потенциала  $\tilde{A}_\mu(\mathbf{q})$ :

$$A_{VP,\mu}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2q e^{i\mathbf{q}\rho} \Pi_R(-q^2) \tilde{A}_\mu(\mathbf{q}), \tag{7}$$

$$\tilde{A}_\mu(\mathbf{q}) = \int d^2\rho' e^{-i\mathbf{q}\rho'} A_\mu^{ext}(\rho'),$$

где  $q = |\mathbf{q}|$  и

$$\Pi_R(-q^2) = \frac{\alpha}{q} \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan\left(\frac{q}{2}\right) \right]. \tag{8}$$

При этом поляризационный оператор  $\Pi_R(-q^2)$  вводится соотношением  $\Pi_R^{\mu\nu}(-q^2) = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi_R(-q^2)$  и безразмерен. Его вычисление проводилось с использованием четырёхмерного представления матриц Дирака (причины выбора именно этого представления обсуждаются ниже).

Из (7), (8) для индуцированных кулоновского и векторного потенциалов получаем соответственно

$$A_{VP,0}^{(1)}(\rho) = \alpha \int_0^\infty dq J_0(q\rho) \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan\left(\frac{q}{2}\right) \right] \int_0^\infty d\rho' \rho' A_0^{ext}(\rho') J_0(q\rho'), \tag{9}$$

$$A_{VP}^{(1)}(\rho) = \mathbf{e}_\varphi \alpha \int_0^\infty dq J_1(q\rho) \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan\left(\frac{q}{2}\right) \right] \int_0^\infty d\rho' \rho' A_\varphi^{ext}(\rho') J_1(q\rho'). \tag{10}$$

Далее через соотношение (6) находим вакуумные плотности заряда и тока. Чтобы выяснить, можно ли вносить оператор Лапласа под знак интеграла по  $dq$  в (9) и (10), рассмотрим асимптотики подинтегральных выражений при  $q \rightarrow \infty$ . Для (9) главный член асимптотики имеет вид

$$\frac{1 + 4\sigma R_0}{q^3 R_0^{3/2} \sqrt{\rho}} \cos\left(q\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(qR_0 + \frac{\pi}{4}\right). \tag{11}$$

Чтобы оценить асимптотику подинтегрального выражения в (10), аппроксимируем вектор-потенциал следующей функцией, асимптотики которой при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$  совпадают с асимптотиками (5):

$$A_\varphi(\rho) = \frac{C_1 \rho}{1 + B_1 \rho^3}. \tag{12}$$

Тогда главный член асимптотики подинтегрального выражения в (10) будет иметь вид

$$\frac{45\sqrt{\pi} C_1 B_1}{q^{13/2} \sqrt{2\rho}} \cos\left(q\rho - \frac{3\pi}{4}\right). \tag{13}$$

В результате действия оператора Лапласа на выражение (11) возникает слагаемое, которое ведёт себя  $\sim 1/q$  при  $\rho = R_0$ . Поэтому приведённая ниже формула для  $\rho_{VP}^{(1)}(\rho)$  справедлива при  $\rho \neq R_0$  (при  $\rho = R_0$  вакуумная плотность заряда имеет логарифмическую особенность, которая обусловлена разрывом производной в кулоновском потенциале внешнего источника (1))

$$\rho_{VP}^{(1)}(\rho) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty dq q^2 J_0(q\rho) \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan\left(\frac{q}{2}\right) \right] \int_0^\infty d\rho' \rho' A_0^{ext}(\rho') J_0(q\rho'). \tag{14}$$

В то же время,  $\mathbf{j}_{VP}^{(1)}(\rho)$  порождается гладким потенциалом (5) и поэтому никаких разрывов не имеет

$$\mathbf{j}_{VP}^{(1)}(\rho) = \mathbf{e}_\varphi \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty dq q^2 J_1(q\rho) \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan\left(\frac{q}{2}\right) \right] \int_0^\infty dr' \rho' A_\varphi^{ext}(\rho') J_1(q\rho'). \tag{15}$$

Энергия поляризации вакуума в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$\mathcal{E}_{VP}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^2 \rho' j_{VP,\mu}^{(1)}(\rho') A^{ext,\mu}(\rho'). \quad (16)$$

Из (16) с учётом (6) и (9-10) для вакуумной энергии получаем

$$\mathcal{E}_{VP}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^2 \rho' \rho_{VP}^{(1)}(\rho') A_0^{ext}(\rho') - \frac{1}{2} \int d^2 \rho' \mathbf{j}_{VP}^{(1)}(\rho') \mathbf{A}^{ext}(\rho') = \mathcal{E}_{VP,el}^{(1)} + \mathcal{E}_{VP,mag}^{(1)}, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{E}_{VP,el}^{(1)} = \frac{\alpha}{4} \int_0^\infty dq q^2 \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan \left( \frac{q}{2} \right) \right] \left[ \int_0^\infty d\rho' \rho' A_0^{ext}(\rho') J_0(q\rho') \right]^2, \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{VP,mag}^{(1)} = -\frac{\alpha}{4} \int_0^\infty dq q^2 \left[ \frac{2}{q} + \left( 1 - \frac{4}{q^2} \right) \arctan \left( \frac{q}{2} \right) \right] \left[ \int_0^\infty d\rho' \rho' A_\varphi^{ext}(\rho') J_1(q\rho') \right]^2. \quad (19)$$

## 2. ФОРМАЛИЗМ ВИХМАННА-КРОЛЛА И ПЕРЕНОРМИРОВКА ВАКУУМНОЙ ПЛОТНОСТИ В РАЗМЕРНОСТИ 2+1

В рассматриваемом случае УД имеет вид

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho})) + \beta + V(\rho)] \psi = \epsilon \psi, \quad (20)$$

где

$$V(\rho) = eA_0(\rho) = -Z\alpha \left[ \theta(R_0 - \rho)/R_0 + \theta(\rho - R_0)e^{-\sigma(\rho - R_0)}/\rho \right].$$

Мы будем работать с 4-мерным представлением для

матриц Дирака. Поскольку мы рассматриваем задачу, обладающую аксиальной симметрией, то радиальные и угловые переменные разделяются подстановкой

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} \phi \\ -i\chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} a_{m_j}(\rho) e^{i(m_j - \frac{1}{2})\varphi} \\ b_{m_j}(\rho) e^{i(m_j + \frac{1}{2})\varphi} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} c_{m_j}(\rho) e^{i(m_j - \frac{1}{2})\varphi} \\ d_{m_j}(\rho) e^{i(m_j + \frac{1}{2})\varphi} \end{pmatrix}.$$

В результате радиальная часть УД распадается на две независимые системы, которые имеют вид

$$\begin{cases} \left( \partial_\rho - \frac{m_j}{\rho} - |e|A_\varphi(\rho) \right) a_{m_j}(\rho) = (\epsilon + 1 - V(\rho)) d_{m_j}(\rho) \\ \left( \partial_\rho + \frac{m_j}{\rho} + |e|A_\varphi(\rho) \right) d_{m_j}(\rho) = -(\epsilon - 1 - V(\rho)) a_{m_j}(\rho) \end{cases}, \quad (22)$$

$$\begin{cases} \left( \partial_\rho + \frac{m_j}{\rho} + |e|A_\varphi(\rho) \right) b_{m_j}(\rho) = (\epsilon + 1 - V(\rho)) c_{m_j}(\rho) \\ \left( \partial_\rho - \frac{m_j}{\rho} - |e|A_\varphi(\rho) \right) c_{m_j}(\rho) = -(\epsilon - 1 - V(\rho)) b_{m_j}(\rho) \end{cases}. \quad (23)$$

Отметим, что между ними наблюдается симметрия: система (23) для компонент  $b_{m_j}(\rho)$  и  $c_{m_j}(\rho)$  получается заменами  $a_{m_j}(\rho) \rightarrow b_{m_j}(\rho)$ ,  $d_{m_j}(\rho) \rightarrow c_{m_j}(\rho)$ ,  $m_j \rightarrow -m_j$ ,  $A_\varphi \rightarrow -A_\varphi$  из (22) и наоборот.

Отправной точкой в методе ВК [18] являются выра-

жения для вакуумных плотностей заряда и тока

$$\rho_{VP}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{|e|}{2} \left( \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \psi_n(\boldsymbol{\rho})^\dagger \psi_n(\boldsymbol{\rho}) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \psi_n(\boldsymbol{\rho})^\dagger \psi_n(\boldsymbol{\rho}) \right), \quad (24)$$

$$\mathbf{j}_{VP}(\rho) = -\frac{|e|}{2} \left( \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \psi_n(\rho)^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi_n(\rho) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \psi_n(\rho)^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi_n(\rho) \right), \quad (25)$$

где  $\epsilon_F$  — энергия Ферми ( $\epsilon_F = -1$ ), а  $\epsilon_n$  и  $\psi_n(\rho)$  — собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи УД.

Суть метода ВК состоит в использовании для вакуумных плотностей (24-25) представления в виде контурных интегралов в комплексной плоскости по энергетической переменной от следа функции Грина для соответствующей спектральной задачи УД. По определению функция Грина удовлетворяет уравнению

$$[\boldsymbol{\alpha}(-i\nabla_\rho + |e|\mathbf{A}(\rho)) + \beta + V(\rho) - \epsilon] G(\rho, \rho'; \epsilon) = \delta(\rho - \rho'). \quad (26)$$

Формальное решение уравнения (26) записывается в виде

$$G(\rho, \rho'; \epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(\rho) \psi_n(\rho')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}. \quad (27)$$

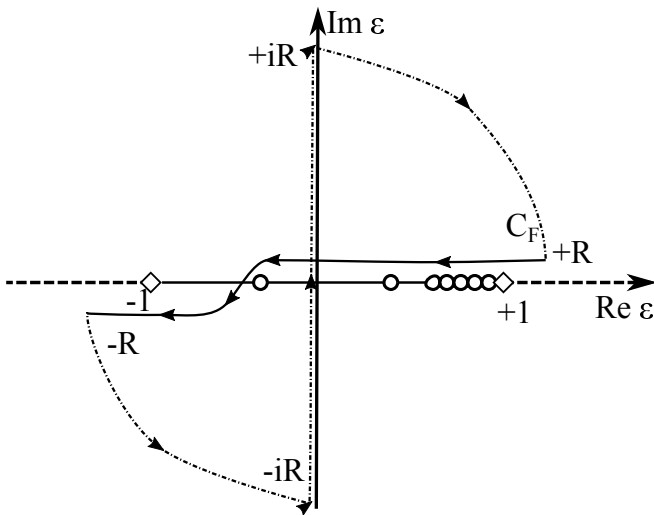


Рис. 1: Фейнмановский контур  $C_F$  и его деформация на мнимую ось в комплексной энергетической плоскости, используемые для представления вакуумных плотностей заряда и тока в виде контурных интегралов. Направление обхода контуров находится в соответствии с (27)

С помощью следа функции Грина вакуумные плотности заряда и тока легко выражаются через интегралы по Фейнмановскому контуру  $C_F$  на первом листе римановой энергетической поверхности [28–30]:

$$\rho_{VP}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_F} d\epsilon \text{Tr} G(\rho, \rho; \epsilon). \quad (28)$$

$$\mathbf{j}_{VP}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_F} d\epsilon \text{Tr} [\boldsymbol{\alpha} G(\rho, \rho; \epsilon)]. \quad (29)$$

По определению контур  $C_F$  строится так, чтобы все полюса функции Грина, соответствующие дискретным уровням, лежали под ним. Деформируя контур  $C_F$ , можно свести интегралы в (28) и (29) к мнимой оси. Более подробно последняя процедура рассмотрена в [28–30].

Учитывая, что рассматриваемая спектральная задача УД допускает разделение радиальных и угловых переменных, а затравочные кулоновский и магнитный вектор-потенциал аксиально-симметричны, для  $\text{Tr} G(\rho, \rho; \epsilon)$  и  $\text{Tr} [\boldsymbol{\alpha} G(\rho, \rho; \epsilon)]$  получаем следующее представление в виде парциальных разложений

$$\begin{aligned} \text{Tr} G(\rho, \rho; \epsilon) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m_j = \pm 1/2, 3/2, \dots} \text{Tr} G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon), \\ \text{Tr} [\boldsymbol{\alpha} G(\rho, \rho; \epsilon)] &= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{2\pi} \sum_{m_j = \pm 1/2, 3/2, \dots} \text{Tr} [\boldsymbol{\alpha}_\varphi G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon)], \end{aligned} \quad (30)$$

где  $G_{m_j}(\rho, \rho'; \epsilon)$  — сумма радиальных функций Грина для спектральных задач (22–23), которые в свою очередь строятся с использованием регулярных при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow +\infty$  решений систем (22)–(23). Если обозначить регулярные при  $\rho \rightarrow 0$  решения индексом 0, а регулярные при  $\rho \rightarrow +\infty$  решения индексом  $\infty$ , то выражения для  $\text{Tr} G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon)$  и  $\text{Tr} [\boldsymbol{\alpha}_\varphi G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon)]$  запишутся следующим образом

$$\text{Tr} G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon) = \frac{1}{\rho J_{m_j}^{ad}(\epsilon)} \left( a_{m_j}^0(\rho) a_{m_j}^\infty(\rho) + d_{m_j}^0(\rho) d_{m_j}^\infty(\rho) \right) + \frac{1}{\rho J_{m_j}^{bc}(\epsilon)} \left( b_{m_j}^0(\rho) b_{m_j}^\infty(\rho) + c_{m_j}^0(\rho) c_{m_j}^\infty(\rho) \right) \quad (31)$$

$$\text{Tr} [\boldsymbol{\alpha}_\varphi G_{m_j}(\rho, \rho; \epsilon)] = -\frac{1}{\rho J_{m_j}^{ad}(\epsilon)} \left( d_{m_j}^0(\rho) a_{m_j}^\infty(\rho) + a_{m_j}^0(\rho) d_{m_j}^\infty(\rho) \right) + \frac{1}{\rho J_{m_j}^{bc}(\epsilon)} \left( c_{m_j}^0(\rho) b_{m_j}^\infty(\rho) + b_{m_j}^0(\rho) c_{m_j}^\infty(\rho) \right) \quad (32)$$

где  $J_{m_j}^s(\epsilon)$  — вронскианы для систем (22-23),

$$J_{m_j}^{ad}(\epsilon) = (d^0(\rho)a^\infty(\rho) - a^0(\rho)d^\infty(\rho)) , \quad J_{m_j}^{bc}(\epsilon) = (c^0(\rho)b^\infty(\rho) - b^0(\rho)c^\infty(\rho)) , \quad (33)$$

которые обеспечивает правильную нормировку соответствующих функций Грина.

В результате после разворота Фейнмановского контура на мнимую ось окончательные выражения для вакуумных плотностей заряда и тока будут иметь вид

$$\rho_{VP}(\rho) = \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \rho_{VP, |m_j|}(\rho) , \quad \rho_{VP, |m_j|}(\rho) = \frac{|e|}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Re} [\operatorname{Tr} G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)] , \quad (34)$$

$$\operatorname{Tr} G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy) = \operatorname{Tr} G_{m_j}(\rho, \rho; iy) + \operatorname{Tr} G_{-m_j}(\rho, \rho; iy) , \quad (35)$$

$$\mathbf{j}_{VP}(\rho) = \mathbf{e}_\varphi j_{VP, \varphi}(\rho) , \quad j_{VP, \varphi}(\rho) = \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} j_{VP, |m_j|}(\rho) , \quad (36)$$

$$j_{VP, |m_j|}(\rho) = \frac{|e|}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Re} [\operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)]] , \quad (37)$$

$$\operatorname{Tr} \alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy) = \operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}(\rho, \rho; iy)] + \operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{-m_j}(\rho, \rho; iy)] . \quad (38)$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с  $-1 \leq \epsilon_n < 0$  получим

$$\rho_{VP, |m_j|}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi} \left[ \sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_{n, m_j}(\rho)^\dagger \psi_{n, m_j}(\rho) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Re} [\operatorname{Tr} G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)] \right] , \quad (39)$$

$$j_{VP, |m_j|}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi} \left[ \sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_{n, m_j}(\rho)^\dagger A \psi_{n, m_j}(\rho) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Re} [\operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)]] \right] . \quad (40)$$

При выводе соотношений (34)-(40) существенную роль играют общие свойства функции Грина при комплексном сопряжении

$$G_{m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; \epsilon)^* = G_{m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; \epsilon^*) , \quad (41)$$

а также свойства её следов при смене знаков внешних полей ( $Q \rightarrow -Q, \mu \rightarrow -\mu$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} G_{m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; \epsilon) &= -\operatorname{Tr} G_{m_j}(-Q, \mu; \rho, \rho; -\epsilon) , \\ \operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{-m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; \epsilon)] &= -\operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}(Q, -\mu; \rho, \rho; \epsilon)] . \end{aligned} \quad (42)$$

Из этих свойств ф. Грина вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} G_{m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; iy)^* &= -\operatorname{Tr} G_{m_j}(-Q, \mu; \rho, \rho; iy) \\ \operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}(Q, \mu; \rho, \rho; iy)]^* &= \operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{-m_j}(-Q, -\mu; \rho, \rho; iy)] . \end{aligned} \quad (43)$$

В то же время, по теореме Фарри индуцированные плотности заряда и тока являются нечетными функциями внешних полей, откуда следует, что  $\rho_{VP, |m_j|}(\rho)$  и  $j_{VP, |m_j|}(\rho)$  определяются только через  $\operatorname{Re} [\operatorname{Tr} G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)]$  и  $\operatorname{Re} [\operatorname{Tr} [\alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)]]$

соответственно и поэтому являются заведомо действительными величинами, что и было сразу учтено в (34)–(40).

Поскольку вакуумные плотности заряда и тока представляется в виде бесконечных сумм по  $m_j$ , возника-

ет вопрос о сходимости этих сумм. Для планарного случая вопрос о перенормировке вакуумной плотности заряда в отсутствие магнитного поля подробно рассматривался в [8, 9, 24, 25]. Вследствие того, что затравочный вектор-потенциал при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$  ведет себя как  $A_\varphi^{ext} \sim \rho$  и  $A_\varphi^{ext} \sim 1/\rho^2$  соответственно, асимптотики решений систем (22)-(23), а значит, и асимптотики  $\text{Tr}G_{m_j}$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $|m_j| \rightarrow \infty$  совпа-

дают с асимптотиками соответствующих решений при отсутствии магнитного поля. Из этого факта следует, что в рассматриваемой задаче перенормировку вакуумной плотности заряда необходимо выполнять по той же схеме, что и в рассмотренных ранее задачах без магнитного поля. А именно, сначала вводим  $\rho_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho)$  через соотношение

$$\rho_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi} \left[ \sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_{n,m_j}(\rho)^\dagger \psi_{n,m_j}(\rho) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \text{Re} \left[ \text{Tr} G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy) - 2\text{Tr} G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy) \right] \right]. \quad (44)$$

$\rho_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho)$  не содержит линейных по внешнему кулоновскому потенциалу членов. Это обеспечивается тем, что  $G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)$  является компонентой парциальной функции Грина  $G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)$ , линейной по  $Q$ , и находится из первого борновского приближения для  $G_{|m_j|}$

$$G_{\pm m_j}^{(1)} = Q \left( \frac{\partial G_{|m_j|}}{\partial Q} \right) \Big|_{Q=0}, \quad (45)$$

либо непосредственно через предел  $Q \rightarrow 0$  в  $G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)$ .

Явное выражение для  $\text{Re} \left[ \text{Tr} G_{\pm m_j}^{(1)}(\rho; iy) \right]$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ \text{Tr} G_{\pm m_j}^{(1)}(\rho; iy) \right] = & - \left[ 2K_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho) \int_0^\rho d\rho' \rho' V(\rho') \left( (1-y^2) I_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') + (1+y^2) I_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') \right) + \right. \\ & 2K_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho) \int_0^\rho d\rho' \rho' V(\rho') \left( (1-y^2) I_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') + (1+y^2) I_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') \right) + \\ & + 2I_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho) \int_\rho^\infty d\rho' \rho' V(\rho') \left( (1-y^2) K_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') + (1+y^2) K_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') \right) + \\ & \left. + 2I_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho) \int_\rho^\infty d\rho' \rho' V(\rho') \left( (1-y^2) K_{|m_j+1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') + (1+y^2) K_{|m_j-1/2|}^2(\tilde{\gamma}\rho') \right) \right], \quad (46) \end{aligned}$$

здесь и далее  $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+y^2}$ , после чего перенормировка вакуумной плотности заряда производится через замену линейного члена на перенормированную плотность  $\rho_{VP}^{(1)}(\rho)$ , которая находится из выражения (14)

$$\rho_{VP}^{ren}(\rho) = \rho_{VP}^{(1)}(\rho) + \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \rho_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho). \quad (47)$$

Общие свойства вакуумной плотности заряда аналогичны таковым в задачах без магнитного поля (см. [8, 9, 24, 25] и цитируемую там литературу). Выражение (47) гарантирует обращение в нуль полного вакуумного заряда  $Q_{VP}^{ren} = \int d^2\rho \rho_{VP}^{ren}(\rho)$  при  $Z < Z_{cr,1}$ . Член  $Q_{VP}^{(1)} = \int d^2\rho \rho_{VP}^{(1)}(\rho)$  исчезает как

эффект первого порядка теории возмущений (более подробно этот вопрос рассмотрен в [24]), а в исчезновении вклада от  $\rho_{VP,|m_j|}^{(3+)}(r)$  в  $Q_{VP}^{ren}$  можно убедиться прямой численной проверкой. Изменение  $Q_{VP}^{ren}$  может происходить только при  $Z > Z_{cr,1}$  за счет погружения дискретных уровней  $\psi_{\epsilon, m_j}$  в нижний континуум. При этом каждый опустившийся уровень изменяет интегральный заряд вакуума на  $(-|e|)$ , а зарядовая плотность  $\rho_{VP}^{ren}(\rho)$  при этом меняется следующим образом [30, 31]

$$\Delta \rho_{VP}^{ren}(\rho) = -|e| \psi_{\epsilon=-1, m_j}(\rho)^\dagger \psi_{\epsilon=-1, m_j}(\rho). \quad (48)$$

Перенормировка вакуумной плотности тока выпол-

няется полностью аналогично перенормировке вакуумной плотности заряда. Для вычисления перенормированной плотности тока необходимо выделить в выражении для  $\text{Tr} [\alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)]$  линейные по  $\mu$  члены и заменить их на перенормированную пертурбативную плотность  $j_{VP}^{(1)}(\rho)$ , которая соответствует первому по-

рядку теории возмущений и в рассматриваемом случае диполя отлична от нуля только для  $|m_j| = 1/2$ . Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности  $j_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho)$ , которая определяется следующим образом:

$$j_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho) = \frac{|e|}{2\pi} \left[ \sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_{n,m_j}(\rho)^\dagger A \psi_{n,m_j}(\rho) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \text{Re} \left( \text{Tr} [\alpha_\varphi G_{|m_j|}(\rho, \rho; iy)] - 2\text{Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)] \right) \right], \quad (49)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Явное выражение для  $\text{Re} \left[ \text{Tr} [\alpha_\varphi G_{\pm m_j}^{(1)}(\rho; iy)] \right]$  имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ \text{Tr} [\alpha_\varphi G_{\pm m_j}^{(1)}(\rho; iy)] \right] &= \\ &= 8|e| (1 + y^2) \left[ K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}\rho) K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}\rho) \int_0^\rho d\rho' \rho' A_\varphi(\rho') I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}\rho') I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}\rho') + \right. \\ &\quad \left. + I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}\rho) I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}\rho) \int_\rho^\infty d\rho' \rho' A_\varphi(\rho') K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}\rho') K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}\rho') \right]. \quad (51) \end{aligned}$$

В результате перенормированная вакуумная плотность тока принимает вид

$$\mathbf{j}_{VP}^{ren}(\rho) = \mathbf{e}_\varphi j_{VP,\varphi}^{ren}(\rho), \quad j_{VP,\varphi}^{ren}(\rho) = j_{VP}^{(1)}(\rho) + \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} j_{VP,|m_j|}^{(3+)}(\rho). \quad (52)$$

### 3. ИНДУЦИРОВАННЫЙ АКСИАЛЬНЫЙ ТОК В ГРАФЕНЕ

Теперь — после общего теоретико-полевого анализа — перейдем к представляющему наибольший интерес случаю двумерных кристаллов типа графена. Поведение носителей заряда в графене описывается 2+1-мерным безмассовым (или массивным, если рассматривается графен на подложке) УД, в котором роль скорости света  $c$  играет скорость Ферми  $v_F$ . В данной работе мы ограничимся последним случаем графена на подложке. Эффективная постоянная тонкой структуры при этом находится следующим образом

$$\alpha = e^2 / (\hbar v_F \epsilon_{eff}), \quad \epsilon_{eff} = (\epsilon + 1) / 2, \quad (53)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость подложки, а  $v_F = 3ta/2\hbar$  — скорость Ферми в графене. В по-

следнем выражении  $a \simeq 1.42 \text{ \AA}$  — расстояние между ближайшими атомами углерода в кристаллической решётке графена,  $t$  — параметр перескока (интеграл перекрытия между волновыми функциями ближайших соседей решётки), а  $\lambda_c = \hbar/mv_F$  — эффективная комптоновская длина волны [32]. Здесь  $m$  — эффективная масса электронов и дырок в графене, которая связана с шириной энергетической щели в приближении сильной связи соотношением  $\Delta = 2mv_F^2$ . Эти определения приводят к соотношению  $\lambda_c/a \simeq 3t/\Delta$ . Все численные расчёты в данной работе были проведены для  $\alpha = 0.4$  и  $\Delta = 0.26 \text{ эВ}$  (что соответствует графену на подложке SiC [4]) и зарядом источника внешнего кулоновского поля (заряженной примеси)  $Z = 10$ . При этом радиус источника выбирается равным  $R_0 = 2a$ , а параметр экранировки  $\sigma = 1$ . Такое обрезание кулоновского поля на малых расстояниях ранее использовалось в [4].



В используемой нами системе единиц расстояние измеряется в единицах  $\lambda_c$ , а энергия — в единицах  $mv_F^2$ , при этом для подложки SiC имеем  $R_0 = 1/15$ .

В первую очередь необходимо выяснить, для каких значений параметров затравочного тока  $\lambda$  и  $\mu$  реализуется самосогласованный режим по току. Для этого по этим параметрам строилась сетка, для каждой точки которой проводился численный расчёт индуцированной вакуумной плотности тока и соответствующего этому току вектор-потенциала. В качестве численного параметра, характеризующего степень близости индуцированного и затравочного токов и вектор-потенциалов, использовалось отношение интегральных индуцированного  $\mu_{VP}$  и затравочного  $\mu$  дипольных магнитных моментов, которые связаны с соответствующими токами соотношением (3). На рис. 2 приведены результаты расчёта этого отношения для рассматриваемого случая  $\alpha = 0.4$ ,  $Z = 10$  и  $R_0 = 1/15$ .

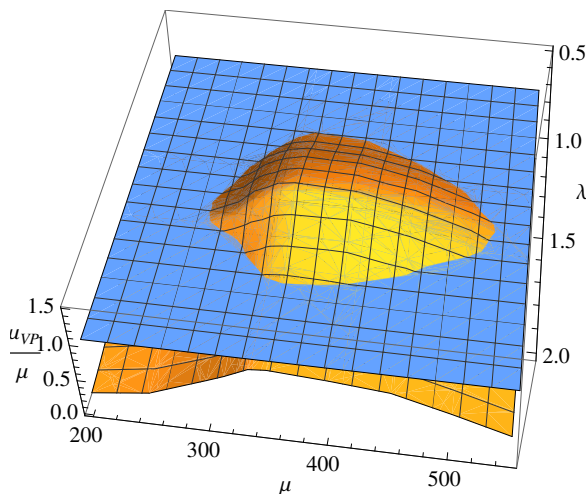


Рис. 2: Отношение магнитного момента индуцированного тока к магнитному моменту затравочного тока при  $Z = 10$  для  $\alpha = 0.4$  и  $R_0 = 1/15$

Рис. 2 наглядно демонстрирует, что для таких внешних параметров существует целое множество значений  $\lambda$  и  $\mu$ , при которых возможен самосогласованный режим. Весьма интересно поведение индуцированного вакуумного тока и соответствующего ему вектор-потенциала с ростом магнитного момента затравочного тока  $\mu$  при фиксированном значении параметра  $\lambda$ . Сначала отношение магнитного момента индуцированного тока к магнитному моменту затравочного  $\mu_{VP}/\mu$  монотонно растёт с ростом  $\mu$ , пока  $\mu$  не достигнет определённого «критического» значения  $\mu_{cr}$ , зависящего от значения  $\lambda$ . После превышения параметром  $\mu$  этого значения отношение  $\mu_{VP}/\mu$  начинает с ростом  $\mu$  убывать.

Такое поведение индуцированного тока объясняется поведением дискретных уровней с изменением  $\mu$ . На рис. 3а) и 3б) продемонстрировано поведение дискретных уровней в канале  $|m_j| = 1/2$  для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,

$R_0 = 1/15$  и  $\lambda = 1.583$  в определённом диапазоне изменения параметра  $\mu$  вблизи «критического» значения  $322 < \mu_{cr} < 323$ , при котором поведение отношения  $\mu_{VP}/\mu$  меняется. При  $\mu < \mu_{cr}$  рост  $\mu$  приводит к увеличению числа опустившихся в нижний континуум дискретных уровней, а при  $\mu > \mu_{cr}$  — всё наоборот. Этим и объясняется поведение отношения  $\mu_{VP}/\mu$  с ростом  $\mu$ . Отметим, что для значений параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , при которых реализуется самосогласованный режим, полное число опустившихся в нижний континуум дискретных уровней оказывается существенно больше, чем при отсутствии магнитного поля. В таблице I приведено для сравнения распределение числа достигших нижнего континуума дискретных уровней для  $Z = 10$  и  $R_0 = 1/15$  при отсутствии магнитного поля (т.е. только за счет воздействия кулоновского сверхкритического потенциала) и при его наличии для значений  $\lambda = 1.583$  и  $\mu = 322.37$ .

Таблица I: Распределение числа достигших нижнего континуума дискретных уровней для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$ ,  $\lambda = 1.583$  и  $\mu = 322.37$

$m_j$	1/2	3/2	5/2	7/2
Число упавших уровней ( $A_\varphi = 0$ )	12	10	6	0
Число упавших уровней ( $A_\varphi \neq 0$ )	19	14	10	1

На рис. 4,а и 4,б продемонстрировано скачкообразное изменение вакуумной плотности заряда и вакуумной плотности тока, рассматриваемых как функции  $\mu$ , при опускании дискретного уровня в нижний континуум. Для большей наглядности приведены только (3+)-компоненты плотностей, поскольку эффект полностью непертурбативен и поэтому проявляется прежде всего здесь. При этом интегральный вакуумный заряд  $Q_{VP}^{ren} = \int d^2r \rho_{VP}^{ren}(r)$  изменяется на  $(-|e|)$ , что подтверждается численной проверкой.

Предположение о том, что основной вклад в наблюдаемый эффект дают опустившиеся в нижний континуум дискретные уровни, можно проверить следующим образом. Для каждого дискретного уровня, достигшего нижнего континуума, вычисляем порождаемый им вакуумный ток (волновые функции берутся при  $\epsilon = -1$ ). Затем суммируем все полученные токи и вычисляем вектор-потенциал, соответствующий этой сумме. На рис. 5,а приведен результат этой процедуры для  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$ ,  $\lambda = 1.583$  и  $\mu = 322.37$ . Для сравнения на том же графике приведён индуцированный вакуумом вектор-потенциал для тех же значений параметров  $\lambda$  и  $\mu$ . На рис. 5,б приведены индуцированный вакуумный вектор-потенциал и соответствующий сумме токов вектор-потенциал, умноженный на множитель  $\simeq 1.65$ . Рис. 5,а и 5,б показывает, что вектор-потенциал, соответствующий сумме токов, порождаемых достигающими нижнего континуума уровнями, и индуцированный вектор-потенциал чрезвычайно близки по форме, а отличаются только по ам-

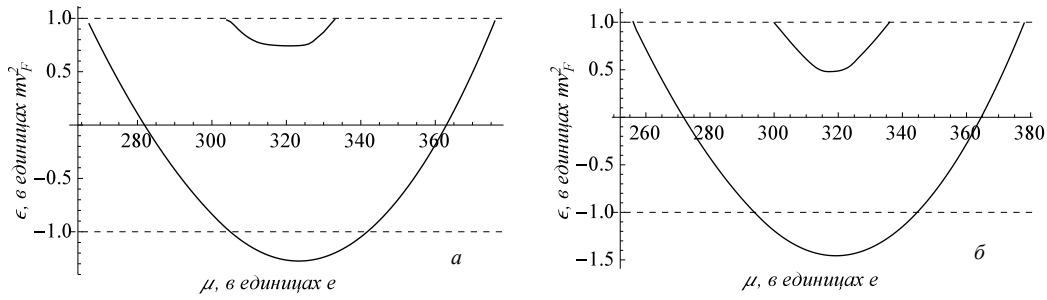


Рис. 3: Поведение дискретных уровней с изменением  $\mu$  в окрестности  $\mu_{cr}$  для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$  и  $\lambda = 1.583$ : а — ад-подсистема,  $m_j = 1/2$ ; б — bc-подсистема,  $m_j = -1/2$

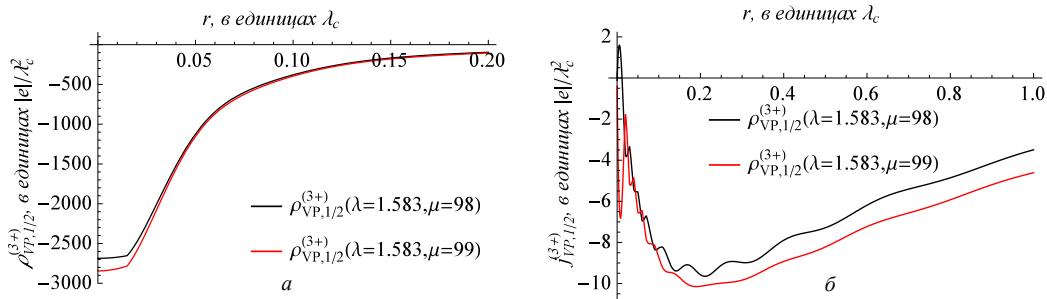


Рис. 4: Скачки в вакуумной плотности заряда и вакуумной плотности тока при достижении дискретным уровнем нижнего континуума для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$ ,  $\lambda = 1.583$  и изменении  $\mu$

плитуде. Соответствующие величины приведены также в табл. II для нескольких различных значений  $r$ .

#### 4. ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ: ОБЩИЕ СВОЙСТВА, МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

Исходное выражение для вакуумной энергии имеет вид, аналогичный вакуумным плотностям заряда

и тока, с той разницей, что энергию необходимо дополнительно нормировать на случай свободного поля, тогда как в соответствующих выражениях для заряда и тока этого не требуется (более детально этот вопрос разбирается в [22, 30, 33])

$$\mathcal{E}_{VP} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \right)_A - \frac{1}{2} \left( \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \right)_0, \quad (54)$$

где  $\epsilon_F$  - энергия Ферми ( $\epsilon_F = -1$ ),  $\epsilon_n$  - собственные значения соответствующей спектральной задачи для УД.

Поскольку в рассматриваемой задаче аналитические решения систем дифференциальных уравнений получить не удастся, вычислить энергию поляризации вакуума путём представления в виде суммы интегралов от фаз парциального рассеяния [34–36] и дискретного спектра не представляется возможным. Однако можно воспользоваться методом вронскиана, который подробно описан в [26, 27]. В рамках этого метода вакуумная энергия вычисляется следующим образом

$$\mathcal{E}_{VP} = \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \mathcal{E}_{VP, |m_j|}, \quad (55)$$

$$\mathcal{E}_{VP, |m_j|} = \sum_{s=ad, bc} \sum_{m_j = \pm |m_j|} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \operatorname{Re} \left[ \frac{y}{J_{m_j}^s(iy)} \frac{dJ_{m_j}^s(iy)}{dy} - \left( \frac{y}{J_{m_j}^s(iy)} \frac{dJ_{m_j}^s(iy)}{dy} \right) \Big|_{free} \right] - \sum_{-1 \leq \epsilon_{n, m_j}^s < 0} \epsilon_{n, m_j}^s, \quad (56)$$

Таблица II: Сравнение затравочного, полного индуцированного и соответствующего сумме токов, создаваемых опустившимися в нижний континуум дискретными уровнями, вектор-потенциалов для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$ ,  $\lambda = 1.583$  и  $\mu = 322.37$

$r$	1	2	5	10	15	20	30	40	50	100
$A_\varphi(r)$	-0.7541	-1.1510	-1.4723	-1.2357	-0.9192	-0.6746	-0.3774	-0.22729	-0.14694	-0.03418
$A_{VP,\varphi}^{ren}(r)$	-0.7549	-1.1521	-1.4733	-1.2363	-0.9198	-0.6750	-0.3775	-0.22731	-0.14693	-0.03417
$1.6482 \times A_{DivedLevels}(r)$	-0.7536	-1.1503	-1.4717	-1.2352	-0.9188	-0.6743	-0.3773	-0.22730	-0.14694	-0.03417

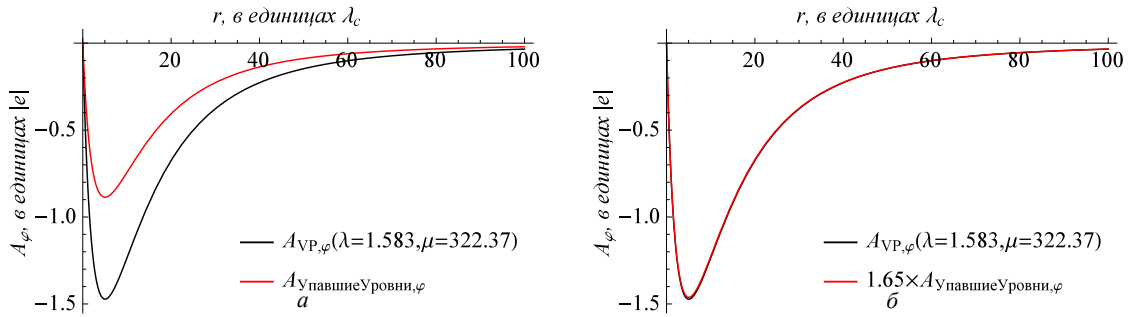


Рис. 5: Сравнение вектор-потенциала, соответствующего сумме токов, порождаемых достигающими нижнего континуума уровнями, с полным индуцированным в вакууме в самосогласованном режиме вектор-потенциалом для  $Z = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $R_0 = 1/15$ ,  $\lambda = 1.583$  и  $\mu = 322.37$

где  $J_{m_j}^s(iy)$  — вронскианы для соответствующей системы (ad- или bc-), определенные ранее при построении ф.Грина в (33).

Поскольку  $\mathcal{E}_{VP}$ , также как  $\rho_{VP}$  и  $j_{VP}$ , представляется в виде бесконечного ряда по  $m_j$ , необходимо исследовать вопрос о его сходимости. В работах [9, 25] было показано, что в задаче без магнитного поля ряд по  $m_j$  расходится линейно. Далее на основе модельно-независимых аргументов было доказано, что устранение этой расходимости должно проходить по тем же правилам, что и в теории возмущений, на основе регу-

ляризации фермионной петли с двумя внешними концами. При этом процедура перенормировки аналогична перенормировке  $\rho_{VP}$ , только вместо линейных по  $Z$  выделяются квадратичные по  $Z$  члены. Повторяя те же рассуждения для рассматриваемой задачи и учитывая, что для неё вакуумная энергия в первом порядке теории возмущений является суммой двух членов, квадратичных по  $Z$  и  $\mu$  соответственно, приходим к выводу, что перенормировка вакуумной энергии должна выполняться посредством соотношения:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{VP,|m_j|}^{ren} = & \sum_{m_j=\pm|m_j|} \left( \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty dy \operatorname{Re} \left[ \sum_{s=ad,bc} \left( \frac{y}{J_{m_j}^s(iy)} \frac{dJ_{m_j}^s(iy)}{dy} \Big|_A - \frac{y}{J_{m_j}^s(iy)} \frac{dJ_{m_j}^s(iy)}{dy} \Big|_0 \right) \right] + \right. \\
 & \left. + (|e|/4\pi) \int d^2\rho A_\varphi(\rho) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[ \alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy) \right] \right\} - \sum_{s=ad,bc} \sum_{-1 \leq \epsilon_{n,m_j} < 0} \epsilon_{n,m_j}^s \Big) + \\
 & + (\eta_{PT,el} \delta_{|m_j|,1/2} - \eta_{B,el,|m_j|}) Z^2 + \eta_{PT,el} \mu^2. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Отметим, что выражение

$$(|e|/2) \int d^2\rho A_\varphi(\rho) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[ \alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy) \right]$$

нельзя вынести из-под знака интегрирования по  $y$ , поскольку его асимптотика при  $y \rightarrow \infty$  содержит член

$\sim 1/y$ . Чтобы оценить эту асимптотику, аппроксимируем вектор-потенциал следующей функцией, асимптотики которой при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$  совпадают с асимптотиками (5):

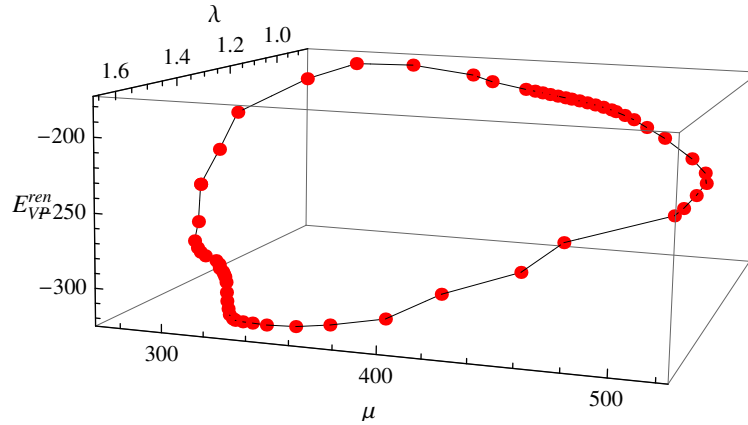


Рис. 6: Перенормированная вакуумная энергия при различных значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , реализующих самосогласованный режим, для графена на подложке SiC  $\alpha = 0.4$  и  $R_0 = 1/15$

$$A_\varphi(\rho) = \begin{cases} C\rho/\rho_1 & \rho \leq \rho_1 \\ C & \rho_1 < \rho < \rho_2 \\ C\rho_2^2/\rho^2 & \rho \geq \rho_2 \end{cases} \quad (58)$$

После подстановки (58) в (51) интегралы в полученном выражении вычисляются аналитически. Подставляя полученный результат в  $(|e|/2) \int d^2\rho A_\varphi(\rho) \text{Re Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)]$ , можно найти асимптотику этого выражения при  $y \rightarrow \infty$

$$\frac{|e|}{2} \int d^2\rho A_\varphi(\rho) \text{Re} [\text{Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)]] \rightarrow \frac{4\pi\alpha C^2}{3y} (2\rho_2 - \rho_1) + O(y^{-2}). \quad (59)$$

Численный анализ асимптотики по  $y$  в интеграле, входящем в выражение (57), показывает, что в результате вычитания  $(|e|/2) \int d^2\rho A_\varphi(\rho) \text{Re Tr} [\alpha_\varphi G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)]$  под знаком интеграла члены порядка  $1/y$  сокращаются, что обеспечивает сходимость интеграла.

Входящие в выражение (57) перенормировочные коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\eta_{B,el,|m_j|} = \frac{|e|}{2\pi} \int d^2\rho \frac{A_0(\rho)}{Z} \int_0^\infty dy \text{Re} [\text{Tr} G_{m_j}^{(1)}(\rho; iy)], \quad (60)$$

$$\eta_{PT,el} = \mathcal{E}_{VP,el}^{(1)}(Z)/Z^2,$$

$$\eta_{PT,el} = \mathcal{E}_{VP,mag}^{(1)}(\mu)/\mu^2. \quad (61)$$

Результаты расчёта вакуумной энергии при  $Z = 10$  и значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , реализующих самосогласованный режим, приведены на рис. 6. Основным результатом является наличие минимума вакуумной энергии при  $\lambda = 1.583$  и  $\mu =$

322.37. При этом соответствующее значение вакуумной энергии ( $\mathcal{E}_{VP}^{ren} = -322.568$ ) оказывается существенно меньше, чем при отсутствии магнитного поля ( $\mathcal{E}_{VP}^{ren} = -227.963$ ). Таким образом, состояние такой КЭД-системы с самосогласованным магнитным полем является энергетически более выгодным, чем без него. Этот факт доказывает возможность спонтанной генерации магнитного поля в рассматриваемом случае графена на подложке SiC.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в этой работе еще раз продемонстрировано, насколько нелинейными являются эффекты поляризации вакуума в планарных КЭД-системах со сверхкритическим кулоновским источником. Особого внимания заслуживает поведение вакуумной энергии, которая, как было показано в работах [9, 25] для планарной КЭД-системы типа графена с заряженной примесью, в закритической области убывает как  $\sim -|\eta Z^3|$ , что обусловлено образованием вакуумных оболочек за счёт опускания дискретных уровней в нижний континуум. За счёт столь быстрого убывания вакуумная энергия достаточно быстро становится сравнима с собственной энергией кулоновского источника. Всё это говорит о том, что в закритической области следует ожидать появления новых существенно нелинейных эффектов. Один из таких эффектов — спонтанная генерация аксиального вакуумного тока и магнитного диполя — и был рассмотрен в данной работе.

Важно отметить, что рассмотренный эффект является не чем иным, как примером спонтанного нарушения симметрии. При отсутствии магнитного поля все дискретные уровни являются двукратно вырожденными по  $\pm m_j$ . Поэтому при опускании такого двукратно вырожденного дискретного уровня в нижний континуум аксиальный вакуумный ток не возникает. В то же время, магнитное поле эту симметрию нарушает. Как по-

казано в данной работе, для планарной КЭД-системы с эффективной константой связи  $\alpha = 0.4$  и сверхкритическим кулоновским источником с зарядом  $Z = 10$  и радиусом  $R_0 = 1/15$  возникает энергетически более выгодное состояние, в котором симметрия нарушается за счёт возникновения самосогласованного магнитного поля дипольного типа, которое расщепляет уровни по знаку  $m_j$ . Дипольный момент вакуумного магнитного поля при этом может быть весьма значительным. В энергетическом минимуме  $\mu_{VP} \simeq \mu = 322.37$ , что в обычных единицах означает  $\mu_{VP} \simeq 645 \mu_B$ . Следует также отметить, что при этом степень пространственной локализации вакуумного тока и магнитного диполя, как и у затравочного тока (2), оценивается как  $\sim \rho e^{-\lambda\sqrt{\rho}}$ , т.е. они являются в значительно большей степени распределенными по всему объему системы, чем при чисто экспоненциальном убывании. Такое же пространственное распределение характерно и для ва-

куумной плотности заряда. Вопрос о том, насколько реалистично такое состояние со спонтанной генерацией вакуумных тока и магнитного диполя в планарных КЭД-системах типа графена на подложке, будет рассмотрен отдельно.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору П. К. Силаеву и старшему научному сотруднику О. В. Павловскому физического факультета МГУ за ценные замечания и советы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-01261) и научных тем МинОбрНауки РФ (проекты 01-2014-63889, А16-116021760047-5).

- 
- [1] *Katsnelson M. I.* // Phys. Rev. B. 2006. **74**. 201401.  
 [2] *Shytov A. V., Katsnelson M. I., Levitov L. S.* // Phys. Rev. Lett. 2007. **99**. 236801.  
 [3] *Kotov V. N., Pereira V. M., Uchoa B.* // Phys. Rev. B. 2008. **78**. 075433.  
 [4] *Pereira V. M., Kotov V. N., Castro Neto A. H.* // Phys. Rev. B. 2008. **78**. 085101.  
 [5] *Wang Y., Wong D., Shytov A. V., Brar V. W., Choi S., Wu Q., Tsai H.-Z., Regan W., Zettl A., Kawakami R. K.* et al. // Science. 2013. **340**. 734.  
 [6] *Nishida Y.* // Phys. Rev. B. 2014. **90**. 165414.  
 [7] *Khalilov V. R., Mamsurov I. V.* // Phys. Lett. B. 2017. **769**. 152.  
 [8] *Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A.* // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2019. **106**. 298.  
 [9] *Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A.* // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2019. **109**. 209.  
 [10] *Bubnov A. F., Gubina N. V., Zhukovsky V. C.* // Phys. Rev. D. 2017. **96**. 016011.  
 [11] *Khalilov V. R., Mamsurov I. V.* // Eur. Phys. J. C. 2015. **75**. 167.  
 [12] *Gornicki P.* // Ann. Phys. 1990. **202**. 271.  
 [13] *Milstein A. I., Terekhov I. S.* // Phys. Rev. B. 2011. **83**. 075420.  
 [14] *Jackiw R., Milstein A. I., Pi S.-Y., Terekhov I. S.* // Phys. Rev. B. 2009. **80**. 033413.  
 [15] *Khalilov V. R., Lee K. E.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2012. **27**. 1250169.  
 [16] *Khalilov V.* // Eur. Phys. J. C. 2013. **73**. 2548.  
 [17] *Khalilov V.* // Eur. Phys. J. C. 2014. **74**. 3061.  
 [18] *Wichmann E. H., Kroll N. M.* // Phys. Rev. 1956. **101**. 843.  
 [19] *Reitz J. R., Mayer F. J.* // J. Math. Phys. 2000. **41**. 4572.  
 [20] *Skokov V. V., Illarionov A., Toneev V. D.* // Int. Journ. Mod. Phys. A. 2009. **24**. 5925.  
 [21] *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2017. **32**. 1750054.  
 [22] *Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K.* // Theor. Math. Phys. 2017. **193**. 1647.  
 [23] *Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. **14**. 698.  
 [24] *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2018. **33**. 1850004.  
 [25] *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2018. **33**. 1850005.  
 [26] *Voronina Y., Komissarov I., Sveshnikov K.* // Ann. Phys. 2019. **404**. 132.  
 [27] *Voronina Y., Komissarov I., Sveshnikov K.* // Phys. Rev. A. 2019. **99**. 062504.  
 [28] *Gyulassy M.* // Nucl. Phys. A. 1975. **244**. 497.  
 [29] *Mohr P. J., Plunien G., Soff G.* // Phys. Rep. 1998. **293**. 227.  
 [30] *Greiner W., Reinhardt J.* // Quantum Electrodynamics. 4th ed. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009).  
 [31] *Fano U.* // Phys. Rev. 1961. **124**. 1866.  
 [32] *Goerbig M. O.* // Rev. Mod. Phys. 2011. **83**. 1193.  
 [33] *Plunien G., Muller B., Greiner W.* // Phys. Rep. 1986. **134**. 87.  
 [34] *Rajaraman R.* // Solitons and Instantons. 1st ed. (North-Holland Publishing Company. 1982).  
 [35] *Sveshnikov K.* // Phys. Lett. B. 1991. **255**. 255.  
 [36] *Sundberg P., Jaffe R. L.* // Ann. Phys. 2004. **309**. 442.
-

## Spontaneous generation of magnetic vacuum effects by supercritical Coulomb source in planar QED

P. A. Grashin<sup>a</sup>, K. A. Sveshnikov<sup>b</sup>

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

E-mail: <sup>a</sup>grashin.petr@physics.msu.ru, <sup>b</sup>costa@bog.msu.ru

The effect of spontaneous generation of the self-consistent axial-symmetric vacuum current and dipole-type magnetic field for graphene-type planar electron-positron system and graphene-type heterostructures with external supercritical extended Coulomb source with charge  $Z$  is considered. It is shown that the main contribution to this effect comes from discrete levels diving into the lower continuum. The form of induced vacuum magnetic field is explored in detail. It is also shown that the magnetic component of vacuum polarization arising in such a way decreases the Casimir (vacuum) energy of the system significantly and therefore can arise spontaneously.

PACS: 12.20.Ds, 31.30.J-, 31.30.jf, 81.05.ue.

*Keywords:* planar QED, vacuum polarization, graphene and graphene-based heterostructures, vacuum charge density, vacuum current density, Casimir (vacuum) energy.

*Received 19 June 2019.*

### Сведения об авторах

1. Грашин Петр Анатольевич — аспирант; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: grashin.petr@physics.msu.ru.
  2. Свешников Константин Алексеевич — профессор, докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: costa@bog.msu.ru.
-