

Исследование скорости перемешивания в цепи Чуа

А. С. Трифонов* О. Я. Бутковский†

Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Институт прикладной математики, физики и информатики, кафедра физики и прикладной математики
Россия, 600014, Владимир, ул. Белоконской, д.3/7
(Статья поступила 29.05.2019; Подписана в печать 25.09.2019)

В работе рассмотрено явление перемешивания в динамических моделях с хаотическим поведением: базовой модели лазерной динамики с помощью модели Лоренца-Хакена и модели простейшей электрической цепи, демонстрирующей режимы хаотических колебаний — модель Чуа. Исследовалась связь степени перемешивания и управляющего параметра. Показан рост степени перемешивания с ростом управляющего параметра. С помощью реализованного алгоритма в системе Matlab проведены исследования с целью установления связи динамики величины степени перемешивания в точках бифуркаций, которые по Хакену соответствуют фазовым переходам.

PACS: 05.45.-a

УДК: 531.39

Ключевые слова: перемешивание, аттрактор, фазовое пространство, фазовый переход, бифуркация.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из малоизученных явлений в динамике систем с хаотическим поведением является явление перемешивания в фазовом пространстве. В работах [1, 2] на основе разработанных алгоритмов вычисления локальной степени перемешивания и скорости перемешивания была показана связь степени перемешивания с временем предсказуемости и степенью хаотичности.

Интуитивно ясное явление перемешивания почти никак не поддается аналитическому анализу для хаотических систем, интересных с точки зрения физики. Существующие результаты по оценке скорости перемешивания [3] предоставляют возможность установить локальную скорость перемешивания (а также связать ее с ляпуновскими показателями) только лишь для определенных классов дискретных отображений [4]. Учитывая результаты по оценке средней скорости перемешивания, можно сделать вывод о том, что время предсказуемости зависит не только от ляпуновских показателей, но и от локальной скорости перемешивания в системе [2]. При этом, не смотря на некоторые опубликованные работы (например, [6]), аналитический расчёт скорости перемешивания для более широких классов динамических систем (к примеру, задаваемых в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений) является задачей, долгой от завершения.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИ ПОНЯТИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Математически понятие перемешивания, можно определить, как это сделано в работе [2]. Для это-

го рассмотрим аттрактор G некоторой хаотической системы, на котором задан оператор эволюции системы $S(G)$ и инвариантная мера μ . Выберем на аттракторе G две произвольные области B и W . Отношение меры точек из области B , которые через n итераций оператора эволюции S попали в область W по отношению к мере самой области W можно записать следующим образом:

$$D_n = \frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)}.$$

Оператор S является перемешивающим, если при $n \rightarrow \infty$ значение D_n не зависит от конкретного выбора области W а определяется отношением $\mu(B)/\mu(G)$.

В этой статье представлена оценка скорости перемешивания для системы Чуа при изменяемых значениях одного из двух управляющих параметров (второй фиксируется постоянным для упрощения расчётов). Для моделирования скорости перемешивания в фазовом пространстве мы воспользуемся формулой (подробный вывод формулы описан в статье Логунова М. Ю. [2]):

$$\frac{dM}{dt} = (1 - M(t))K,$$

здесь K — значение первой производной $M(t)$ в нуле.

Экспоненциальная скорость роста $M(t)$ в этом случае характеризуется параметром K , который определяет среднюю за время T скорость перемешивания.

1.1. Динамика средней степени перемешивания в системе Лоренца-Хакена

Для проверки реализованного алгоритма рассматривается явление перемешивания для модельной системы Лоренца-Хакена. Исследовалась связь скорости перемешивания и управляющего параметра, связанного с накачкой. Показан рост степени перемешивания с ростом накачки. Получено, что на зависимости кривой

*E-mail: Antrser@yandex.ru

†E-mail: oybutkovskiy@fa.ru

скорость перемешивания — уровень накачки наблюдается провал в области начала генерации, что соответствует по Г.Хакену фазовому переходу в лазерах (рис. 1). Более подробно о процессе моделирования данной зависимости можно ознакомиться в статье Трифонова А. С. [5].

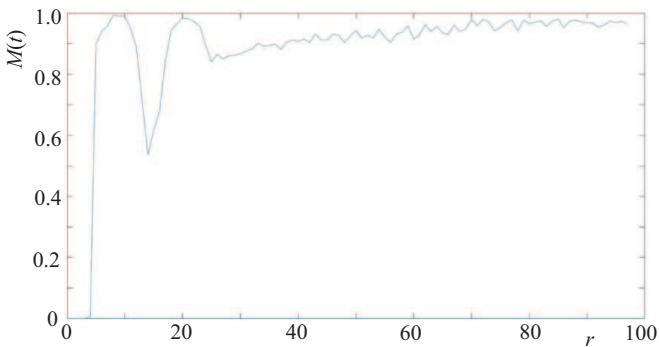


Рис. 1: Зависимость средней степени перемешивания $M(t)$ от параметра накачки r

2. ДИНАМИКА СРЕДНЕЙ СТЕПЕНИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В СИСТЕМЕ ЧУА

В данной работе объектом моделирования была выбрана система Чуа [7, 8]. Интерес к данной модели вызван сложностью динамики в фазовом пространстве и возможностью создания реального электронного аналога модели. Стоит отметить все величины в модели использовались в безразмерном виде [7]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= C1[y - x - F(x)], \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = C2y, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$F(x) = m_1x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|), \quad (2)$$

здесь x , y и z обозначают переменные состояния системы, $C1$ и $C2$ -параметры системы, а $F(x)$ (2) выбрана для представления кусочно-линейной функции.

Для моделирования были приняты следующие значения параметров: $x = 2.8$, $y = 0.3$, $z = -3.6$, $m_1 = -0.68$, $m_0 = -1.27$, $C2=15$, $T = 200$ [7].

Алгоритм, описанный в статьях [1, 2] для вычисления локальной скорости перемешивания был реализован с помощью пакета Matlab. В ходе вычислительного эксперимента вычислялось значение локальной скорости перемешивания для различных значений управляющего параметра $C1$ в интервале от 6 до 12. В результате получили следующие данные:

При значениях параметра $C1$ до 6.9 мы наблюдаем фазовый портрет в виде устойчивой точки равновесия (рис. 3,а), все фазовые траектории стремятся в одну точку.

В промежутки от 6.5 до 6.9 мы наблюдаем следующую картину перехода к аттрактору вида цикл периода 1 (рис. 2,а, б, в), когда все фазовые траектории стремятся к окружности (рис. 3,в).

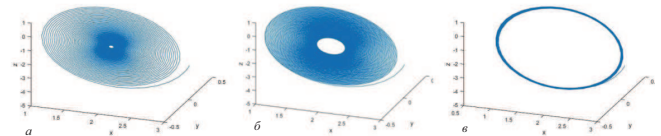


Рис. 2: Фазовый портрет системы Чуа при а — $C1=6.7$, б — $C1=6.8$, в — $C1=6.9$

Средняя степень перемешивания при этом резко возрастает в точки $C1=6.9$.

Далее степень перемешивания увеличивается при увеличении $C1$ до значения 7.9, в этой точке фазовый портрет принимает вид аттрактора цикла периода 2 (рис. 3,в).

После происходит небольшой обвал степени перемешивания, а далее резкий рост в точки $C1=8.1$. Именно тут происходит переход к аттрактору Рёсслера (рис. 3,г).

На следующем шаге вновь наблюдаем провал и резкий рост степени перемешивания в точки $C1=8.3$, осуществляется переход к аттрактору вида double scroll (рис. 3,д), или как ещё его называют аттрактор Чуа. Точками показаны области где степень перемешивания $M(t) > 0.5$.

Далее до значения $C1=10.7$ вид аттрактора практически не изменяется, но при $C1=8.7$ наблюдается провал степени перемешивания и при рассмотрении фазового портрета (рис. 3,е) видим, что переход в аттракторе из одной зоны в другую становится фрактальным, тогда как при других значениях $C1$ переход в аттракторе типа double stroll сплошной.

После значения $C1=10.7$ траектории фазового портрета стремятся к бесконечности (рис. 3,ж), аттрактор разрушается.

В результате исследования получаем следующую зависимость средней степени перемешивания, а также энтропии Колмогорова-Синяя от управляющего параметра $C1$ в системе Чуа (рис. 3). В сравнение динамики средней степени перемешивания с динамикой энтропии Колмогорова-Синяя приходим к выводу, что энтропия положительна при значениях средней степени перемешивания больше 0.5. А это в свою очередь является показателем того, что динамическая система, при таких параметрах, обладает свойством перемешивания фазовых траекторий.

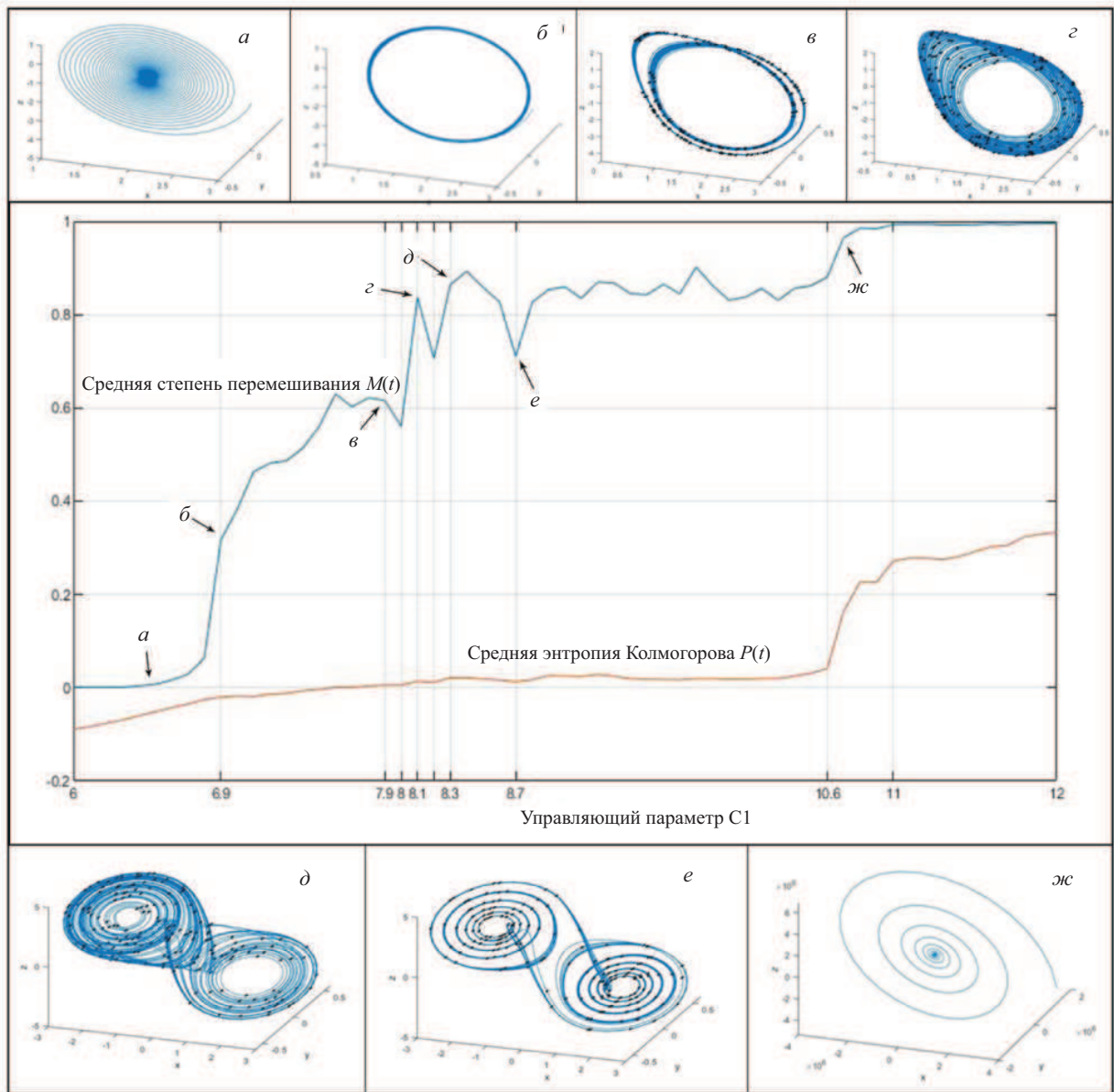


Рис. 3: Зависимость средней степени перемешивания $M(t)$ и средней энтропии Колмогорова от управляющего параметра $C1$; a — устойчивая точка равновесия $C1=6.5$, $M(t) = 0$, $P(t) = -0.05$; $б$ — цикл периода 1 $C1=6.9$, $M(t) = 0.317$, $P(t) = -0.02$; $в$ — цикл периода 2 $C1=7.9$, $M(t) = 0.617$, $P(t) = 0.006$; $г$ — аттрактор Рёсслера $C1=8.1$, $M(t) = 0.838$, $P(t) = 0.014$; $д$ — аттрактор типа double scroll $C1=8.3$, $M(t) = 0.864$, $P(t) = 0.021$; $е$ — аттрактор типа double scroll $C1=8.7$, $M(t) = 0.71$, $P(t) = 0.013$; $ж$ — фазовая траектория стремится к бесконечности $C1=10.7$, $M(t)=0.965$, $P(t) = 0.164$. На фазовых портретах точками указаны области, где степень перемешивания больше 0.5

Так как в системе Чуа (1) присутствует два управляющих параметра $C1$ и $C2$ были проделаны численные расчёты средней степени перемешивания в зависимости от этих параметров на диаграмме (рис. 5).

Эта диаграмма режимов системы Чуа была представлена в статье «The Double Scroll Family» в 1986 г. [8]. Она демонстрирует режимы (фазовые портреты) системы в зависимости от значений параметров $C1$ и $C2$.

Промоделировав среднюю степень перемешивания

по двум управляющим параметрам системы получаем картину, представленную на рис. 5. Хорошо видно сходство бифуркационной диаграммой Чуа (рис. 4), что ещё раз доказывает связь динамики средней степени перемешивания с Ляпуновскими показателями и бифуркационными явлениями, а значит есть надежда получить её аналитическое или эмпирическое выражение.

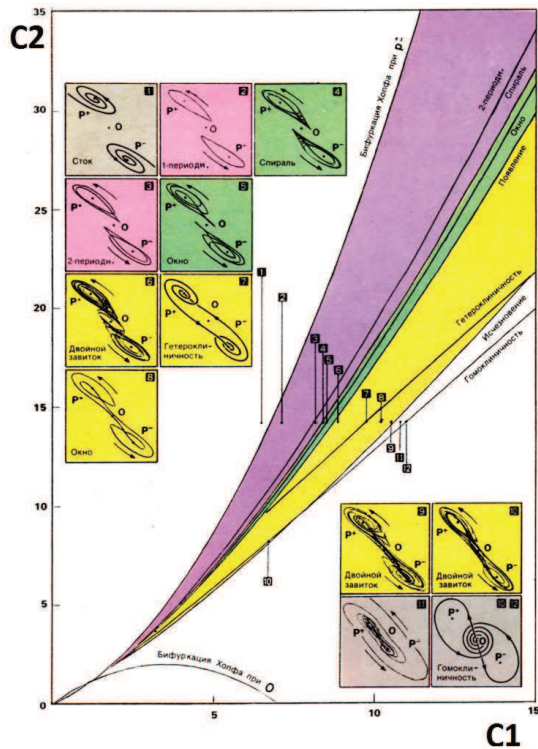


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма режимов системы Чуа [8]

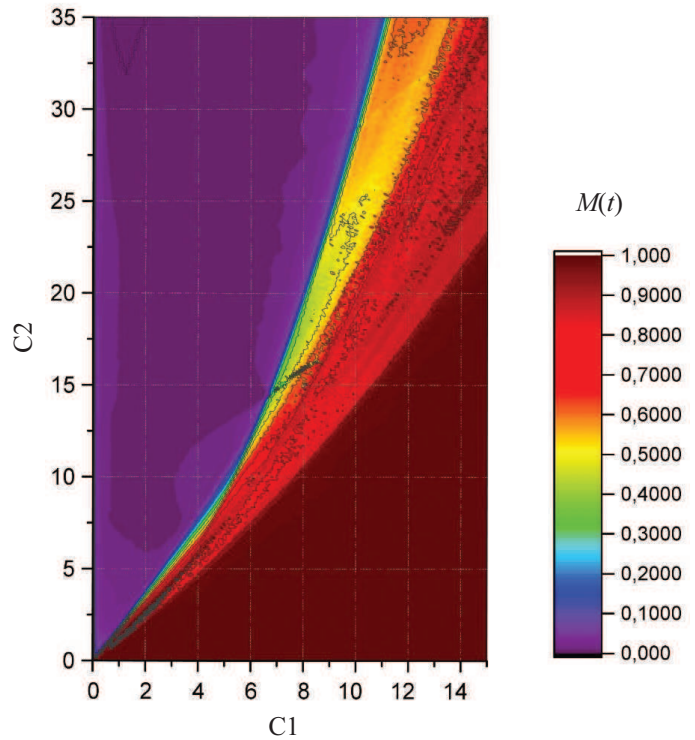


Рис. 5: Зависимость средней степени перемешивания от двух управляющих параметров системы Чуа (1) $C1$ и $C2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено явление перемешивания для системы Чуа, а также связь с энтропией Колмогорова. Для алгоритма вычисления скорости перемешивания разработана программа в среде Matlab и проверено численное исследование на примере системы Чуа. Исследовалась связь скорости перемешивания с управляющими параметрами. Получено что на зависимости кривой степени перемешивания-управляющий параметр наблюдаются провалы в области бифуркационных переходов (из аттрактора цикл периода 2 к ат-

трактору Рёсслера, от аттрактора Рёсслера к аттрактору типа double scroll), что соответствует по Г.Хакену фазовому переходу. Показано сходство зависимости средней степени перемешивания от двух управляющих параметров системы Чуа с бифуркационной диаграммой режимов системы Чуа. Результаты моделирования подтверждают факт связи динамики средней степени перемешивания с бифуркационными переходами, которые по Г.Хакену соответствуют фазовому переходу системы. Также видно, что перемешивание наступает ($M(t) > 0.5$) только когда средняя энтропия Колмогорова больше нуля ($P(t) > 0$) (рис. 9).

[1] Логунов М. Ю., Бутковский О. Я. // ЖТФ. 2008. **78**, № 8. С. 1.
[2] Логунов М. Ю., Бутковский О. Я. // Изв. вузов «ПНД». 2008. **16**, № 4. С. 74.
[3] Baladi V. // Proc. Symp. Pure Mathematics. 1999. № 69. P. 297.
[4] Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. 2007.
[5] Трифонов А. С. // Дни науки студентов Владимирского государственного университета имени Александра Гри-

горьевича и Николая Григорьевича Столетовых. 2018. С. 1226.
[6] Анищенко В. С., Астахов С. В. // Письма в ЖТФ. 2007. № 33. С. 1.
[7] Бугаевский М. Ю., Пономаренко В. И. Исследование поведения цепи Чуа. Учебно-методическое пособие. Изд. ГосУНЦ «Колледж», 1998.
[8] Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family. IEEE Transactions on Circuits & Systems, 1986.

Study the speed of mixing circuit chua

A.S. Trifonov^a, O.Y. Butkovskiy^b

Department of Physics and applied mathematics, Institute of applied mathematics, physics and informatics, Vladimir state university

Vladimir 600014, Russia

E-mail: ^aAntrser@yandex.ru, ^boybutkovskiy@fa.ru

The paper deals with the phenomenon of mixing in dynamic models with chaotic behavior: the basic model of laser dynamics using the Lorentz-Haken model and the model of the simplest electrical circuit that demonstrates the modes of chaotic oscillations — the Chua model. The relationship between the degree of mixing and the control parameter was investigated. The increase in the degree of mixing with the growth of the control parameter is shown. Using the implemented algorithm in the Matlab system, studies were carried out to establish the relationship between the dynamics of the average degree of mixing at bifurcation transitions. In particular, at bifurcation points, which correspond to phase transitions by Haken.

PACS: 05.45.-a

Keywords: mixing, attractor, phase space, phase transition, bifurcation.

Received 29 May 2019.

Сведения об авторах

1. Трифонов Андрей Сергеевич — магистрант; e-mail: Antrser@yandex.ru.
2. Бутковский Олег Ярославович — профессор, науч. руководитель; e-mail: OYButkovskiy@fa.ru.