

Устойчивость коллапса массивных звезд

И. Ю. Калашников^{1,*}, Н. С. Смирнова², П. Д. Шардонне²

¹Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН

Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4

²Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique. 9 Chemin de Bellevue, 74940 Annecy, France

(Статья поступила 19.06.2019; Подписана в печать 24.09.2019)

Было проанализировано автомодельное решение, описывающее коллапс ядра массивной звезды с потерями энергии на нейтринное излучение. Рассматриваются два механизма эмиссии: УРКА-процесс и парная эмиссия нейтрино. Показано, что нет условий, при которых коллапс ядра очень массивной звезды может оставаться устойчивым, в то время как для менее массивной звезды это возможно. Используя полученные соотношения мы обнаружили характерные особенности возникновения неустойчивости, показав тем самым, что она может привести к неоднородному взрыву сверхновой.

PACS: 97.60.Bw

УДК: 524.352-44

Ключевые слова: гидродинамика, неустойчивость, нейтрино, сверхновые.

ВВЕДЕНИЕ

Взрывы сверхновых звезд подразделяются на две категории: термоядерные взрывы вырожденных звезд, так называемый тип I, и тип II — сверхновые с коллапсирующим ядром. В работе [1] Фаулер и Хойл показали важность потерь энергии нейтрино при создании пар e^+e^- , когда центральная температура достигает $T \sim 2 \cdot 10^9$ К. Несколько лет спустя было показано [2, 3], что этот процесс способен разрушить очень массивную звезду. Пожалуй, самым большим сюрпризом стало открытие нового типа очень мощных светящихся сверхновых, названных парно-нестабильными сверхновыми (англ. pair instability supernovae explosion, PINSe). Это предсказание нашло веские доказательства сорок лет спустя, благодаря обнаружению вспышки SN2007bi [4]. Тем не менее, общая картина взрыва очень массивной звезды, вызванного парной неустойчивостью, сильно отличается от коллапса ядра сверхновой или термоядерного коллапса. В сверхновых типа II роль нейтрино в распространении ударной волны является решающей [5]. Вместо этого в сверхновых первого типа критическая масса является ключевым элементом, который определяет поведение звезды. Действительно, в отличие от звезд массой $8 < M/M_\odot < 40$, у которых плотность ядра очень высока ($\geq 10^9$ г/см³), внутренние условия в массивных звездах сильно различаются в основном из-за того, что центральная плотность обратно пропорциональна массе звезды $\rho_c \sim T_c^3/\sqrt{M}$: $\rho_c \sim 10^5$ г/см³ и $T_c \sim 2 \cdot 10^9$ К. В то время как при коллапсе ядра сверхновой типа II испущенные нейтрино необходимы для восстановления ударной волны; вместо этого при взрыве парно-нестабильных сверхновых малое сечение рассеяния нейтрино в сочетании с высокой температурой, благодаря которой возмож-

ны множественные реакции $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$, приводит к сжатию ядра и взрыву звезды.

Чтобы получить детальную картину взрыва используют программы для многомерных гидродинамических расчетов, в которых зачастую используются сферическая или осевая симметрии. Например в работе [6] было сделано предположение о ключевой роли конвекции при взрывах сверхновых. Такая крупномасштабная конвекция появляется в результате ядерного горения в центре звезды и может нарушать сферическую симметрию системы. Неоднородность температуры и плотности может привести к появлению пятен воспламенения в активной зоне. Следуя этой идее, стало возможным предложить асимметричный взрыв с использованием многоядерного зажигания и показать, что асимметричный взрыв создаст совершенно иную гидродинамическую картину взрыва [7, 8]. В настоящей работе эта проблема рассматривается с другой точки зрения. Основная идея состоит в том, чтобы аналитически изучить эту проблему и предложить новые физические решения для начальных конфигураций, которые затем будут использоваться при численном моделировании. Этот аналитический подход полностью оправдан в случае парно-нестабильных сверхновых, где роль нейтрино может быть упрощена как функция потери энергии в уравнениях гидродинамики.

1.. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НАДЁЖИНА

1.1. Уравнения и граничные условия

Нами была выбрана известная модель коллапса ядра с учетом потерь энергии при испускании нейтрино и радиальной самогравитации, впервые предложенная в [9]. В этой модели коллапс описывается как автомодельное решение уравнений гидродинамики с использованием общего метода получения автомодельных решений [10]. Следует отметить, что поведение сферических сходящихся ударных волн, решение для кото-

*E-mail: kalasxel@gmail.com

рых строится аналогичным образом, хорошо изучено, поскольку оно связано с проблемой воспламенения реакции ядерного синтеза с помощью лазеров [11]. Как было показано [12, 13], такая ударная волна неустойчива, если она распространяется в среде с постоянной плотностью. Мы не знаем, какое влияние на устойчивость оказывает учет самогравитации, радиационного охлаждения и неоднородной среды, которые имеют место быть внутри звезды. Здесь мы кратко рассмотрим это решение, чтобы в разделе 2. перейти к анализу возмущений этой системы.

Уравнения газовой динамики, учитывающие радиальную самогравитацию и потери энергии на нейтринное излучение, записанные в обычных обозначениях, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi \rho r^2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + Q_\nu = 0, \quad (4)$$

где $Q_\nu = a\rho^s T^n$ — скорость потери энергии, $p = b\rho^\sigma T^\eta$ — уравнение состояния ($a, b > 0$), \mathbf{e}_r — радиальный единичный вектор. Внутренняя энергия имеет вид: $\epsilon = (\gamma - 1)^{-1} p \rho^{-1}$. Предполагается, что параметры s, n, σ, η и показатель адиабаты γ являются свободными параметрами модели, однако из термодинамических соображений следует соотношение: $\gamma = (\sigma - \eta)/(1 - \eta)$ для $\eta \neq 1$. Когда $\eta = \sigma = 1$, возможны все разумные значения γ .

Для одномерного радиально-симметричного случая система (1)–(4) может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием общего метода получения автомодельных решений [10]. Необходимо ввести новую автомодельную переменную $x = r/R(t)$, где характерный радиус меняется как $R(t) = At^\alpha$, A и α — константы, значения которых будут установлены позже. Тогда неизвестные функции могут быть найдены в виде: $\rho = \rho_{\text{in}}(t)g(x)$, $p = \rho_{\text{in}}(t)\dot{R}^2(t)h(x)$, $\mathbf{v} = \dot{R}(t)f(x)\hat{\mathbf{r}}$ и $M = 4\pi\rho_{\text{in}}(t)R^3(t)m(x)$, где g, h, f и m — безразмерные функции, точка обозначает производную по времени.

В таких задачах обычно полагают, что $t = 0$ — это момент фокусировки, то есть момент, когда плотность в центре становится бесконечной. Поэтому в дальнейшем предполагается, что преобразование $t \rightarrow -t$ выполнено, поэтому автомодельная переменная выглядит как $x = r/A(-t)^\alpha$. Это означает, что коллапс начинается в момент $t = -\infty$ и заканчивается в $t = 0$. Таким образом, для любой точки, лежащей вне центра $r = 0$, мы имеем $x \rightarrow \infty$, в то время как $t \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow -\infty$.

После этих преобразований может быть получена следующая система:

$$f' + (f + x)\frac{g'}{g} + \frac{2f}{x} + \frac{2}{\alpha} = 0, \quad (5)$$

$$(f + x)f' + \frac{1 - \alpha}{\alpha} f = -\frac{(g\tau)'}{g} - \frac{m}{x^2}, \quad (6)$$

$$m' = x^2 g, \quad (7)$$

$$(f + x)\frac{g'}{g}\tau - \frac{f + x}{\gamma - 1}\tau' - g^\nu \tau^\chi + \frac{2}{\alpha} \frac{\alpha + \gamma - 2}{\gamma - 1} \tau = 0, \quad (8)$$

если мы установим специальные значения для $\rho_{\text{in}}, A, \alpha$:

$$\rho_{\text{in}} = \frac{\alpha^2}{4\pi G t^2}, \quad (9)$$

$$A = \left(\frac{(4\pi G)^\nu b^\chi}{a\alpha^{2(\nu+\chi)-3}} \right)^{\frac{1}{2(\chi-1)}}, \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{\chi + \nu - 3/2}{\chi - 1}, \quad (11)$$

где штрих обозначает производную по x , $\nu = s - (\sigma - 1)n/\eta$, $\chi = n/\eta$ и $\tau = h/g$.

Можно снизить количество уравнений системы (5)–(8), введя так называемый массовый интеграл [14], который является следствием (6)(7):

$$\left(3 - \frac{2}{\alpha} \right) m = x^2 g (f + x). \quad (12)$$

Итак, если $\chi \neq 1$ и $\alpha \neq 2/3$ (эти случаи обсуждаются в [9] отдельно), мы имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для трех функций: g, f и τ . Существует одно очевидно известное граничное условие $f(0) = 0$. Как было показано в [9], при $x = 0$ имеет место следующее соотношение:

$$g^\nu(0)\tau^\chi(0) = \frac{2}{|\alpha|} \frac{\gamma + \alpha - 2}{\gamma - 1} \tau(0), \quad (13)$$

таким образом, остается только один неизвестный параметр $g(0)$.

Система (5),(6),(8) с подстановкой (12) имеет особую точку x_s , где знаменатель H явного выражения $df/dx = F/H$ становится равным нулю. Из условия обращения числителя F в нуль в особой точке можно найти неизвестное значение $g(0)$. Для этого в работе [9] использовалась следующая процедура. Сначала бралась произвольная точка x_c , которая находится между граничной и особой точками $0 < x_c < x_s$. Затем система интегрируется из $x = 0$ в $x = x_c$ с тестовым значением $g(0)$ и из точки x_s в x_c с пробными значениями x_s и $f(x_s)$, значения $g(x_s)$ и $\tau(x_s)$ можно найти из требования $F = H = 0$ при x_s . В точке сшивки x_c все три функции g, f, τ должны быть непрерывными. Три неизвестных параметра $g(0), x_s, f(x_s)$ могут быть

определены из этого требования. После этого интегрирование ведется на интервале $x_s < x < +\infty$ с известными условиями при $x = x_s$ и задача считается решенной. Такое решение, полученное для УРКА-процесса (модель А), показано на рис. 1

С математической точки зрения проблема поиска правильного значения $g(0)$ может быть сведена к нахождению нуля вектор-функции $\{g(0), x_s, f(x_s)\} \rightarrow \{g(x_c^-) - g(x_c^+), f(x_c^-) - f(x_c^+), \tau(x_c^-) - \tau(x_c^+)\}$, где функция рассчитывается численно. Параметры s, n , определяющие скорость потери энергии, σ, η , определяющие уравнение состояния и адиабатический индекс γ являются свободными параметрами модели. Полное исследование существования и единственности решения задачи для разных значений свободных параметров выходит за рамки данной работы.

1.2. Найденные решения

Чтобы найти условия прохождения через особую точку мы искали минимум функции $U(x_s, f(x_s), g(x_s)) = (g(x_c^-) - g(x_c^+))^2 + (f(x_c^-) - f(x_c^+))^2 + (\tau(x_c^-) - \tau(x_c^+))^2$, используя метод, описанный в [15], потому как он не требует вычисления производных минимизируемой функции. Дифференциальные уравнения решались методом предиктор-корректор. Для всех найденных решений значение функции U в минимуме не превышает 10^{-10} .

В дополнение к решению, найденному в [9], которое воспроизводится нашим методом (модель А), мы также нашли решение для другого случая (модель Б, табл. 1) соответствующего парной эмиссии нейтрино. Уравнение состояния внутри звезды — предшественника парнонестабильной сверхновой — может быть приближенно принято как уравнение состояния для идеального газа, т.е. $\eta = \sigma = 1$. В этом случае $\nu = s$ и $\chi = n$ представляют степенной закон охлаждения нейтрино $Q_\nu = a\rho^s T^n$.

В работе [16] предложена фитированная формула, описывающая потерю энергии благодаря нейтринному излучению, вызванному плазменными, парными и фото- процессами, в зависимости от плотности и температуры; в наших определениях была вычислена величина ρQ_ν . Разумеется, сложность этой формулы не позволяет построить автомодельное решение с ее использованием. Почти все величины, представленные в формуле, имеют одинаковый порядок для интересующих нас параметров, из-за чего невозможно выделить доминирующий член; поэтому мы действовали по-другому. При типичных условиях внутри очень массивной звезды $\rho_c \sim 10^9 \text{ г/см}^3$ и $T \sim 2 \cdot 10^9 \text{ К}$ мы можем приблизительно положить $Q_\nu \simeq [9 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 \text{ с}^{-3} \text{ К}^{-3}] T^3$ для парной эмиссии нейтрино. Такое упрощение обеспечивает правильные значения Q_ν в небольшой окрестности типичных параметров PISNe.

Найденное решение для процесса парной эмиссии (модель Б) представлено на рис. 2. Как видно из рис. 2,б и табл. 1, это решение характеризуется очень большим сжатием в конце коллапса — около $x = 0$ безразмерная плотность достигает значения $g \simeq 200$, как и безразмерное давление, что означает, что температура не сильно изменяется, благодаря чему наше предположение о законе Q_ν остается верным. В то же время значения безразмерной скорости в несколько раз меньше, чем для модели А.

2.. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Линеаризованные уравнения эволюции возмущений

Рассмотрим малые возмущения к решению Надёжина. Для этого решим систему идеальных гидродинамических уравнений (1) - (4), ища решение в виде: $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(r, t) + \rho_1(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t) = p_0(r, t) + p_1(\mathbf{r}, t)$, $M(\mathbf{r}, t) = M_0(r, t) + M_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_0(r, t)\mathbf{e}_r + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, где индекс 0 обозначает исходное решение Надёжина, индекс 1 соответствует малому возмущению, которое много меньше, чем значения невозмущенного решения. Поэтому в уравнениях должны быть оставлены только линейные члены. Следуя [12, 13] ищем решение в виде:

$$\rho_1 = \rho_{in}(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Phi_{lm}(x) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (14)$$

$$p_1 = \rho_{in}(t) \dot{R}(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Omega_{lm}(x) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (15)$$

$$M_1 = 4\pi \rho_{in}(t) R^3(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Lambda_{lm}(x) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (16)$$

$$v_{1r} = \dot{R}(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Upsilon_{lm}(x) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (17)$$

$$v_{1\theta} = \dot{R}(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Psi_{lm}(x) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \phi), \quad (18)$$

$$v_{1\phi} = \dot{R}(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\lambda_{lm}} \Psi_{lm}(x) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}(\theta, \phi), \quad (19)$$

где $\rho_{in}(t)$, $R(t)$ и $x = r/R(t)$ — те же функции, которые используются в исходном решении, $Y_l^m(\theta, \phi)$ — сферические гармоники, заглавные греческие буквы обозначают неизвестные амплитуды возмущений. $\tau < 0$ — фиксированное время измерения амплитуд, которое исчезает из последующих уравнений. Неизвестные λ_{lm} — это скорости роста, которые можно найти как собственные значения по отдельности для каждой моды. Они также могут быть комплексными, мнимая часть

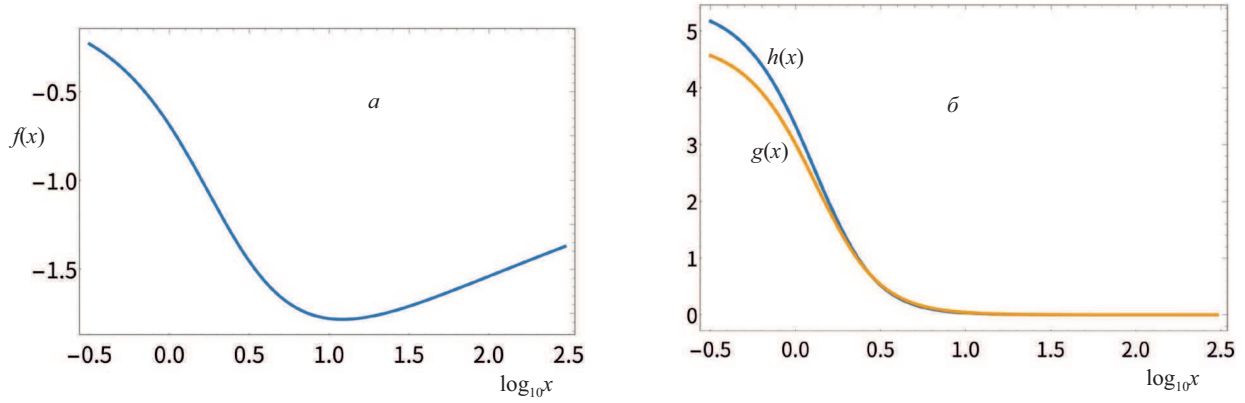


Рис. 1: Решение невозмущенной системы (5) (6) (8) (12) для модели А: *a* — безразмерная скорость; *б* — безразмерное давление (синий) и плотность (оранжевый)

Таблица I: Найденные условия прохождения особой точки для разных наборов параметров

Модель	γ	ν	χ	x_s	$f(x_s)$	$g(0)$
А	5/3	0	6	2.6441	-1.3482	4.8250
Б	5/3	0	3	1.5199	-0.53616	222.15

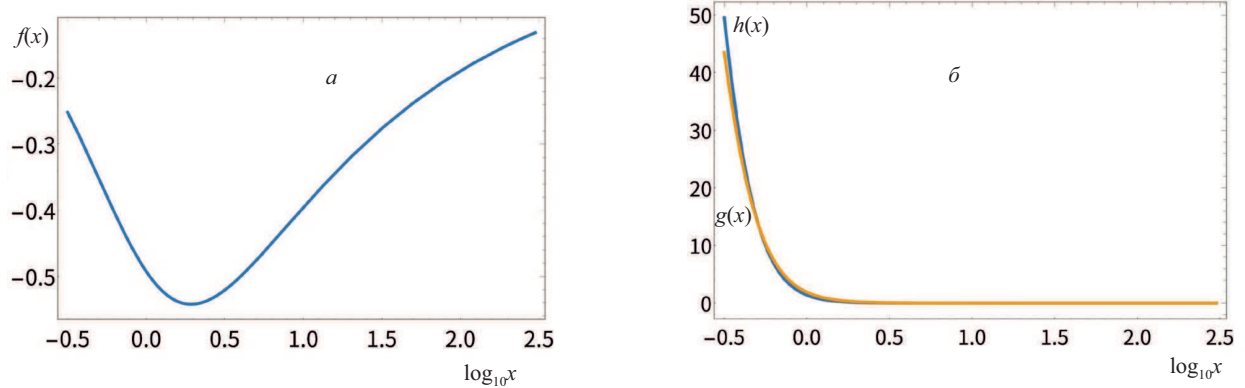


Рис. 2: Решение невозмущенной системы (5) (6) (8) (12) для модели Б: *a* — безразмерная скорость; *б* — безразмерное давление (синий) и плотность (оранжевый)

соответствует колебаниям возмущений. Также необходимо иметь в виду преобразование $t \rightarrow -t$.

После подстановок (14)–(19) в исходные уравнения (1)–(4) переменные разделяются и мы получаем следующие уравнения для каждого режима (индексы l и m опущены):

$$-\frac{\lambda-2}{\alpha}\Phi + x\Phi' + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2(\Phi f + \Upsilon g) - \frac{l(l+1)}{x}g\Psi = 0, \quad (20)$$

$$-\frac{\lambda+\alpha-1}{\alpha}\Upsilon + x\Upsilon' + \frac{d}{dx}\Upsilon f = -\frac{1}{g}\Omega' + \frac{h'}{g^2}\Phi - \frac{1}{x^2}\Lambda, \quad (21)$$

$$-\frac{\lambda+\alpha-1}{\alpha}\Psi + (f+x)\Psi' = -\frac{1}{xg}\Omega, \quad (22)$$

$$\Lambda' = x^2\Phi, \quad (23)$$

$$-\frac{\lambda+2\alpha-4}{\alpha}\Omega + (f+x)\Omega' + h'\Upsilon + \gamma h\left(\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2\Upsilon - \frac{l(l+1)}{x}\Psi\right) + \gamma\Omega\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2f + (\gamma-1)g^{\kappa-1}h^{\chi-1}(\kappa h\Phi + \chi g\Omega) = 0, \quad (24)$$

$$(25)$$

где штрих обозначает производную по x , $\kappa = s - n\sigma/\eta + 1$, $\chi = n/\eta$. Теперь дифференциальные уравнения в частных производных (1)–(4) свелись к системе обыкновенных дифференциальных урав-

нений (20)–(25) с автомодельной переменной $x = r/A(-t)^\alpha$ и фиксированными $\alpha, A > 0$ [9]. Уравнения не содержат m , поэтому для каждого l возможно любое значение $0 \leq m \leq l$.

2.2. Асимптотическое поведение

Автомодельная переменная x принадлежит интервалу $0 \leq x < \infty$, что означает, что при любом $r \neq 0$ время изменяется в интервале $-\infty < t \leq 0$, т.е. коллапс начинается в $t = -\infty$ и заканчивается в $t = 0$. Ставя граничные условия, соответствующие отсутствию возмущений при $x \rightarrow 0$ исследуем поведение системы (20)–(25) в этом пределе.

Поскольку предполагается, что при $x \rightarrow 0$ возмущения стремятся к нулю а g и h выходят на константу, то в уравнениях (20)–(25) оставляем лишь слагаемые, содержащие производные от амплитуд возмущений либо слагаемые, пропорциональные наименьшей отрицательной степени x . В итоге получаем:

$$f\Phi' + g\Upsilon' + \frac{2}{x}(f\Phi + g\Upsilon) - \frac{l(l+1)}{x}g\Psi = 0, \quad (26)$$

$$f\Upsilon' = -\frac{1}{g}\Omega' - \frac{1}{x^2}\Lambda, \quad (27)$$

$$f\Psi' = -\frac{1}{xg}\Omega, \quad (28)$$

$$\Lambda' = 0, \quad (29)$$

$$f\Omega' + \gamma h \left(\Upsilon' + \frac{2}{x}\Upsilon - \frac{l(l+1)}{x}\Psi \right) + \frac{2}{x}\gamma f\Omega = 0. \quad (30)$$

$$(31)$$

Согласно (29) и граничным условиям выбираем $\Lambda = 0$, что соответствует отсутствию самогравитации при $x = 0$. В [9] показано, что $f \approx -2x/3\alpha$ при $x \rightarrow 0$, поэтому получаем $\Omega = 0$ и лишь одно уравнение $\Upsilon' + 2\Upsilon/x - l(l+1)\Psi/x = 0$, свидетельствующее лишь о степенном поведении Υ и Ψ при x близких к нулю. Заметим, что и без пренебрежения f (но при $\Lambda = 0$) существует возможность искать решение (26)–(31) в виде степенного анзаца $\sim x^k$, поскольку все неизвестные функции входят в уравнения либо как производные, либо с множителями $\sim x^{-1}$.

2.3. Локальная устойчивость

В отличие от работ [12, 13], в которых исследовалась устойчивость сходящейся сферической ударной волны с граничными условиями, соответствующими сильному разрыву, в рассматриваемом нами случае учет граничных условий для возмущений представляется несущественным, т.к. потеря устойчивости происходит вдали от границ (что согласуется с представленными в разделе 3. результатами). В таких случа-

ях обычно предполагается (например [17]), что возмущения распространяются в виде плоских волн и из анализа получившегося дисперсионного уравнения делается вывод о устойчивости. В нашем случае, в силу специфики полученных уравнений с автомодельной переменной, было сделано предположение, что возмущения изменяются по степенному закону. Переход к такому рассмотрению является сильным предположением, однако оно оправдано для рассмотрения устойчивости в небольшой окрестности произвольной точки x . Это дает нам информацию о точке x_* , где течение теряет устойчивость, однако при таком рассмотрении функциональное поведение возмущений на всем интервале $0 \leq x < \infty$ остается неизвестным.

В силу вышесказанного, а так же основываясь на асимптотическом анализе, сделанном в разделе 2., представим возмущения в виде: $\Phi(x) = \Phi_0 x^k$, $\Omega(x) = \Omega_0 x^k$, $\Lambda(x) = \Lambda_0 x^k$, $\Upsilon(x) = \Upsilon_0 x^k$, $\Psi(x) = \Psi_0 x^k$. После такой подстановки в уравнения (20)–(25) получается однородная система линейных алгебраических уравнений относительно Φ_0 , Ω_0 , Λ_0 , Υ_0 и Ψ_0 , которая имеет нетривиальное решение только в том случае, если ее определитель $D_l(\lambda, k, x)$ равен нулю. Получающийся в результате определитель представляет из себя полином четвертой степени относительно λ и полином пятой степени относительно k , а от x зависит благодаря невозмущенным функциям основного течения.

С учетом всех сделанных предположений пространственно-временное поведение возмущений имеет вид: $(-t)^{\lambda - \alpha k} r^k$. Поэтому нас интересует знак вещественной части $\mu = \lambda - \alpha k$, поскольку именно он определяет конечный или бесконечный рост возмущений при $t \rightarrow 0$, поэтому $\mu > 0$ соответствует устойчивому течению и $\mu < 0$ неустойчивому. Также мы можем ограничить все возможные значения k , поскольку при отрицательных значениях k возмущения вблизи центра становятся больше основного решения, поэтому $k \geq 0$. Уравнение $D_l(\mu + \alpha k, k, x) = 0$, решаемое относительно μ , имеет четыре корня. Мы предполагаем, что течение неустойчиво, если хотя бы один из этих корней имеет отрицательную вещественную часть. Ниже представлены диаграммы устойчивости, полученные благодаря решению этого уравнения для всевозможных x , k , l . Интервалы значений x , k , l , для которых производились вычисления знака μ выбирались так, чтобы увидеть основные особенности форм устойчивых областей. Было проверено, что увеличение интервалов не дает какой-либо новой информации т.к. при этом поведение границ устойчивых областей не меняется. При дальнейшем анализе мы не учитываем неустойчивости, которые могут возникать в окрестности особой точки невозмущенной системы. Они не имеют физического смысла и их наличие связано с неточностью определения условий прохождения особой точки.

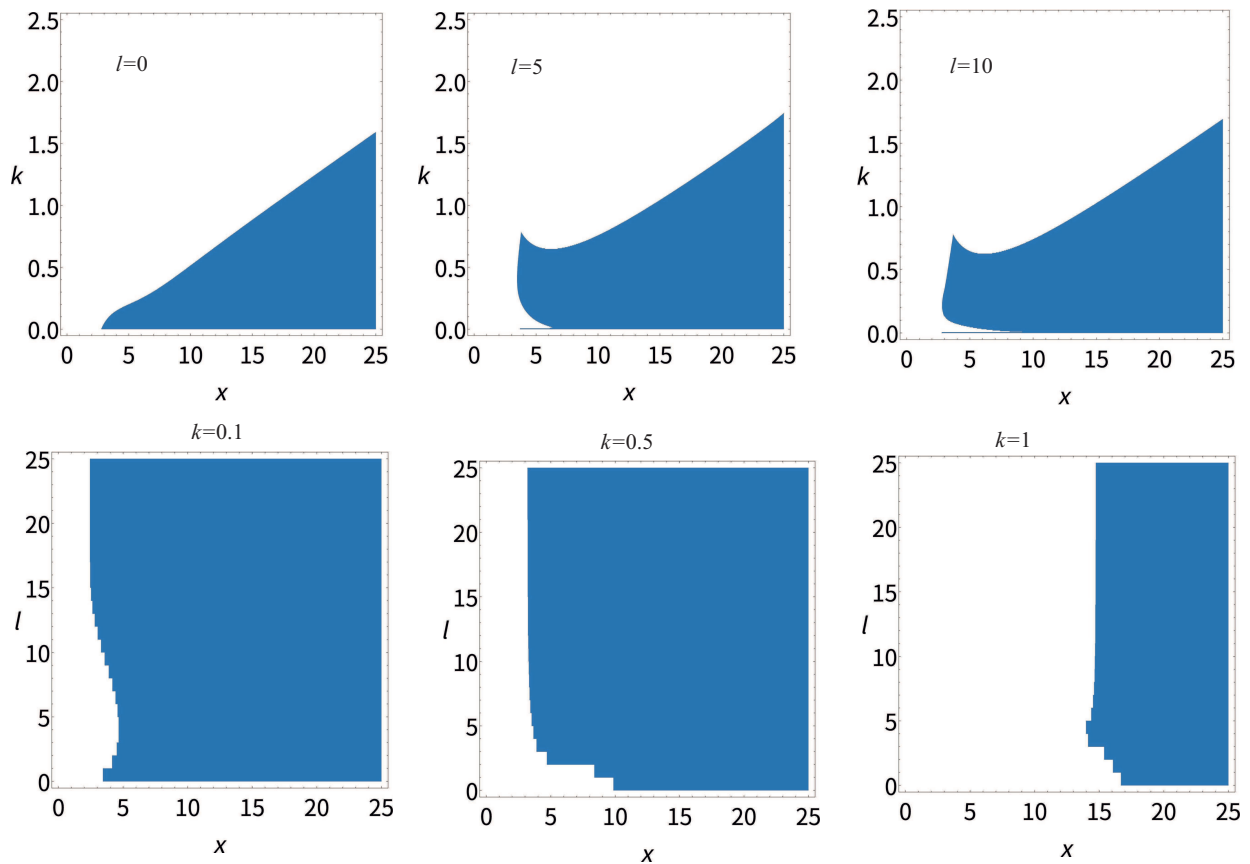


Рис. 3: Диаграммы устойчивости в плоскостях $x - k$ (верхний ряд) и $x - l$ (нижний ряд) для модели А. Закрашенные области соответствуют устойчивому течению

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Информация из диаграмм

Сначала рассмотрим диаграммы устойчивости для модели А. Как видно из рис. 3, нулевая гармоника становится неустойчивой при $x_* \approx 2.9$ при минимальном значении k . Затем значение x_* растет почти линейно с ростом k . Для пятой моды картина другая - устойчивая зона имеет немонотонную форму при малых значениях x , затем она линейно расширяется. Устойчивая область для моды $l = 10$ демонстрирует почти такое же поведение, но самое малое значение x , принадлежащее устойчивой области, составляет $x_* \approx 3.8$. При более высоких значениях l формы устойчивых областей не сильно меняются, что также видно из рис. 3.

В нижнем ряду рис. 3 мы видим, что для каждого значения k формы областей имеют ключевую особенность - почти вертикальную линию при $x = x_w$, к которой стремится значение x_* с ростом l . Это означает, что при $x = x_w$ все гармоники, большие или равные некоторому l_w , теряют устойчивость. Для каждого значения k значения x_w и l_w различны. Поэтому можно предположить, что в точке $x = x_w$ гармоника с $l = l_w$ теряет устойчивость, гармоники с $l < l_w$

устойчивы в этой точке и гармоники с $l > l_w$ тоже теряют устойчивость; однако чуть позже, когда система переходит на нелинейную стадию, возмущения с меньшей энергией и с меньшим масштабом $l > l_w$ будут поглощены возмущением с более высоким значением $l = l_w$. Чтобы оценить x_w , сравним энергию этих возмущений, при которых они теряют устойчивость. Мода l теряет устойчивость в точке x_l , она имеет удельную кинетическую энергию $e_l \sim \rho_{in} \dot{R}^2 x_l^{3k}$. Предположим, что x_w достигается, если разность энергий между модами l и $l + 1$ меньше характерной энергии $\rho_{in} \dot{R}^2$, т.е. $|x_{l+1}^{3k} - x_l^{3k}| \ll 1$. Согласно рис. 3 для $k = 0.1$ это соотношение имеет место для нулевой моды при $x_w \approx 3.5$; для $k = 0.5$ это $l_w \approx 8$ при $x_w \approx 3.5$, а для $k = 1$ примерно $l \approx 15$ при $x_w \approx 14.5$.

Для модели Б устойчивые области имеют почти такую же форму, как и для модели А, но характерные значения x_w и l_w другие. Из рис. 4 можно сделать вывод, что для модели Б нулевая гармоника устойчива при низких k почти до самого момента коллапса. Для более высоких мод наиболее устойчивая точка сдвигается до $x_* \approx 1$. Анализируя диаграммы в плоскости $x - l$ и выполняя аналогичные оценки энергии для каждого вычисленного k , мы получаем почти одинаковые значения $x_w \approx 1$, $l_w \approx 5$. Следует отметить, что при

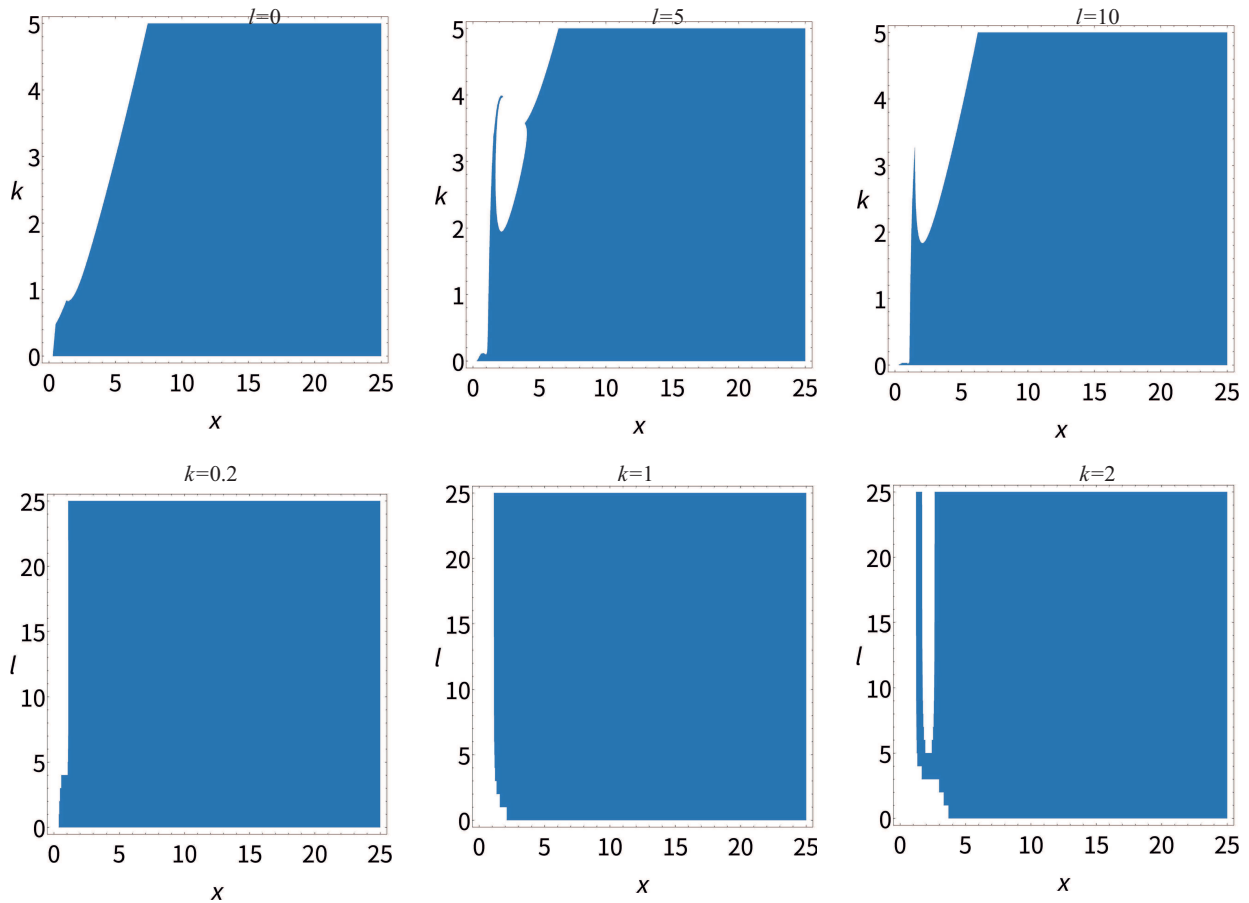


Рис. 4: Диаграммы устойчивости в плоскостях $x - k$ (верхний ряд) и $x - l$ (нижний ряд) для модели Б. Закрашенные области соответствуют устойчивому течению

низких значениях k неустойчивость начинает возрастать от высоких мод, а при $k = 1$ происходит обратное.

3.2. Физические следствия

Как было показано, нет условий, при которых течение оставалось бы устойчивым вплоть до момента коллапса. Функциональное поведение остается неизвестным при нашем рассмотрении, но для последующих оценок нам нужно выбрать наиболее подходящее значение k . Для каждого из рассмотренных случаев мы выбрали такие k , которые соответствуют наиболее устойчивому режиму и в то же время довольно далеки от нуля. Таким образом нижеследующие оценки являются оценками снизу. Как видно из рис. 3 для модели А, она составляет около $k \approx 0.25$ при $x = x_* \approx 3.5$. Для модели В, согласно рис. 4, достаточно широкому диапазону соответствует наиболее устойчивая область k для $x_* \approx 1$.

Из определения автомодельной переменной следует, что на расстоянии r потеря устойчивости происходит в момент $\tau_{\text{inst}} = (r/x_* A)^{1/\alpha}$ до взрыва. Чтобы выяснить возможность возникновения неустойчивостей внутри

реальной звезды, сравним время τ_{inst} со временем свободного падения $\tau_{\text{ff}} = (G\rho)^{-1}$. Для рассмотренных параметров для модели А имеем $\alpha = 0.9$, а автомодельная амплитуда равна $A \sim 10^9 \text{ см/с}^{0.9}$ [18]. С условиями внутри ядра очень массивной ($M \simeq 200M_\odot$) звезды $\rho_c \sim 10^5 \text{ г/см}^3$, $r_c \sim 0.1R_\odot$ имеем $\tau_{\text{ff}} \sim 10\text{ с}$ и $\tau_{\text{inst}} \sim 1\text{ с}$, что означает, что возмущения имеют достаточно времени для развития. Теперь сделаем ту же оценку для менее массивной звезды. Типичные параметры для ядра $10M_\odot$ звезды: $\rho_c \sim 10^9 \text{ г/см}^3$, $r_c \sim 10^{-3}R_\odot$. Таким образом получаем $\tau_{\text{ff}} \sim \tau_{\text{inst}} \sim 10^{-2}\text{ с}$, что не гарантирует наличие достаточно времени для развитие неустойчивости. Сделаем такую же оценку для парной эмиссии нейтрино (модель Б), которая, в отличие от УРКА-процесса, доминирует в случае коллапса массивных звезд. Из (10) для модели Б имеем $A \simeq 6 \cdot 10^9 \text{ см/с}^{0.75}$, что снова дает $\tau_{\text{inst}} \sim 1\text{ с} \ll 10\text{ с}$.

Зная угловой момент наиболее опасного возмущения l_w , мы можем судить о количестве начальных «точек воспламенения» в которых неустойчивость продолжает развиваться, приводя к неоднородному взрыву. Предполагается, что они появляются в местах экстремумов сферической гармоники. Сферическая функция $Y_l^m(\theta, \phi)$ имеет l локальных экстремумов, которые рас-

положены симметрично вокруг экватора $\theta = \pi/2$ в случае $m = 0$. Поскольку индекс m не входит в уравнения (20)–(25), все значения $m \leq l$ возможны для каждого фиксированного l . Поэтому в момент, когда течение становится неустойчивым, существуют l_w точек, где неустойчивость продолжает развиваться. Конечно, позже, на нелинейных стадиях, это количество может измениться из-за любых видов взаимодействия различных частей ядра, и в момент взрыва число точек воспламенения может быть другим, но, как мы полагаем, оно должно быть порядка l_w . В случае модели Б, которая приблизительно соответствует PISNe, мы имеем $l_w = 5$. Это позволяет нам оценить размер возмущений, которые могут быть использованы в численном моделировании взрыва PISN в качестве начальных условий. Если потеря устойчивости происходит при $r \sim r_c$ и в этой позиции находятся $\simeq 5$ точек воспламенения, то каждая неоднородность имеет характерный размер $2\pi r_c/5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили результаты локального анализа устойчивости коллапса ядра массивной звезды в рамках модели Надёжина. В дополнение к уже известному решению, описывающему УРКА-процесс (модель А), мы нашли решение, соответствующее парной эмиссии нейтрино (модель Б) (см. Табл. I). Мы получили диа-

граммы устойчивости для каждого из решений (рис. 3, 4), используя которые можно судить об условиях, при которых коллапс может оставаться устойчивым.

Анализируя результаты можно заключить, что нет условий, при которых коллапс ядра массивной звезды ($M \simeq 200M_\odot$) мог бы быть устойчивым, в то время как коллапс ядер звезд с относительно низкой массой ($M \simeq 10M_\odot$) должен быть устойчив. Различные моды течения теряют устойчивость в разных точках. Оценивая энергию мод, мы пришли к выводу, что наиболее опасной модой для модели Б, которая приблизительно соответствует парно-нестабильным сверхновым, является мода с $l = 5$. Это означает, что когда течение теряет устойчивость, существуют 6 точек, где начальные возмущения могут продолжать развиваться. Мы связываем это число с количеством «точек воспламенения» в [7], наличие которых приводит к неоднородному взрыву. Кроме того, как мы показали, такая нестабильность возникает только у довольно массивных звезд, в то время как звезды с малой массой коллапсируют быстрее, чем развивается неустойчивость.

И. Ю. Калашников хотел бы поблагодарить грант МС ЕС и LAPTh за гостеприимство, а П. Д. Шардонне выражает благодарность за поддержку НИЯУ МИФИ, где данная работа была начата. Авторы благодарят анонимного рецензента, предоставившего полезные комментарии на этапе подготовки рукописи.

-
- [1] Fowler W. A., Hoyle F. *ApJS*. 1964. **9**, 201.
 - [2] Bisnovatyi-Kogan G. S., Kazhdan Y. M. *Critical Stellar Parameters*. *Soviet Ast.*, 10:604, February 1967.
 - [3] Rakavy G., Shaviv G. *ApJ*. **148**, 803. 1967.
 - [4] Gal-Yam A., Mazzali P., Ofek E. O. et al. *Nature*. **462**, 624. 2009.
 - [5] Janka H.-Th., Langanke K., Marek A. et al. *Phys. Rept.* **442**, 38. 2007.
 - [6] Bandiera R. *A&A*. **139**, 368. 1984.
 - [7] Baranov A. A., Chardonnet P., Chechetkin V. M. et al. *A&A*. **558**, A10. 2013.
 - [8] Chardonnet P., Filina A., Chechetkin V. et al. *International Journal of Modern Physics A*. **30**, 1545021. 2015.
 - [9] Nadezhin D. K. *Soviet Physics - Astronomy*. **12**, 924. 1969.
 - [10] Zel'dovich Y. B., Raizer Y. P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. New York: Academic Press, 1967.
 - [11] Badziak J. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*. **60**, 7291. 2012.
 - [12] Brushlinskii K. V. *Instability of a convergent spherical shock wave*. *Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 22:1468–1479, December 1982.
 - [13] Murakami M., Sanz J., Iwamoto Y. *Physics of Plasmas*. **22(7)**, 072703. 2015.
 - [14] Sedov L. I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. New York: Academic Press, 1959.
 - [15] Brent R. P. *Algorithms for minimization without derivatives*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973.
 - [16] Schinder P. J., Schramm D. N., Wiita P. J. et al. *ApJ*. **313**, 531. 1987.
 - [17] Ji H., Goodman J., Kageyama A. *Magnetorotational instability in a rotating liquid metal annulus*. *MNRAS*. **325**, L1, 2001.
 - [18] Murzina M. V., Nadezhin D. K. *Self-Similar Gravitational Collapse with Volume Energy Loss*. *Soviet Ast.* **35**, 282. 1991.

Stability of collapse of massive stars

I. Kalashnikov^{1,a}, N. Smirnova², P. Chardonnet²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics. Moscow125047, Russia

²Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique. Annecy-le-Vieux, 74940 France

E-mail: ^akalasxel@gmail.com

We analyzed a self-similar solution during the core collapse of a massive star with energy losses by neutrino radiation. Two mechanisms of neutrino emission are considered: Urca process and pair neutrino emission. It is shown there are no conditions where collapse of a very massive star may stay stable, while for less massive star it is possible. Using obtained relations we found characteristic features of developing of the instability, thereby showing that it may lead to nonuniform supernovae explosion.

PACS: 97.60.Bw

Keywords: hydrodynamics, instabilities, neutrinos, shock waves, supernovae

Received 19 June 2019.

Сведения об авторах

1. Калашников Илья Юрьевич, аспирант НИЯУ МИФИ, младший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Кеддыша РАН. тел.: 84992207847, e-mail: kalasxel@gmail.com.
 2. Смирнова Нина Сергеевна, научный сотрудник LAPTh CNRS. e-mail: smirnova@lapth.cnrs.fr.
 3. Шардонне Паскаль Даниэль, PhD, профессор, научный сотрудник LAPTh CNRS. e-mail: pascal.chardonnet@lapth.cnrs.fr.
-