

## Определение критического тока, необходимого для возникновения разряда при электровихревом течении в жидком металле

Е. А. Михайлов<sup>1,\*</sup>, И. О. Тепляков<sup>2,†</sup>, И. А. Федотов<sup>2,3‡</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Объединенный институт высоких температур РАН,  
лаборатория теплообмена в энергетических установках  
Россия, 111116, Москва, улица Лапина, д. 17а

<sup>3</sup>Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет, кафедра физической электроники  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 29.06.2019; Подписана в печать 29.07.2019)

Электровихревые течения играют важную роль в различных технических процессах, таких как электросварка или электрошлаковый переплав металлов. Они возникают при распространении электрического тока переменной плотности в жидкой проводящей среде. В настоящей работе рассматриваются электровихревые течения в полусферическом контейнере, заполненном сплавом галлия, индия и олова. В центре сосуда находится электрод полусферической формы, от которого распространяется ток в сторону внешней поверхности. Про достаточно слабых токах течение хорошо описывается с помощью так называемого стоковского приближения, которое позволяет изучать течения в линейном режиме. При более интенсивных токах становится существенным прогиб поверхности жидкого металла около электрода, и сопутствующее ему сокращение поверхности контакта с электродом. В связи с этим плотность тока в центральной части сосуда возрастает, что при определенных условиях приводит к отрыву поверхности жидкого металла от электрода и последующему возникновению разряда. Проведены как экспериментальные, так и теоретические оценки значения тока, при котором возможен отрыв поверхности от электрода. Показано, что критический ток пропорционален степени  $3/2$  размера центрального электрода.

PACS: 47.65.-d.

УДК: 537.84

Ключевые слова: электровихревые течения, разряд, стоково приближение.

### ВВЕДЕНИЕ

Электровихревые течения играют важную роль при исследовании процессов в жидких металлах. Они возникают при распространении электрического тока переменной плотности через проводящую среду и связаны со взаимодействием тока с собственным магнитным полем [1]. Данное явление оказывается достаточно важным при изучении таких технологических процессов, как электросварка и электрошлаковый переплав металлов.

Ввиду достаточно большой актуальности с технической точки зрения, электровихревые течения на протяжении ряда десятилетий привлекают значительное внимание со стороны исследователей из разных стран. В первую очередь хотелось бы упомянуть исследования, проводящиеся в Институте физики Латвийского университета начиная с 1970-х годов [1, 2]. Эти работы носили в основном теоретический характер, и были посвящены как собственно построению различных приближений для описания электровихревых течений, так и исследованию границ их применимости —

в частности, в работе изучался вопрос о том, при каких токах можно пользоваться линейными стационарными уравнениями [3]. Больших успехов в исследовании подобных процессов добился также коллектив исследователей из Великобритании, которые рассмотрели решение для электровихревого течения в полусферическом сосуде с точечным центральным электродом [4], после чего данные результаты были ими развиты для ситуации протяженного, но плоского электрода [5]. Важно отметить, что в данных работах приводятся как аналитическое решение с использованием автомодельных переменных, так и численные результаты. С экспериментальной точки зрения достаточно значительное количество работ ведется силами Объединенного института высоких температур Российской академии наук в Москве [6, 7], в Магнитогорском государственном техническом университете имени Г.И.Носова [8], в Институте механики сплошной среды сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук в Перми [9]. Среди зарубежных экспериментальных групп стоит отметить коллективы в Австрии [10] и Германии [11].

Представленная в настоящей работе задача относится к электровихревому течению, происходящему в жидком сплаве галлия, индия и олова, заполняющему сосуд полусферической формы. В него погружен электрод, который также имеет форму полусферы. За счет создаваемой разности потенциалов ток распро-

\*E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

†E-mail: igor.teplyakov@mail.ru

‡E-mail: fedotov.ia15@physics.msu.ru

страняется от центрального электрода к внешнему (им можно считать поверхность самого сосуда). Плотность тока падает по мере удаления от центра, что с учетом взаимодействия с собственным магнитным полем вызывает возникновение электровихревого течения.

Как правило, для теоретического исследования подобных процессов используется так называемое стоксово приближение [12]. Оно может быть получено, если рассматривать достаточно медленные установившиеся течения. В таком случае в уравнении Навье–Стокса можно пренебречь временной производной. Кроме того, оказывается несущественным нелинейное конвективное слагаемое. В большинстве случаев возмущений данной модели вполне достаточно для того, чтобы получить результат, подтверждаемый экспериментально.

При больших значениях тока картина начинает заметно меняться. Так, под действием электромагнитной силы она начинает прогибаться, и площадь контакта между центральным электродом и жидким металлом сокращается. Это означает, что в центральной области плотность электрического тока увеличивается, что приводит к дальнейшему нарастанию данного эффекта [13]. В какой-то момент, когда плотность электрического тока становится крайне высокой, становится возможным отрыв жидкости от электрода, с дальнейшим возникновением дугового разряда.

До сих пор вопросы, связанные с появлением разряда, изучались в основном на качественном уровне. Среди прочего можно отметить работы по компьютерному моделированию процесса, основанного на так называемой VOF–модели для поверхности жидкости [14]. К сожалению, степень поучительности данного расчета остается достаточно спорной, поскольку он не дает ответа на вопрос о том, от каких параметров и как может зависеть критическое значение электрического тока, при котором может возникнуть разряд. Попытки изучить этот вопрос предпринимались также экспериментально, но как правило сводились к исследованию для небольшого числа электродов сходных размеров, для которых можно ограничиться линейной моделью зависимости тока от таких параметров, как их размер.

В настоящей работе мы попытались построить простую полуэмпирическую модель возникновения разряда в жидком металле, которая позволяет получить простые закономерности для величины тока, необходимого для его зажигания. Нами также был проведен эксперимент, который показал достаточно хорошее соответствие с представленными нами простыми выражениями.

## 1. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим центральный электрод радиуса  $a$ , от которого распространяется электрический ток  $I$ . В таком случае (если использовать сферическую систему координат  $r - \theta - \varphi$ ) на расстоянии  $r$  от центра возникает

плотность тока [15]:

$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r.$$

С ней связана плотность электромагнитной силы:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{B}$  — связанное с током магнитное поле. Магнитное поле можно определить с помощью соотношения:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0 \rho} \text{rot} \mathbf{B},$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\rho$  — плотность жидкости.

Учитывая осевую симметрию задачи, а также то, что основную роль играет компонента магнитного поля  $B_\varphi$ , данное соотношение можно переписать следующим образом [15]:

$$\frac{I}{2\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta).$$

Решение данной задачи с учетом того, что на оси поле обращается в нуль, приводит к следующему результату:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I (\cos \theta - 1)}{2\pi r \sin \theta}.$$

Тогда для плотности силы (направленной вдоль  $\mathbf{e}_\varphi$ ), мы получим следующее выражение [15]:

$$f = \frac{\mu_0 I^2 (\cos \theta - 1)}{4\pi^2 r^3 \rho \sin \theta}.$$

Таким образом, уравнение Навье–Стокса для течения жидкости выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu_0 I^2 (\cos \theta - 1)}{4\pi^2 r^3 \rho \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $p$  — давление. Суть стоксова приближения [12] состоит в том, что рассматриваются установившиеся течения, поэтому производной по времени можно пренебречь. Кроме того, если рассматривать медленные движения, конвективное слагаемое  $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}$  также окажется пренебрежимо малым. Поэтому можно полагать, что уравнение имеет нулевую левую часть. Чтобы не возникло необходимости вычисления давления  $p$  (вообще говоря, нетривиального), можно решать задачу в переменных завихренности  $\boldsymbol{\omega}$  и векторного потенциала скорости  $\boldsymbol{\psi}$ , определяемых следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \text{rot} \boldsymbol{\psi}. \quad (2)$$

Можно показать [15], что с большой степенью точности  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_\varphi$ . Тогда, путем взятия ротора

от обеих частей уравнения Навье–Стокса (1) и выражения для векторного потенциала скорости (2), мы можем получить следующие формулы, не содержащие давление в явном виде [15]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\omega; \quad (3)$$

$$\eta \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right\} = \frac{\mu_0 I^2 (\cos \theta - 1)}{2\pi^2 r^4 \rho \sin \theta}. \quad (4)$$

Удобно измерять расстояния в единицах радиуса внешнего электрода  $b$ , скорость в единицах  $\frac{I}{b} \left( \frac{\mu_0}{\rho} \right)^{1/2}$ , завихренность — в единицах  $\frac{I}{b^2} \left( \frac{\mu_0}{\rho} \right)^{1/2}$ . Кроме того, электровихревое течение может характеризоваться помощью безразмерного параметра  $A = \frac{I^2}{2\pi^2 \eta} \left( \frac{\mu_0}{\rho} \right)^{1/2}$ .

Тогда система уравнений (3)–(4) запишется следующим образом [15]:

$$\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\omega;$$

$$\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{A (\cos \theta - 1)}{r^4 \sin \theta};$$

В качестве граничных условий нужно использовать так называемые условия Тома, которые реализуют в математическом виде условие твердой стенки [16]:

$$\psi|_{r=a} = \psi|_{r=1} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\omega|_{r=a} = - \left. \frac{2\psi}{h^2} \right|_{r=a+h};$$

$$\omega|_{r=1} = - \left. \frac{2\psi}{h^2} \right|_{r=1-h};$$

$$\omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = - \left. \frac{2\psi}{r^2 \vartheta^2} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}-\vartheta}.$$

Типичное решение для этого случая представлено на рис. 1. Линии тока жидкости соответствуют линиям уровня.

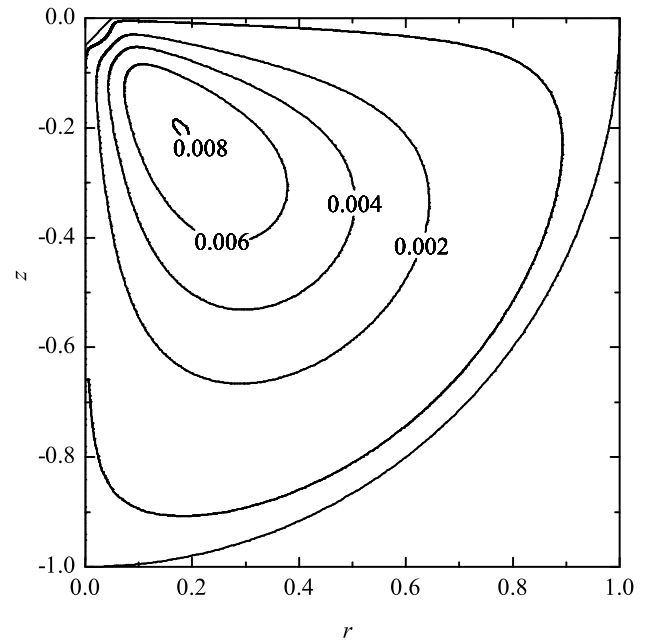


Рис. 1: Зависимость векторного потенциала скорости  $\psi$  от координат для граничных условий Тома

## 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ РАЗРЯДА

При большом значении тока происходит деформация поверхности около центрального электрода. Это связано с тем, что на фрагмент жидкости действует электромагнитная сила, направленная по касательной к поверхности электрода. Она стремится «передвинуть» фрагмент жидкости вниз. С учетом того, что площадь поверхности будет меньше, плотность электромагнитной силы будет больше:

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^3 \rho (1 - \cos \theta) \sin \theta}.$$

Кроме того, на жидкость действует также сила тяжести с плотностью  $g$ . Поверхность жидкости должна быть перпендикулярна к плотности равнодействующей силы.

В случае, если поверхность образует некоторый малый угол  $\gamma$  с перпендикуляром к электроду (рис. 2), то можно записать следующее соотношение:

$$\text{ctg} \gamma = \text{tg} \theta + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^3 \rho g (1 - \cos \theta) \sin 2\theta}.$$

Введем параметр  $Q = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^3 \rho}$ , тогда:

$$\text{ctg} \gamma = \text{tg} \theta + \frac{Q}{(1 - \cos \theta) \sin 2\theta};$$

$$Q = \sin 2\theta (1 - \cos \theta) (\text{ctg} \gamma - \text{tg} \theta).$$

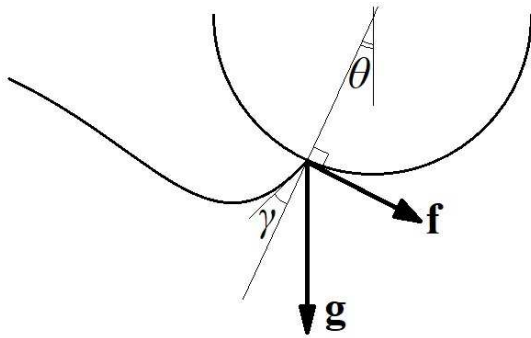


Рис. 2: Деформация поверхности

Для каждого угла  $\gamma$  можно поставить в соответствие зависимость тока от угла  $\theta$ . Типичная зависимость данной величины от угла  $\theta$  представлена на рис. 3.

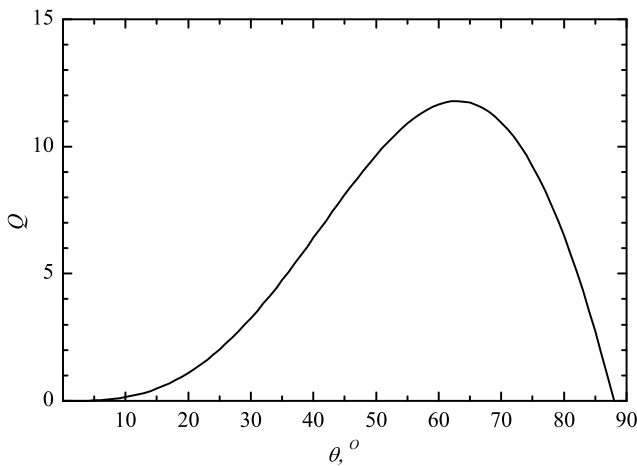


Рис. 3: Зависимость параметра  $Q$  от угла  $\theta$

Максимальное значение функции  $Q_{\max}$  соответствует наибольшей силе тока, при которой возможно существование течения. В случае  $Q > Q_{\max}$  можно ожидать отрыв поверхности с дальнейшим возникновением разряда.

Из экспериментальных исследований следует, что в качестве угла можно взять значение  $\gamma = 2^\circ$ . Тогда  $Q_{\max} \approx 5.9$  и можно считать, что для тока имеется следующая приближенная формула:

$$I_{cr} \approx 108a^{3/2}.$$

В данном случае предполагается, что радиус центрального электрода  $a$  измеряется в мм, а критическое значение силы тока  $I_{cr}$  — в А.

Для того, чтобы установить верность данного выражения, нами был исследован процесс отрыва поверхности для ряда электродов. Результаты представлены на рис. 4. Можно отметить, что экспериментальная зависимость критического значения тока достаточно хорошо соответствует тому, что было получено исходя из теоретических оценок.

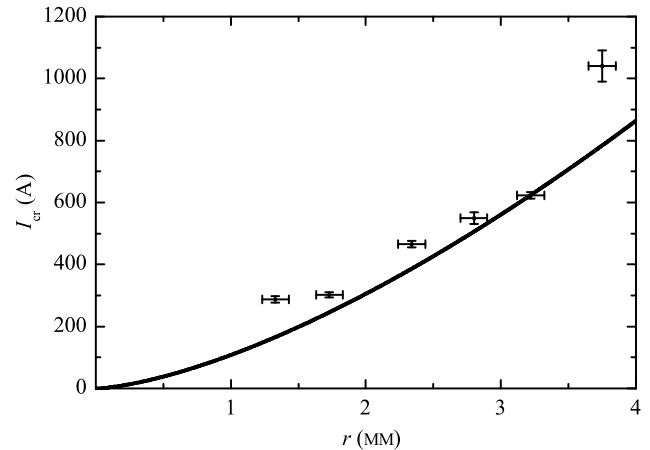


Рис. 4: Зависимость критического значения тока от радиуса центрального электрода

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нами были исследованы электровихревые течения, которые характерны для сплава галлия, индия и олова, находящегося в контейнере полусферической формы. В случае небольших токов достаточно разумно предполагать, что течение может описываться с помощью так называемого стока приближения, являющегося по факту линейной стационарной моделью для движения жидкости. При повышении тока становится существенным прогиб поверхности, который приводит к возникновению разряда. Нами были сформулированы простые эмпирические представления, связывающие значение критического тока с размером центрального электрода. Несмотря на то, что модель исходит из самых элементарных предположений, можно отметить, что она дает качественно верные результаты.

В дальнейшем представляет интерес исследование процессов, которые происходят в случае других металлов. Кроме того, достаточно важно было бы понять, зависит ли критическое значение тока от размеров внешнего электрода, а также, есть ли какие-то иные параметры, могущие влиять на характер течения.

[1] Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985.

[2] Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В.

- Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига: Зинатне, 1976.
- [3] Миллере Р.П., Шарамкин В.И., Щербинин Э.В. // Магнитная гидродинамика. 1980. **16**, № 1, С. 81.
- [4] Sozou C., Pickering W.M. // Journal of Fluid Mechanics. 1976. **73**, 4, P. 641.
- [5] Sozou C., Pickering W.M. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. **362**. P. 509.
- [6] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Игумнов В.С., Оксман А.А. // Теплофизика высоких температур. 1995. **33**, № 1. С. 5.
- [7] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. // Теплофизика высоких температур. 1995. **47**, № 6, С. 957.
- [8] Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П. // Известия вузов. Черная металлургия. 2018. **1**, С. 28.
- [9] Хрипченко С.Ю. // Магнитная гидродинамика. 1991. 27, № 1. С. 126.
- [10] Karimi-Sibaki E., Kharicha A., Wu M., Ludwig A., Bohacek J. // Journal of The Electrochemical Society. 2018. **165**, № 11, P. E604
- [11] Weber N., Nimtz M., Personnetaz P., Salas A., Weier T. // Applied Thermal Engineering. 2018. **143**, P. 293.
- [12] Биркгоф Г. Гидродинамика: Методы, факты, подобие Пер. со 2-го перераб. англ.изд. под ред. Гуревича М.И. и Смирнова В.А. Изд-во иностранной литературы. Москва, 1963.
- [13] Михайлов Е.А., Тепляков И.О. // Материалы 9-ой международной конференции-школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» 5–7 декабря 2018. С. 186.
- [14] Kharicha A., Teplyakov I., Ivochkin Yu., Wu M., Ludwig A., Guseva A. // Experimental Thermal and Fluid Science. 2015. **62**, P. 192.
- [15] Михайлов Е.А., Тепляков И.О. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 2. С. 39. (Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2018. **73**, N2. P. 162)
- [16] Weinan E., Liu J.G. // Journal of Computational Physics. 1996. **124**, P. 368.

## Determining critical current which is necessary for appearance of discharge during electrovortex flow in a liquid metal

E. A. Mikhailov<sup>1,a</sup>, I. O. Teplyakov<sup>2,b</sup>, I. A. Fedotov<sup>2,3,c</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

<sup>2</sup>Laboratory of Heat Transfer in Power Plants, Joint Institute for High Temperatures of the RAS  
Moscow 111116, Russia

<sup>3</sup>Department of Physical Electronics, Faculty of Physics Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>ea.mikhajlov@physics.msu.ru, <sup>b</sup>igor.teplyakov@mail.ru, <sup>c</sup>fedotov.ia15@physics.msu.ru

Electrovortex flows play an important role in different technical processes, such as electrical welding and electrical melting of metals. They take place if there is an electric current with changing density in a conducting medium. In this paper we consider the electrovortex flow in allow of gallium, indium and tin in a hemispherical container. For weak currents it is possible to use the Stokes approximation which allows us to describe the flow in a stationary regime and without convection. For larger currents it is necessary to take into account the deformation of the surface of the liquid near the electrode and decreasing of the square of the contact between the electrode and the metal. The density of the electric current near the electrode increases and for some conditions it is possible to have the avulsion and a discharge between the electrode and the liquid metal. We have studied both theoretically and experimentally the conditions of the discharge. It was shown that the critical value of the electric current is proportional to the radius of the central electrode.

PACS: 47.65.-d.

*Keywords:* electrovortex flows, discharge, Stokes approximation.

*Received 29 June 2018.*

### Сведения об авторах

1. Михайлов Евгений Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.
2. Тепляков Игорь Олегович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник ; тел.: (495) 361-16-73, e-mail: igor.teplyakov@mail.ru.
3. Федотов Иван Анатольевич — студент, лаборант; тел.: (495) 361-16-73, e-mail: fedotov.ia15@physics.msu.ru.