Генерация статических решений в нелинейной электродинамике с дилатоном из стационарных решений Общей Теории Относительности в вакууме

О. В. Кечкин[1,*] И. П. Денисова[2,†] П. А. Мошарев[1‡]
[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,*
физический факультет, кафедра общей ядерной физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*
факультет № 8 «Информационные технологии и прикладная математика»,
кафедра компьютерной математики
Россия, 121552, Москва, Оршанская ул., д. 3
(Статья поступила 26.06.2019; Подписана в печать 08.08.2019)

Установлено соответствие между пространствами аксиально-симметричных решений стационарной Общей Теории Относительности в вакууме и статической нелинейной электродинамики с дилатоном. Определён явный вид аналога решения Керра в дилатон-максвелловской электродинамике. Проанализирована динамика пробной заряженной частицы в соответствующих полях, установлено свойство конфайнмента в электростатическом секторе дилатон-максвелловской электродинамики.

PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc УДК: 53.01, 537.8
Ключевые слова: электродинамика с дилатоном, Общая Теория Относительности, дуальность, точные решения.

Калибровочные теории лежат в основе описания физики элементарных частиц. Калибровочный метод введения фундаментальных взаимодействий полностью оправдал себя при построении Стандартной Модели. Кроме того, все реалистические Теории Великого Объединения (включая теорию струн) являются, в обобщённом смысле, калибровочными и включают в себя в низкоэнергетическом пределе Стандартную Модель.

Конфайнмент как явление (то есть удержание кварков «внутри» адронов) установлен экспериментально. Его статус как математического феномена остаётся, при этом, одним из основных вызовов и проблем современной теоретической физики. Ожидается, что конфайнмент имеет место в калибровочных теориях элементарных частиц — прежде всего, в Стандартной Модели. Так ли это — то есть гарантируется ли динамикой данной калибровочной теории механизм захвата и удержания кварков — до сих пор открытый вопрос. Основные трудности в попытках на него ответить связаны с существенной нелинейностью любой сколько-нибудь содержательной калибровочной теории (например, Стандартной Модели), делающей крайне проблематичным как применение точных методов, так и приближённый анализ явлений, не являющихся малыми поправками к тем или иным тривиальным процессам. Разумеется, конфайнмент относится к числу таких «абсолютных» феноменов с очевидно непертурбативными свойствами.

Между тем, уже в эйнштейновской Общей Теории Относительности (ОТО) явление удержания — то есть своего рода конфайнмент — реализовано в рамках физики чёрных дыр. А именно, в спектре решений ОТО, которая также является нелинейной теорией, имеется, например, решение Шварцшильда — точное статическое и сферически-симметричное решение, обладающее горизонтом. Для пробных частиц горизонт оказывается «ловушечной» поверхностью, попав под которую такие частицы уже никогда не смогут вернуться обратно — во внешнюю область.

Наша основная идея состоит в том, чтобы использовать «напрямую» конфайнмент в ОТО в рамках построения калибровочной теории, обладающей общим с ОТО подпространством решений, включающим в себя и решения, описывающие чёрные дыры. Нас интересует ответ на вопрос о том, сохраняют ли «чернодырные» решения из ОТО свои «ловушечные» свойства в уже новой, калибровочной, теории.

Как оказалось, система взаимодействующих в соответствии с теорией струн максвелловского (U(1)-калибровочного) и скалярного (дилатонного) полей является теорией искомого типа [1, 2]. Она называется дилатон–максвелловской электродинамикой (ДМЭ); соответствующее ей действие имеет следующий вид:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right), \quad (1)$$

где ϕ — дилатон, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — напряжённость максвелловского поля, а α — постоянная дилатон-максвелловской связи. В теории струн $\alpha = 1$, пятимерная теория Калуцы-Клейна приводит к значению $\alpha = \sqrt{3}$. Мы рассматриваем ДМЭ с произвольной константой связи $\alpha \neq 0$; такая теория является нелинейной. Индексы поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$. Мы начали изучение этой теории в работах [1, 2], в которых были найдены скрытые симметрии статической ДМЭ и построены инвариантные по группе симметрий

*E-mail: kechkin@sinp.msu.ru
†E-mail: pm@mati.ru
‡E-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru

классы монопольных решений в этой теории.

Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие действию (1), определяют «ДМЭ-вакуум», на фоне которого рассматривается динамика пробных частиц. Уравнение движения для них — записанный в четырёхмерной форме Второй закон Ньютона — определяется специальным образом модифицированной силой Лоренца:

$$\frac{du^\mu}{ds_0} = \frac{q}{m} e^{-\alpha\phi} F^{\mu\nu} u_\nu + \alpha \left(\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu\right) \partial_\nu \phi, \qquad (2)$$

где q и m — электрический заряд частицы и её масса, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds_0}$ — четырёхмерная скорость, а $ds_0 = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ — дифференциал интервала, вычисляемого вдоль мировой линии частицы. Важно отметить, что уравнение движения (2) согласовано с принципом наименьшего действия, его вывод дан в [3]. Именно подчинение теории принципу наименьшего действия определяет второй — дилатонный член в правой части (2), не исчезающий в случае тривиального электромагнитного поля.

Наше первое утверждение состоит в том, что, при определённых ограничениях, уравнения на ДМЭ–фон, определяемые действием (1), в точности совпадают с уравнениями ОТО в вакууме

$$R_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, вычисленный по пространственно- временной метрике $g_{\mu\nu}$, являющейся теперь уже динамической функцией $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left(x^\lambda\right)$.

Эти ограничения сводятся к следующему: ДМЭ нужно брать в её статическом (то есть электро- или магнитостатическом) сегменте, в то время как метрика из ОТО должна быть стационарной. Далее, обе теории нужно рассматривать в аксиально-симметричном случае, в результате поля ДМЭ и ОТО не будут зависеть от времени и полярного угла. Кроме того, или электрический потенциал A_0, или векторный потенциал $\mathbf{A}$ в ДМЭ должен быть тривиален.

Параметризуя квадрат интервала из ОТО согласно

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f (dt + \omega_\phi d\phi)^2 - f^{-1} dl^2, \qquad (4)$$

где квадрат трёхмерного элемента длины задан в форме Льюиса и Папапетру

$$dl^2 = e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\phi^2, \qquad (5)$$

получаем общий вид стационарной и аксиально-симметричной метрики $g_{\mu\nu}$ в терминах функций f, ω_ϕ и γ пространственных переменных $x^1 = \rho$ и $x^2 = z$ (от $x^0 = t$ и $x^3 = \phi$ метрика, как мы считаем, не зависит). Утверждение состоит тогда в том, что если метрика (4)–(5) удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (3), то поля

$$\phi = -\frac{1}{\alpha} \log f, \quad A_\phi = \frac{2}{\alpha} \omega_\phi, \quad A_0 = 0 \qquad (6)$$

являются решениями уравнений ДМЭ, получаемым из действия (1) — то есть задают магнитостатический сектор теории. Для электростатического сектора получается следующий результат:

$$\phi = \frac{1}{\alpha} \log f, \quad A_0 = \frac{2}{\alpha} \chi, \quad A_\phi = 0, \qquad (7)$$

где потенциал χ определяется соотношениями $\partial_\rho \chi = -f^2 \rho \partial_z \omega_\phi$ и $\partial_z \chi = f^2 \rho \partial_\rho \omega_\phi$. При этом плоское пространство–время ДМЭ описывается координатами t, ρ, z, ϕ, соответствующий квадрат интервала есть

$$ds_0^2 = dt^2 - dl_0^2, \quad \text{где} \quad dl_0^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2. \qquad (8)$$

Таким образом, для перехода от ОТО к ДМЭ нужно, дополнительно к формулам (6)-(7), положить $\gamma = 0$ в метрике (5). Формулы (6)–(8) полностью определяют перевод стационарного решения ОТО в статическое решение ДМЭ.

В качестве примера рассмотрим наиболее известное из нетривиальных стационарных аксиально-симметричных вакуумных решений ОТО — метрику Керра, которая описывает массивную вращающуюся чёрную дыру. Она имеет вид (4)–(5) с

$$f = \frac{R^2 - M^2 + a^2 cos^2\theta}{(R+M)^2 + a^2 \cos^2\theta}, \quad \omega_\phi = \frac{2aM\,(R+M)\sin^2\theta}{R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta} \qquad (9)$$

и

$$dl^2 = \left(R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta\ \right) \times \\ \times \left(\frac{dR^2}{R^2 + a^2 - M^2} + d\theta^2\right) + \\ + \left(R^2 + a^2 - M^2\right) \sin^2\theta d\phi^2,$$

где константы M и a — масса и параметр вращения чёрной дыры. Для этой метрики

$$e^{2\gamma} = \frac{R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta}{R^2 + (a^2 - M^2)\cos^2\theta}, \\ \chi = \frac{2aM cos\theta}{(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta} \qquad (10)$$

(координаты R, θ связаны с координатами ρ, z соотношениями $\rho = \sqrt{R^2 + a^2 - M^2}\sin\theta$, $z = R\cos\theta$).

Применяя формулы (6)–(8), для соответствующих полей ДМЭ получаем:

$$A^0 = \frac{4aM\cos\theta}{\alpha[(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta]}, \\ A_\phi = \frac{4aM\,(R+M)\sin^2\theta}{\alpha[R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta]}, \\ \phi = \pm\frac{1}{\alpha} \log \frac{R^2 - M^2 + a^2 cos^2\theta}{(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta}, \qquad (11)$$

где +/− соответствует электро-/магнитостатическому секторам теории. При этом плоская метрика ds_0^2

в ДМЭ задаётся, в контексте формул (8), квадратом трёхмерного плоского элемента длины

$$dl_0^2 = \left[R^2 + \left(a^2 - M^2\right)\cos^2\theta\right] \times \times \left(\frac{dR^2}{R^2 + a^2 - M^2} + d\theta^2\right) + + \left(R^2 + a^2 - M^2\right)\sin^2\theta d\phi^2. \quad (12)$$

Асимптотики полученного решения при $R \to +\infty$ имеют вид

$$A^0 \to \frac{pcos\theta}{R^2}, \quad A_\phi \to \frac{psin^2\theta}{R}, \quad \phi \to \frac{q_\phi}{R} \quad (13)$$

с $p = \frac{4aM}{\alpha}$ и $q_\phi = \mp\frac{2M}{\alpha}$. Таким образом, решение Керра из ОТО генерирует в ДМЭ электрический/магнитный диполь p с нетривиальным дилатонным зарядом q_ϕ.

Возвращаясь к теме конфайнмента, воспользуемся интегралом движения энергетического типа, установленным в [3] для динамики (2) пробной частицы на фоне стационарного ДМЭ-фона (1):

$$E = mu^0 e^{\alpha\phi} + qA^0. \quad (14)$$

С его помощью легко устанавливается, что в электростатическом случае, который особенно интересен для приложений (например, в физике кварков — электрически заряженных частиц), поверхность

$$R = R_h = \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}, \quad (15)$$

является «ловушечной» в традиционном для ОТО смысле. А именно, утверждается, что чем ближе оказывается пробная частица к этой поверхности в начальный момент времени, тем большей начальной скоростью она должна обладать для того, чтобы «уйти» на заданное расстояние — например, на пространственную бесконечность. Действительно, подставляя (11) в (15), в пределе $R \to R_h$ получаем:

$$u^0 \to \frac{M}{mR_h(R - R_h)}\left[E\left(M + R_h\right) - \frac{2aq\cos\theta}{\alpha}\right] \to +\infty \quad (16)$$

(для траекторий со значениями θ, которые обеспечивают положительную определённость u^0 в (16), когда данный предел и оказывается возможным). Тогда, в силу определения $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, приходим к выводу, что $v \to 1$. По непрерывности, далее, заключаем, что для выхода из-под поверхности $R = R_h$ массивная частица должна преодолеть скорость света, что для неё невозможно. Это и означает наличие у электростатического решения Керра в ДМЭ свойств конфайнмента по отношению к пробным заряженным массивным частицам.

Можно показать, что в магнитостатическом секторе ДМЭ поверхность $R = R_h$ также оказывается недостижимой для массивных пробных частиц.

[1] *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Mod. Phys. Lett. 2016. **A31**, N 23. P. 1650127.
[2] *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Mod. Phys. Lett. 2016. **A31**, N 31. P. 1650169.
[3] *Denisova I. P., Kechkin O. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. **15**, N 5, P. 464.

Generation of Static Solutions in nonlinear electrodynamics with dilaton from stationary solutions of General Relativity in vacuum

O. V. Kechkin[1,a], **I. P. Denisova**[2,b], **P. A. Mosharev**[1,c]

[1]*Department of nuclear physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*
[2]*Department № 8 «Information Technologies and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University)*
Moscow, 121552 Russia
E-mail: [a]*kechkin@sinp.msu.ru,* [b]*pm@mati.ru,* [c]*moscharev.pavel@physics.msu.ru*

The correspondence between the spaces of axially symmetric solutions of the stationary General Relativity in vacuum and static nonlinear electrodynamics with a dilaton is established. The explicit form of the analog for Kerr solution in dilaton-Maxwell electrodynamics is determined. The dynamics of a test charged particle in the corresponding fields is analyzed, the property of confinement in dilaton-Maxwell electrodynamics is established.

PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc
Keywords: electrodynamics with dilaton, General Relativity, duality, exact solutions.
Received 26 June 2019.

Сведения об авторах

1. Кечкин Олег Вячеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-58, e-mail: kechkin@sinp.msu.ru.
2. Денисова Ирина Павловна — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (499) 141-95-62, e-mail: pm@mati.ru.
3. Мошарев Павел Александрович — аспирант; тел: (495) 939-25-58, e-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru.