Контрастные структуры как решения задачи реакции-диффузии с корнями произвольной кратности

А. А. Быков* К. Е. Ермакова†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 02.07.2019; Подписана в печать 05.08.2019)

В настоящей работе рассмотрена начально-краевая задача, основанная на уравнении реакции-диффузии в однородной и в неоднородной среде, с решениями в виде нестационарных контрастных структур. Правая часть уравнения представляет собой гладкую функцию, имеющую три упорядоченных корня, причем в окрестности крайних корней функция убывает быстрее первой степени координаты, т.е. она может быть бесконечно малой степенной функцией, показатель которой больше единицы, а также может представлять собой функцию, убывающую быстрее любой степени координаты, например, экспоненциальную. Таким образом, обобщены результаты, полученные в серии работ В. Ф. Бутузова и его учеников. Также в работе рассмотрен новый частный случай, в котором функция плотности источников носит экспоненциально–степенной характер. Показано, что передний и задний участки фронта контрастной структуры по-разному стремятся к своим стационарным уровням, в частности, на заднем участке фронта стремление происходит более медленно, чем на переднем участке. Полученные результаты строго обоснованы с помощью метода дифференциальных неравенств, применение которого для обоснования задач с малым параметром разработано Н.Н.Нефедовым. Результаты согласуются с результатами компьютерного моделирования, представленными в работе.

PACS: 02.30.Jr УДК: 517.9.
Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастная структура, метод дифференциальных неравенств.

ВВЕДЕНИЕ

Очень часто при работе с математическими моделями, основанными на нелинейных сингулярно возмущенных уравнениях (одним из таких уравнений является уравнение реакции–диффузии), появляются решения с внутренними слоями, которые принято называть контрастными структурами [1, 2]. Такие решения вызывают большой интерес у исследователей, так как они возникают при изучении ряда прикладных задач, в частности, в химической кинетике [3], физике полупроводников [4], биофизике, астрофизике [5–7], в геофизической плазме, и многих других научных областях. Также контрастные структуры присутствуют и в задачах, посвященных распространению тепла в среде с источниками, плотность которых зависит от температуры, к их числу, например, относятся задачи реакции горения и взрыва [8]. В настоящее время активно изучаются контрастные структуры (КС), возникающие при решении моделей, главное уравнение которых имеет в правой части нелинейность с вырожденными корнями. В частности, в работах [9, 10], [11] получены серьезные результаты для пограничного слоя в задачах эллиптического типа с кратными корнями, в работах [12–14] — в задачах параболического типа с кратными корнями. В вышеперечисленных работах рассмотрены только случаи для кратных корней второго и третьего порядков. В [15, 16] результаты для внутреннего переходного слоя (пограничные слои не рассматривались) распространены на случай корня произвольной конечной кратности, большей единицы, в том числе на дробную и иррациональную, а также на случай корня, имеющего бесконечно большую кратность вырождения соответственно (в последнем случае в уравнение входит нелинейность в виде гауссовой функции). В настоящей работе рассмотрена начально-краевая задача, основанная на уравнении реакции-диффузии в однородной среде, с решениями в виде нестационарных контрастных структур. Правая часть уравнения представляет собой гладкую функцию, имеющую три упорядоченных корня, причем в окрестности крайних корней функция обязательно убывает быстрее первой степени координаты, т.е. она может быть бесконечно малой степенной функцией, показатель которой больше единицы, а также может представлять собой функцию, убывающую быстрее любой степени координаты. Таким образом, обобщены результаты, полученные в [15, 16]. Также в работе рассмотрен новый частный случай, в котором функция плотности источников носит экспоненциально — степенной характер. Показано, что передний и задний участки фронта контрастной структуры по-разному стремятся к своим стационарным уровням, в частности, на заднем участке фронта стремление происходит более медленно, чем на переднем участке. Полученные результаты строго обоснованы с помощью метода дифференциальных неравенств [17].

*E-mail: abkov@yandex.ru
†E-mail: kristinaermakova1908@gmail.com

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается одномерная модель, основанная на уравнении реакции-адвекции-диффузии с малым параметром в однородной среде:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t + V\varepsilon u_x = \kappa\varepsilon^2 u_{xx} - f(u), \ \ (x,t) \in \Pi, \\ u_x(a,t) = 0, \ \ u_x(b,t) = 0, \ \ u(x,0) = \varphi_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

$u \in C_2(\Pi) \bigcap C_1(\bar{\Pi})$, $\Pi = (a,b) \times (0,T)$, $\bar{\Pi} = [a,b] \times [0,T]$.

Будем считать, что $f(u)$ есть гладкая функция, уравнение $f(u) = 0$ имеет три упорядоченных изолированных корня:

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3.$$

Общий вид рассматриваемой функции можно записать следующим образом:

$$f(u) = f_1(u) f_2(u) f_3(u), \tag{2}$$

причем каждая из функций $f_{1;3}(u)$ имеет единственный корень соответственно $\varphi_{1;3}$, в некоторой окрестности которого верно равенство

$$f_{1;3}(u) = \delta u_{1;3} \alpha_{1;3}(\delta u_{1;3}), \tag{3}$$

где $\delta u_1 = u - \varphi_1$, $\delta u_3 = u - \varphi_3$, функции $\alpha_1(\delta u_1)$ и $\alpha_3(\delta u_3)$ — заданные гладкие бесконечно малые положительные функции при $\delta u_{1;3} \to 0$. Мы рассматриваем как бесконечно малые степенные функции:

$$\alpha_{1;3}(\omega) = C_{1;3} |\omega|^{\beta_{1;3}}, \tag{4}$$

$\beta_{1;3} > 0$, так и функции, убывающие быстрее любой степени, например,

$$\alpha_{1;3}(\omega) = C_{1;3} |\omega|^{\beta_{1;3}} e^{-\gamma_{1;3}|\omega|}, \tag{5}$$

$\gamma_{1;3} > 0$. Таким образом выполнены условия, при которых возможно существование решений типа перемещающейся контрастной структуры (КС) [18].

Далее осуществим переход к растянутой переменной с помощью замены $\xi = \dfrac{x - x^\star(t)}{\varepsilon}$, где $x^\star(t)$ - положение переходного слоя в момент времени t :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{dx^\star(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{\varepsilon} W \frac{\partial}{\partial \xi},$$

где $\tilde{W}$ - скорость движения фронта. В результате при условии $\varepsilon > 0$ получаем новую задачу, аналогичную (1), которая имеет вид

$$\begin{cases} -\tilde{W} u_\xi + V u_\xi = \kappa u_{\xi\xi} - f(u), \ \ \xi \in (-\infty, +\infty), \ \ t > 0, \\ u(-\infty) = \varphi_1, \ \ u(+\infty) = \varphi_3. \end{cases} \tag{6}$$

Введем обозначение $W = \tilde{W} - V$, тогда главное уравнение задачи (6) перепишется в виде

$$-W u_\xi = \kappa u_{\xi\xi} - f(u). \tag{7}$$

Выполним операцию понижения порядка: $u_\xi = p$, $u_{\xi\xi} = p p_u$. В результате вместо (7) получим

$$-W p = \kappa p p_u - f(u). \tag{8}$$

Вместо условий на бесконечности для уравнения (8) будем использовать

$$\lim_{u \to \varphi_1 + 0} p(u) = +0, \quad \lim_{u \to \varphi_3 - 0} p(u) = +0, \tag{9}$$

причем $p(u) > 0$ при $\varphi_1 < u < \varphi_3$. Переопределенная система из уравнения первого порядка (8) и двух условий (9) является условием для определения W. При выполнении этих условий возможна и обратная операция: вычисление $u(\xi)$ по заданной функции $p(u)$:

$$\xi - \xi_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{p(u)}, \tag{10}$$

из которого при выполнении (9) автоматически вытекают условия (10). Таким образом, объединяя (8) и (9), получим окончательный вид рассматриваемой задачи после понижения порядка:

$$\begin{cases} -W p = \kappa p p_u - f(u), \ \ u \in (\varphi_1, \varphi_3), \\ \lim_{u \to \varphi_1 + 0} p(u) = +0, \ \ \lim_{u \to \varphi_3 - 0} p(u) = +0. \end{cases} \tag{11}$$

2. ПРОФИЛЬ ПЕРЕДНЕЙ ЧАСТИ ФРОНТА ВПС

Будем считать, что значение W задано, $p(u)$ - также заданная функция, тогда рассмотрим (8) как выражение для $f(u)$:

$$f(u) = W p + \kappa p p_u. \tag{12}$$

Рассмотрим профиль ВПС в окрестности передней части фронта, где $u(\xi)$ примыкает к уровню φ_1 в однородной среде. Пусть фронт перемещается справа налево со скоростью $W < 0$, причем $u_\xi > 0$ при всех ξ. Пусть $u = \varphi_1 + \omega$, $\omega \to +0$ при $\xi \to -\infty$, и в некоторой окрестности значения $\omega = +0$ верно равенство

$$f(\varphi_1 + \omega) = \omega \alpha_1(\omega), \tag{13}$$

причем $\alpha_1(\omega) > 0$, $\alpha_1(\omega) \to +0$ при $\omega \to +0$. Тогда ω удовлетворяет уравнению

$$\kappa \omega_{\xi\xi} + W \omega_\xi - \omega \alpha_1(\omega) = 0.$$

Учитывая условие $\omega \to +0$ при $\xi \to -\infty$, получим из (11) для определения $p(\omega)$ задачу Коши

$$\begin{cases} \kappa p p_\omega = -p W + \omega \alpha_1(\omega), \ \ \omega > 0, \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение (14) будем строить в виде асимптотического ряда [19]. Заметим, что $p(\omega) \to +0$ при $\omega \to +0$ и, таким образом, в (14) все слагаемые левой и правой частей положительны. Докажем, что (14) справедливо только при условии $\dfrac{dp}{d\omega} \to \mathrm{const} \neq 0$. Для этого рассмотрим два случая:

(1) второе слагаемое есть бесконечно малая функция:

$$\begin{cases} \kappa p_\omega = -W + \dfrac{\omega\alpha_1(\omega)}{p}, \\ \dfrac{\omega\alpha_1(\omega)}{p} \to +0, \ \ \omega \to +0. \end{cases}$$

Тогда $\kappa p_\omega \to -W, \ \ p_\omega \to \dfrac{-W}{\kappa}, \ \ p(\omega) = \dfrac{-W\omega}{\kappa}(1+o(1))$.

(2) второе слагаемое имеет ненулевой предел:

$$\begin{cases} \kappa p_\omega = -W + \dfrac{\omega\alpha_1(\omega)}{p}, \\ p = O(\omega\alpha_1(\omega)), \ \ \omega \to +0. \end{cases}$$

При данном предположении получим, что

$$p_\omega = O\Big(\alpha_1(\omega) + \omega\frac{d\alpha_1(\omega)}{d\omega}\Big),$$

в то время как правая часть уравнения (14) представляет собой величину порядка $O(1)$. Таким образом, (14) не может быть верным в случае рассматриваемого предположения, так как левая часть мала по сравнению с правой.

Очевидно, что из двух рассмотренных случаев подходящим оказался первый, поэтому найдем приближение нулевого порядка в виде:

$$p_0(\omega) = \frac{-W\omega}{\kappa}. \tag{15}$$

Приближение первого порядка запишем как

$$P_1(\omega) = p_0(\omega) + p_1(\omega), \tag{16}$$

где $p_1(\omega)$ - гладкая функция, такая, что $\lim_{\omega\to+0} p_1(\omega)/p_0(\omega) = 0$. Подставим (16) в (14) и соберем слагаемые с одинаковыми степенями ω, в итоге получим

$$p_{1\omega} = \frac{1}{-W\omega}\omega\alpha_1(\omega) = \frac{1}{-W}\alpha_1(\omega). \tag{17}$$

Из (17) становится понятно, что $p_1(\omega)$ имеет следующий вид:

$$p_1(\omega) = \frac{1}{-W}\int_0^\omega \alpha_1(t)dt. \tag{18}$$

Поэтому, учитывая (15), (16) и (18), получим, что частичная сумма асимптотического ряда первого порядка будет равна

$$P_1(\omega) = \frac{-W\omega}{\kappa} + \frac{1}{-W}\int_0^\omega \alpha_1(t)dt. \tag{19}$$

Найдем выражение для ω, а затем и для u, используя (19) и тот факт, что $p = \omega_\xi$:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{-W\omega}{\kappa} - \frac{1}{W}\int_{\omega_0}^\omega \alpha_1(t)dt,$$

$$\int_0^\omega \frac{dv}{\dfrac{-Wv}{\kappa} - \dfrac{C_1}{W}\displaystyle\int_{v_0}^v \alpha_1(t)dt} = \xi(\omega).$$

Так как проинтегрировать левую часть последнего равенства не удается, то мы рассмотрим более простой случай $\omega_\xi = p_0$, тогда

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{-W\omega}{\kappa},$$

$$\omega(\xi) = e^{-\frac{W\xi}{\kappa}}, \quad u(\xi) = \varphi_1 + e^{-\frac{W\xi}{\kappa}}. \tag{20}$$

Однако эти рассуждения нельзя считать доказательством того, что решение задачи (14) действительно имеет вид $p(\omega) = P_1(\omega) + o(p_1(\omega))$. Требуется строгое обоснование данного утверждения. Для этого воспользуемся методом дифференциальных неравенств. Пусть оператор $\mathcal{L}$ действует на функцию $\omega(\xi) \in \mathcal{C}_2$ по правилу

$$\mathcal{L}\omega = \kappa\omega_{\xi\xi} + W\omega_\xi - \omega\alpha_1(\omega), \tag{21}$$

оператор $\mathcal{M}$ действует на функцию $p(\omega) \in \mathcal{C}_1$, $p(0) = 0$, по правилу

$$\mathcal{M}p = \kappa p p_\omega + Wp(\omega) - \omega\alpha_1(\omega). \tag{22}$$

Тогда задача (14) о движении контрастной структуры с заданной постоянной скоростью W и с граничными условиями примет вид

$$\mathcal{L}\omega(\xi) = 0, \ \ \omega(-\infty) = +0, \ \ \omega(\xi_0) = \omega_0 > 0, \tag{23}$$

последнее условие определяет сдвиг решения автономного уравнения (23) вдоль оси ξ. Мы найдем упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (23) и покажем, что точное решение лежит между ними.

3.1. Нижнее решение в окрестности переднего края фронта КС

Покажем, что нижнее решение задачи (23) можно построить исходя из модифицированной задачи первого порядка

$$\frac{d\tilde\omega}{d\xi} = P_1(\tilde\omega), \ \ \tilde\omega(\xi_0) = \tilde\omega_0, \tag{24}$$

$\tilde\omega_0 > 0$, функция $p(\tilde\omega) = P_1(\tilde\omega)$ найдена в (19), ξ_0 - константа. Решение задачи (24) в неявной форме будет иметь вид

$$\xi(\tilde\omega) = \int_0^{\tilde\omega} \frac{d\omega}{p(\omega)} = \int_0^{\tilde\omega} \frac{d\omega}{\dfrac{-W\omega}{\kappa} + \dfrac{1}{-W}\displaystyle\int_0^\omega \alpha_1(t)dt}. \tag{25}$$

Прямое вычисление $\mathcal{L}\tilde\omega$ дает

$$\mathcal{L}\tilde{\omega} = \Big(\frac{-W\omega}{\kappa} + \frac{1}{-W}\int_0^\omega \alpha_1(t)dt\Big)\Big(\kappa\frac{-W}{\kappa} + \frac{\kappa}{-W}\alpha_1(\omega) + W\Big) - \tilde{\omega}\alpha_1(\tilde{\omega}) =$$
$$= \Big(\frac{-W\omega}{\kappa} + \frac{1}{-W}\int_0^\omega \alpha_1(t)dt\Big)\frac{\kappa}{-W}\alpha_1(\omega) - \tilde{\omega}\alpha_1(\tilde{\omega}) =$$
$$= \omega\alpha_1(\omega) + \frac{1}{-W}\int_0^\omega \alpha_1(t)dt\frac{\kappa}{-W}\alpha_1(\omega) - \tilde{\omega}\alpha_1(\tilde{\omega}) =$$
$$= \frac{1}{-W}\frac{\kappa}{-W}\alpha_1(\omega)\int_0^\omega \alpha_1(t)dt > 0, \quad (26)$$

так что $\tilde{\omega}(\xi)$ есть нижнее решение задачи (23) при любом $\tilde{\omega}_0 > 0$.

Можно доказать, что найдется такое $\check{\xi}_1$, такое $\check{C}_1$: $0 < \check{C}_1 < 1$, что нижнее решение задачи (23), полученное как решение задачи Коши

$$\frac{d\check{\omega}}{d\xi} = p(\check{\omega}), \;\; \check{\omega}(\xi_0) = \check{C}_1\omega(\check{\xi}_1), \quad (27)$$

$p(\check{\omega})$ найдена из (14), $\omega(\xi)$ есть точное решение задачи (23), на промежутке $-\infty < \xi < \check{\xi}_1$ удовлетворяет условию упорядоченности по отношению к точному решению: $\check{\omega}(\xi) < \omega(\xi)$. Заметим, что нижнее решение задачи (23) можно построить также как решение задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{gathered} -\check{W}\check{\omega}_\xi = \kappa\check{\omega}_{\xi\xi} - \check{f}(\check{\omega}), \;\; \check{\omega}(\check{\xi}) = \check{\omega}_1, \\ \check{\omega}_\xi(\check{\xi}) = \check{\omega}_2, \;\; -\infty < \xi < \check{x}_1, \end{gathered} \quad (28)$$

где $\check{f}(\check{\omega}) = \check{C}_1\check{\omega}\alpha_1(\check{\omega})$. Можно доказать, что найдутся такие значения $\check{W}$, функция $\check{f}(\check{\omega})$, $\check{\omega}_1$, $\check{\omega}_2$, что на промежутке $-\infty < \xi < \check{\xi}$ будут верны утверждения

- $\check{\omega}(\xi) < \omega(\xi)$,
- $L\check{\omega} > 0$.

Для доказательства можно взять $\check{W} = W$, $\check{\omega}_1 = \check{C}_1\omega(\check{\xi}_1)$, $\check{\omega}_2 = \check{C}_1\omega(\check{\xi}_1)\dfrac{-W}{\kappa}$, $\check{f}(\check{\omega}) = 0$, причем $0 < \check{C}_1 < 1$. Тогда нижнее решение можно найти также и в явной форме:

$$\check{\omega}(\xi) = \check{C}_1\omega(\check{\xi}_1)e^{-W(\xi-\check{\xi}_1)/\kappa}. \quad (29)$$

3.2. Верхнее решение в окрестности переднего фронта

Верхнее решение $\hat{\omega}$ задачи (23) мы построим как решение задачи Коши

$$\begin{gathered} -\hat{W}\hat{\omega}_\xi = \kappa\hat{\omega}_{\xi\xi} - \hat{f}(\hat{\omega}), \;\; \hat{\omega}(\hat{\xi}) = \hat{\omega}_1, \\ \hat{\omega}_\xi(\hat{\xi}) = \hat{\omega}_2, \;\; -\infty < \xi < \hat{x}. \end{gathered} \quad (30)$$

Можно доказать, что найдутся такие значения $\hat{W}$, функция $\hat{f}(\hat{\omega})$, $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$, что на промежутке $-\infty < \xi < \hat{\xi}_1$ будут верны два утверждения:

- $\hat{\omega}(\xi) > \omega(\xi)$,
- $L\hat{\omega} < 0$.

В частности, можно взять $\hat{W} = W$, $\hat{\omega}_1 = \hat{C}_1\hat{\omega}(\hat{\xi}_1)$, $\hat{\omega}_2 = \hat{C}_1\hat{\omega}(\hat{x}_1)\dfrac{-W}{\kappa}$, $\hat{f}(\hat{\omega}) = 0$, причем $\hat{C}_1 > 1$. Тогда получим явное выражение

$$\hat{\omega}(\xi) = \hat{C}_1\omega(\hat{\xi}_1)e^{-W(\xi-\hat{\xi}_1)/\kappa}. \quad (31)$$

Мы доказали

Теорему 1. Найдутся такие $\check{C}_1$, $\hat{C}_1$: $0 < \check{C}_1 < 1$ и $\hat{C}_1 > 1$, что функции $\hat{\omega}(\xi)$ и $\check{\omega}(\xi)$, полученные из (28) и (30), на некотором промежутке $-\infty < \xi < \xi_1$ являются верхним и нижним решениями задачи (23), причем они и точное решение задачи (23) удовлетворяют условию упорядоченности $\check{\omega}(\xi) < \omega(\xi) < \hat{\omega}(\xi)$ и тем самым образуют упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (23) на промежутке $-\infty < \xi < \xi_1$. Следовательно, точное решение задачи (23) заключено между двумя функциями вида (29) и (31). Разумеется, этот вывод верен только в некоторой окрестности $-\infty < \xi < \xi_1$, или, что то же самое, в некоторой правой полуокрестности точки $\omega = 0$, этого нам вполне достаточно, так как мы в этом разделе изучаем переднюю часть фронта КС.

3. ПРОФИЛЬ ЗАДНЕЙ ЧАСТИ ФРОНТА ВПС

Теперь рассмотрим профиль ВПС в окрестности задней части фронта, где $u(\xi)$ примыкает к уровню φ_3. Фронт по-прежнему перемещается справа налево со скоростью $W < 0$, а $u_\xi > 0$ при всех ξ. Пусть

$$u = \varphi_3 + \omega,$$

$\omega \to -0$ при $\xi \to +\infty$, и в некоторой окрестности значения $\omega = -0$ справедливо равенство

$$f(\varphi_3 + \omega) = \omega\alpha_3(\omega). \quad (32)$$

Тогда ω удовлетворяет уравнению

$$\kappa\omega_{\xi\xi} + W\omega_\xi - \omega\alpha_3(\omega) = 0.$$

Учитывая условие $\omega \to -0$ при $\xi \to +\infty$, получим из (11) для определения $p(\omega)$ задачу Коши

$$\begin{cases} -\kappa p p_\omega - pW = -\omega\alpha_3(\omega), \ \ \omega < 0, \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Решение (33) по аналогии с уже рассмотренным случаем будем строить в виде асимптотического ряда. Заметим, что $p(\omega) \to +0$, а $p_\omega(\omega) \to -0$ при $\omega \to -0$ и, таким образом, в (33) все слагаемые левой и правой частей положительны.

Найдем условие, при котором будет справедлива система (33). Для этого нам снова понадобится рассмотреть несколько случаев:

(1) Пусть $\dfrac{dp}{d\omega} \to \mathrm{const} \neq 0$

$$\begin{cases} -\kappa p_\omega - W = -\dfrac{\omega\alpha_3(\omega)}{p}, \\ \dfrac{-\omega\alpha_3(\omega)}{p} \to 0, \ \ \omega \to -0. \end{cases}$$

При данном предположении мы получаем, что в правой части уравнения находится бесконечно малая величина некоторого порядка малости, а слева - ненулевое положительное число. Таким образом, случай $\dfrac{dp}{d\omega} \to \mathrm{const} \neq 0$ оказывается неподходящим, так как правая часть мала по сравнению с левой.

(2) Пусть p - функция порядка $\omega\alpha_3(\omega)$. Тогда

$$\begin{cases} -\kappa p_\omega - W = -\dfrac{\omega\alpha_3(\omega)}{p}, \\ p = O(\omega\alpha_3(\omega)), \ \ \omega \to -0, \end{cases}$$

причем $p_\omega = O\big((\alpha_3(\omega) + \omega\dfrac{d\alpha_3(\omega)}{d\omega})\big)$. Первое слагаемое в левой части уравнения пренебрежимо мало по сравнению со вторым, которое представляет собой величину порядка $O(1)$, а правая часть уравнения также является величиной порядка $O(1)$. Таким образом, (33) выполняется в случае второго предположения, так как левая и правая части оказываются соизмеримыми. В итоге приближение нулевого порядка запишем в виде:

$$p_0(\omega) = \frac{\omega\alpha_3(\omega)}{W}. \tag{34}$$

Приближение первого порядка запишем как

$$P_1(\omega) = p_0(\omega) + p_1(\omega), \tag{35}$$

где $p_1(\omega)$ - гладкая функция, такая, что $\lim_{\omega\to 0} p_1(\omega)/p_0(\omega) = 0$. Подставим (35) в (33) с учетом (34) и соберем слагаемые с одинаковыми степенями ω, в итоге получим

$$p_1 = \frac{\kappa\omega\alpha_3(\omega)(\alpha_3(\omega) + \omega\dfrac{d\alpha_3(\omega)}{d\omega})}{W^3}. \tag{36}$$

Таким образом, получим, что частичная сумма асимптотического ряда первого порядка для задней части фронта будет равна

$$P_1(\omega) = \frac{\omega\alpha_3(\omega)}{W} + \frac{\kappa\omega\alpha_3(\omega)(\alpha_3(\omega) + \omega\dfrac{d\alpha_3(\omega)}{d\omega})}{W^3}. \tag{37}$$

Учитывая (37), найдем выражение для $\omega(\xi)$ в рассматриваемой области:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\omega\alpha_3(\omega)}{W} + \frac{\kappa\omega\alpha_3(\omega)\Big(\alpha_3(\omega) + \omega\dfrac{d\alpha_3(\omega)}{d\omega}\Big)}{W^3},$$

отсюда найдем в неявной форме выражение для асимптотики переходного слоя:

$$\int_0^\omega \frac{dv}{\dfrac{v\alpha_3(v)}{W} + \dfrac{\kappa v\alpha_3(v)\Big(\alpha_3(v) + v\dfrac{d\alpha_3(v)}{dv}\Big)}{W^3}} = \xi(\omega). \tag{38}$$

Равенство (38) представляет собой выражение для $\omega(\xi)$ в неявном виде. Для того, чтобы строго обосновать тот факт, что $p(\omega) = P_1(\omega) + o(p_1(\omega))$ в задней части фронта, снова воспользуемся методом дифференциальных неравенств, в рамках которого построим верхнее и нижнее решения и сформулируем следующую теорему (детали доказательства аналогичны передней части фронта):

Теорема 2. Пусть оператор $\mathcal{L}$ действует на функцию $\omega(\xi) \in \mathcal{C}_2$ по правилу

$$\mathcal{L}\omega = \kappa\omega_{\xi\xi} + W\omega_\xi - \omega\alpha_3(\omega), \tag{39}$$

а задача (33) о движении контрастной структуры с заданной постоянной скоростью W и с граничными условиями принимает вид

$$\mathcal{L}\omega(\xi) = 0, \ \ \omega(+\infty) = +0, \ \ \omega(\xi_0) = \omega_0 < 0. \tag{40}$$

Тогда найдутся такие $\check{C}_3$, $\hat{C}_3$: $0 < \check{C}_3 < 1$ и $\hat{C}_3 > 1$, что для них можно подобрать функции $\hat{\omega}(\xi)$ и $\check{\omega}(\xi)$, которые на некотором промежутке $\xi_3 < \xi < +\infty$ являются верхним и нижним решениями задачи (40), причем они и точное решение задачи (40) удовлетворяют условию упорядоченности $\check{\omega}(\xi) < \omega(\xi) < \hat{\omega}(\xi)$ и тем самым образуют упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (40) на промежутке $\xi_3 < \xi < +\infty$.

4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ — ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим частный случай задачи (1), в котором

$$\alpha(\delta u) = |\delta u|^{\theta-1} e^{-\gamma/|\delta u|},$$

а $f_1(u)$ и $f_3(u)$ выражаются следующим образом:

$$f_1(u) = C_1 \delta u_1 |\delta u_1|^{\theta_1 - 1} e^{-\gamma_1/|\delta u_1|},$$

$$f_3(u) = C_3 \delta u_3 |\delta u_3|^{\theta_3 - 1} e^{-\gamma_3/|\delta u_3|},$$

где $C_{1;3} > 0$, $\gamma_{1;3} > 0$, параметры $\theta_{1;3} \neq 0$ могут быть любого знака, т.е. функция плотности источников в правой части основного уравнения задачи (1) носит экспоненциально-степенной характер.

Тогда в окрестности передней части фронта, где $u = \varphi_1 + \omega$, $\omega \to +0$ при $\xi \to -\infty$, справедливо равенство

$$f(\varphi_1 + \omega) = \frac{C_1}{\omega^{\theta_1}} e^{-\gamma_1/\omega}. \tag{41}$$

В результате мы можем записать задачу Коши, являющуюся модификацией задачи (14):

$$\begin{cases} \kappa p p_\omega = -pW + \dfrac{C_1}{\omega^{\theta_1}} e^{-\gamma_1/\omega}, \ \ \omega > 0, \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Решение (42) в виде асимптотического разложения до первого порядка с учетом $\alpha_1(\omega) = \omega^{-\theta_1 - 1} e^{-\gamma_1/\omega}$ и тогда (19) будет иметь следующий вид:

$$P_1(\omega) = p_0 + p_1 = \frac{-W\omega}{\kappa} - \frac{C_1}{\gamma_1 W} \omega^{1-\theta_1} e^{-\gamma_1/\omega}. \tag{43}$$

С учетом $p = \omega_\xi$ и только что найденного разложения получим выражение для ω, а затем и для u:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{-W\omega}{\kappa} - \frac{C_1}{\gamma_1 W} \omega^{1-\theta_1} e^{-\gamma_1/\omega},$$

$$\int_0^\omega \frac{dv}{\frac{-Wv}{\kappa} - \frac{C_1}{\gamma_1 W} v^{1-\theta_1} e^{-\gamma_1/v}} = \xi(\omega).$$

Из-за сложности интегрирования левой части полученного равенства разберем более простой случай $\omega_\xi = p_0$, тогда

$$\omega(\xi) = e^{-\frac{W\xi}{\kappa}}, \tag{44}$$

$$u(\xi) = \varphi_1 + e^{-\frac{W\xi}{\kappa}}. \tag{45}$$

В окрестности задней части фронта, где $u = \varphi_3 + \omega$, $\omega \to -0$ при $\xi \to +\infty$, верно равенство

$$f(\varphi_3 + \omega) = \frac{C_3}{\omega |\omega|^{\theta_3 - 1}} e^{-\gamma_3/|\omega|} = \frac{C_3}{\omega (-\omega)^{\theta_3 - 1}} e^{\gamma_3/\omega}. \tag{46}$$

После этого запишем задачу Коши, являющуюся модификацией задачи (33):

$$\begin{cases} -\kappa p p_\omega - pW = -\dfrac{C_3}{\omega(-\omega)^{\theta_3 - 1}} e^{\gamma_3/\omega}, \ \ \omega < 0, \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Решение (47) в виде асимптотического разложения до первого порядка с учетом $\alpha_3(\omega) = (-\omega)^{-\theta_3 - 1} e^{\gamma_3/\omega}$ и (37) будет иметь следующий вид:

$$P_1(\omega) = \frac{C_3 \omega (-\omega)^{-\theta_3 - 1} e^{\gamma_3/\omega}}{W} + \frac{\kappa {C_3}^2}{W^3} (\omega(-\omega)^{-2\theta_3 - 2} + \\ + (\theta_3 + 1)\omega^2 (-\omega)^{-2\theta_3 - 3} - \gamma_3 (-\omega)^{-2\theta_3 - 2}) e^{2\gamma_3/\omega}.$$

С учетом $p = \omega_\xi$ и только что найденного разложения получим выражение для ω, а затем и для u:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{C_3 \omega (-\omega)^{-\theta_3 - 1} e^{\gamma_3/\omega}}{W} + \frac{\kappa {C_3}^2}{W^3} (\omega(-\omega)^{-2\theta_3 - 2} + (\theta_3 + 1)\omega^2 (-\omega)^{-2\theta_3 - 3} - \gamma_3 (-\omega)^{-2\theta_3 - 2}) e^{2\gamma_3/\omega},$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{dv}{\frac{C_3 v (-v)^{-\theta_3 - 1} e^{\gamma_3/v}}{W} + \frac{\kappa {C_3}^2}{W^3} (v(-v)^{-2\theta_3 - 2} + (\theta_3 + 1) v^2 (-v)^{-2\theta_3 - 3} - \gamma_3 (-v)^{-2\theta_3 - 2}) e^{2\gamma_3/v}} = \xi(\omega) - \xi_0,$$

где $\omega < 0$, $\omega_0 < \omega$, $\xi_0 = \text{const}$.

Из-за сложности интегрирования левой части рассмотрим приближение $\omega_\xi = p_0$, тогда

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{dv}{\left(\dfrac{C_3 v (-v)^{-\theta_3 - 1} e^{\gamma_3/v}}{W}\right)} = \xi(\omega) - \xi_0. \tag{48}$$

Найти явное выражение для $\omega(\xi)$ удается только при определенных значениях параметров θ_3 и γ_3. Рассмотрим случай, когда $\theta_3 = -2, \gamma_3 = 1$, тогда

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{dv}{\frac{-C_3 v^2 e^{1/v}}{W}} = \xi(\omega) - \xi_0, \tag{49}$$

$$-\frac{W}{C_3} \int_{\omega_0}^{\omega} v^{-2} e^{-1/v} dv = \xi(\omega) - \xi_0, \tag{50}$$

$$\xi(\omega) - \xi_0 = -\frac{W}{C_3} (e^{-1/\omega} - e^{-1/\omega_0}), \tag{51}$$

$$\omega(\xi) = -\frac{1}{\ln\left(-\dfrac{C_3(\xi-\xi_0)}{W} + e^{-1/\omega_0}\right)},$$
$$u(\xi) = \varphi_3 - \frac{1}{\ln\left(-\dfrac{C_3(\xi-\xi_0)}{W} + e^{-1/\omega_0}\right)}. \tag{52}$$

5. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ Р–Д

5.1. Пример функции плотности источников, для которой можно аналитически найти профиль КС

Приведем пример явно заданной функции $f(u)$, для которой верны сформулированные ранее условия. Мы проведем компьютерный эксперимент, в котором решим численно задачу Коши (1) и сравним результаты численного счета с аналитическими выражениями бегущей квазиволны. Для численного моделирования запишем задачу (1) в равносильном виде (разрешенной относительно производной по времени):

$$\begin{cases} u_t = Vu_x + \varepsilon\kappa u_{xx} - \varepsilon^{-1}f(u),\ x\in(a,b), \\ u(x,t_0)=u_0(x),\ u_x(a,t)=\tilde{u}_x(a,t),\ u_x(b,t)=\tilde{u}_x(b,t). \end{cases} \tag{53}$$

Для большей ясности результатов положим $V = 0$. Здесь $\tilde{u}(x,t) = \tilde{v}(x - Wt)$ есть точное решение уравнения (7). Мы сформируем выражение для $f(u)$, удовлетворяющее условиям (13), (32), (41), (46). В верхней полуокрестности нижнего корня $(\varphi_1, \varphi_1 + \delta)$ положим $u = \varphi_1 + \omega$, далее зададим функцию плотности источников в виде

$$f_1(\omega) = \varepsilon W Q_1(\omega) + \varepsilon^2\kappa Q_1(Q_1)_\omega, \tag{54}$$

где $\omega > 0$,

$$\frac{d\omega}{dx} = Q_1(\omega) = \frac{-W}{\kappa}\omega + \frac{C_1}{-W\beta_1}e^{-\beta_1/\omega}. \tag{55}$$

Прямое вычисление (54)[fpp1] дает в этом случае

$$f_1(\omega) = \frac{C_1}{\omega}e^{-\beta_1/\omega}\left(1 + \frac{\kappa C_1}{\beta\omega W^2}e^{-\beta_1/\omega}\right), \tag{56}$$

что соответствует (13), (32), (41), (46) при

$$\alpha_1(\omega) = \frac{C_1}{\omega^2}e^{-\beta_1/|\omega|},$$

причем теперь в соответствии с (3), (4), (5) допустимо как $\omega > 0$, так и $\omega < 0$.

В окрестности заднего фронта возьмем

$$\frac{d\omega}{d\xi} = Q_3(\omega) = \frac{C_3}{-W}\omega^2 e^{-\beta_3/|\omega|}. \tag{57}$$

Задний фронт образуется в области $\omega_b < \omega < 0$, так что (57) равносильно

$$\omega_3(x) = \frac{-\beta_3}{\ln\left(e^{-\beta_3/\omega_b} + \frac{C_3}{-W}\beta_3(x - x_b)\right)}. \tag{58}$$

Теперь найдем функцию $f(\omega)$ в явном виде:

$$f_3(\omega) = WQ_3(\omega) + \kappa Q_3 Q_{3\omega} = \\ = -C_3\omega^2 e^{\beta_3/\omega}\left(1 - \frac{\kappa C_3}{W^2}e^{\beta_3/\omega}(2\omega - \beta_3)\right). \tag{59}$$

Теперь определим эту функцию в полной окрестности верхнего корня:

$$f_3(\omega) = C_3\omega|\omega|e^{-\beta_3/|\omega|}\left(1 - \frac{\kappa C_3}{W^2}e^{\beta_3/|\omega|}(2\omega - \beta_3)\right). \tag{60}$$

Эта функция имеет вид (2), (3) при

$$\alpha_3(\omega) = C_3|\omega|e^{-\beta_3/|\omega|}.$$

Наконец, на промежутке $u_a < u < u_b$ определим $f(u)$ так, чтобы эта функция имела ровно один простой корень. Для этого используем сплайн третьей степени, детали опустим, так как они не важны.

5.2. Численный алгоритм решения начально–краевой задачи

Численный алгоритм решения задачи (53) используем метод частичной дискретизации:

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = W\dfrac{u_{m+1} - u_{m-1}}{h} + \varepsilon\kappa\dfrac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} - \varepsilon^{-1}f(u_m), \\ \dfrac{du_0}{dt} = \alpha_1(t),\quad \dfrac{du_n}{dt} = \alpha_2(t), \end{cases} \tag{61}$$

где $x_m = a + mh$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\alpha_1(t) = -W\left.\dfrac{d\tilde{u}(x,t)}{dx}\right|_{x=a}$, $\alpha_2(t) = -W\left.\dfrac{d\tilde{u}(x,t)}{dx}\right|_{x=b}$.

5.3. Результаты численного моделирования задачи с эталонными начальными условиями

Покажем сначала, что численный алгоритм дает решение в виде движущейся КС для случая, когда на-

чальные данные заданы в виде функции $u(x, t_0)$, определенной явно в виде (10). На рис. 1 показана серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры $u(x, t_k)$, $t_k = t_0 + k\tau$. Параметры задачи: размер области $a = -1$, $b = 1$, число ячеек пространственной сетки $n = 512$. Аналитически найденная скорость дрейфа $W_{\text{analytical}} = -0{,}3$. Вычисление скорости дрейфа КС по численному решению дает совпадение скорости дрейфа с аналитическим выражением с точностью 4 знака после десятичной точки: $W_{\text{numerical}} = -0.29998$.

5.4. Сравнение аналитического и численного решения в области переднего участка КС

На рис. 2 мы сравниваем аналитическое и численное решение в области переднего участка фронта КС в логарифмическом масштабе: кривая 1 показывает $\ln \tilde{u}(x, \tilde{t})$, кривая 2 (красного цвета) показывает $\ln u(x, \tilde{t})$ для одного и того же момента времени. По горизонтальной оси отложена координата x. При точном выполнении экспоненциального примыкания решения к стационарному уровню в области переднего участка фронта контрастной структуры эти две кривые на рис. 2 будут совпадающими прямыми линиями. Отличие в правой части рисунка соответствует переходу от области экспоненциального решения к области переходного слоя, где отличие от экспоненциальной функции становится заметным.

5.5. Сравнение аналитического и численного решения в области заднего участка КС

На рис. 3 мы сравниваем аналитическое и численное решение в области заднего участка фронта КС. Из (58) следует, что в области заднего участка верно равенство

$$e^{\beta_3/(-\omega_{30})} + \frac{C_3}{-W}\beta_3(x - x_{30}) = e^{\beta_3/(-\omega_3)}.$$

На кривой 1 показана величина $e^{\beta_3/(-\omega_{30})} + \frac{C_3}{-W}\beta_3(x - x_{30})$, кривая 2 (красного цвета) показывает функцию

$$e^{\beta_3/(-\omega_3)}$$

для одного и того же момента времени. По горизонтальной оси отложена координата x. Отличие в левой части рисунка соответствует переходу от области степенно–логарифмического решения к области переходного слоя, где отличие от указанной стандартной функции становится заметным.

5.6. Численное моделирование решения с возмущенными в области переднего и заднего участков КС начальными данными

Покажем теперь, как развивается процесс, описываемый уравнением реакции–диффузии (61), при наличии возмущений в начальных данных по сравнению с эталонной функцией $\tilde{u}(x)$, которая обеспечивает дрейф КС без изменения ее профиля и находится из уравнения (10).

Мы отдельно рассмотрим два случая,

- возмущение в области переднего и заднего участков фронта КС, где профиль КС может быть представлен сходящимися асимптотическими рядами, начальные члены которых найдены в (19) и (37),
- возмущение в средней части КС, где возможно только численное решение.

На рис. 4 показана серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры $u(x, t_k)$, при наличии возмущений начальных данных в области переднего и заднего участков КС. Методика верхнего и нижнего решений в результате дает строгое обоснование того факта, что при возмущении начальных данных, которое не выводит возмущенные начальные данные за границы криволинейной полосы, ограниченной верхним и нижним решениями, решение задачи (61) останется внутри той же полосы, которая будет без деформации перемещаться со временем со скоростью W.

Мы на одном рисунке показываем одновременно возмущение переднего и заднего участков КС, так как возмущение переднего участка не оказывает влияния на КС в области заднего участка и наоборот. Мы видим, что значительные по сравнению с решением возмущения быстро убывают, и после короткого переходного процесса решение выходит на стандартную функцию $\tilde{u}(x)$, определяемую уравнением (10). Таким образом, в данном примере компьютерная модель показывает, что решение но только остается внутри полосы, но также и стремится асимптотически к функции $\tilde{u}(x - W(t - t^\star))$, причем значение $t^\star$ не может быть априорно найдено, так как зависит от возмущающей функции $\delta\tilde{u}(x)$. Разумеется, мы не формулируем это недоказанное утверждение в виде теоремы, однако для всех исследованных нами задач, соответствующих заданной изначально парадигме степенно–экспоненциально убывающей функции плотности источников в окрестности крайних корней это утверждение выполняется.

5.7. Численное моделирование решения с возмущенными в центральной области начальными данными внутреннего переходного слоя КС

Теперь покажем поведение системы реакции–диффузии в случае возмущения начальных данных

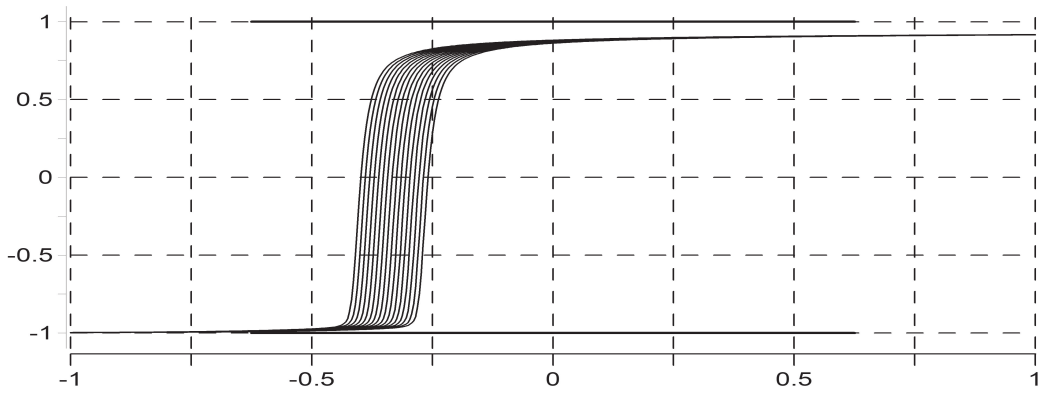

Рис. 1: Серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры с начальными данными, точно соответствующими решению уравнении (6), (7), (8) с граничными условиями (9)

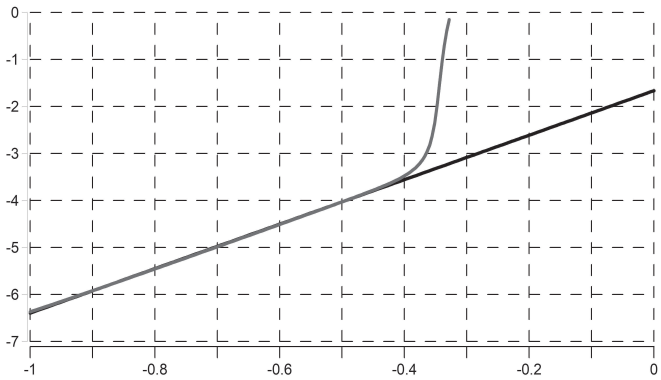

Рис. 2: Сравнение численного и аналитического решения в области передней части фронта КС в логарифмическом масштабе

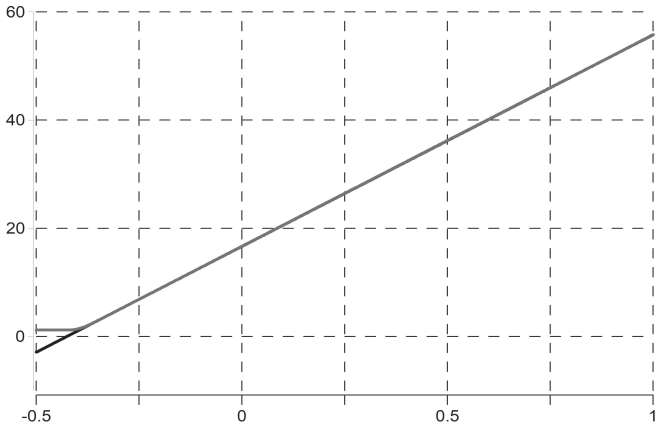

Рис. 3: Сравнение численного и аналитического решения в области задней части фронта КС

в центральной области внутреннего переходного слоя. На рис. 5 показана серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры $u(x, t_k)$ при наличии возмущений начальных данных в области переходного слоя КС.

Начальные данные на этом рисунке образуют КС с тремя переходными слоями чередующейся полярности. После переходного процесса решение выходит на стандартную функцию $\tilde{u}(x)$, определяемую уравнением (10). Второй и третий (считая слева направо) переходные слои взаимно уничтожаются, в результате решение в виде бегущей квазиволны получает начальные данные в виде контрастной структуры, сосредоточенной в окрестности левого переходного слоя начальных условий.

5.8. Численное моделирование решения с экспоненциальной плотностью источников

Теперь рассмотрим задачу, для которой плотность источников задана явно более простым выражением

$$f(u, x) = C\omega_1 e^{-\gamma_1/|\omega_1|}\omega_2\omega_3 e^{-\gamma_3/|\omega_3|}, \qquad (62)$$

где

$$\omega_{1;2;3} = u - U_{1;2;3}(x), \qquad (63)$$

но теперь найти профиль бегущей квазиволны аналитически не представляется возможным. Эта функция $f(u, x)$ также удовлетворяет условиям (4) или (5). На рис 6 показан пример функции вида (62).

На рис. 7 показана серия графиков профиля движущейся контрастной структуры $u(x, t_k)$, $t_k = k \cdot \tau$, для функции (62). Компьютерная модель в этом случае показывает экспоненциальный профиль переднего участка фронта КС и логарифмический — заднего участка.

Возмущение начальных данных как в области асимптотических участков фронта КС, так и в центральной области показывает устойчивость и асимптотическую устойчивость решения, рис. 8.

При возмущении средней области фронта КС возможно образование конфигурации с тремя переходными слоями чередующейся полярности. Разумеется, возможны сколь угодно сложные начальные конфигурации. Достаточно рассмотреть три слоя чередующейся

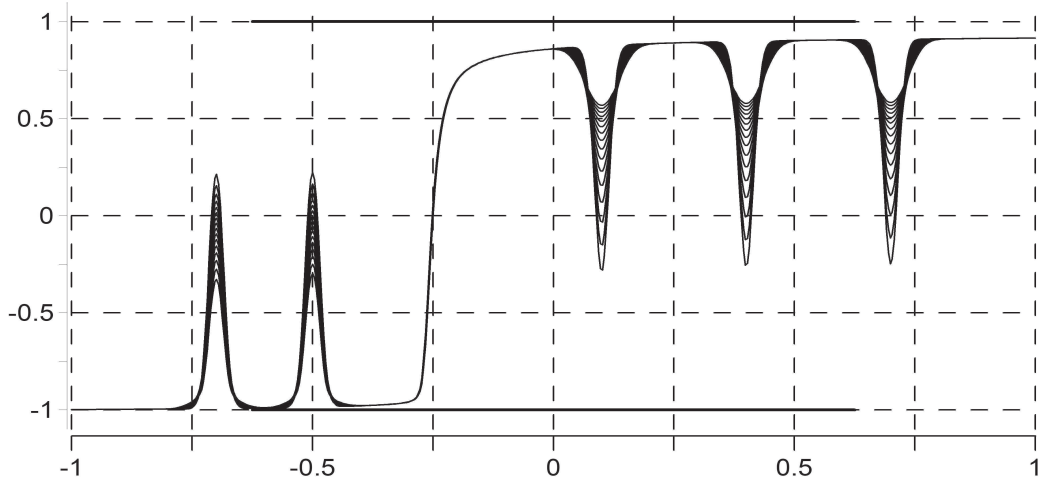

Рис. 4: Серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры с возмущенными в области переднего и заднего участков КС начальными данными

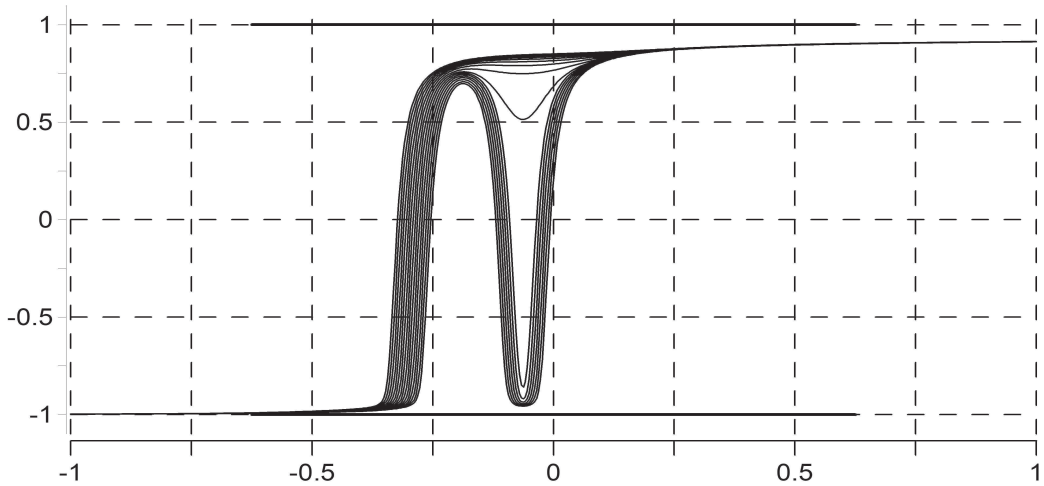

Рис. 5: Серия мгновенных снимков профиля движущейся контрастной структуры с возмущенными начальными данными в области переднего и заднего (асимптотических) участков фронта контрастной структуры

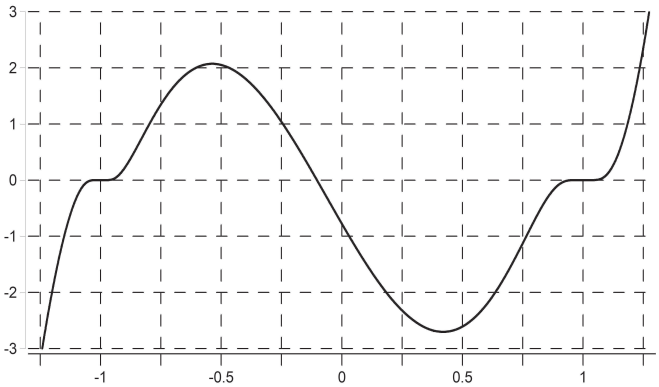

Рис. 6: Функция плотности источников с корнями бесконечной степени вырождения

полярности, остальные более сложные конфигурации сводятся к такой. Эволюция такой структуры, вообще говоря, не описывается асимптотическими методами, так как эффекты взаимодействия соседних переходных слоев приводят к решениям, для которых представление в виде бегущей квазиволны локально не является справедливым. На следующем рис. 9 показана конфигурация, для которой второй и третий (справа налево) переходные слои сливаются и взаимно аннигилируют.

На следующем рис. 10 показана конфигурация, для которой первый и второй (справа налево) переходные слои сливаются и взаимно аннигилируют. Таким образом, малые изменения начальных данных могут приводить к значительному изменению конфигурации движущейся контрастной структуры.

Таким образом, контрастные структуры с несколькими переходными слоями на старте могут приводить к неустойчивой по отношению к малой вариации на-

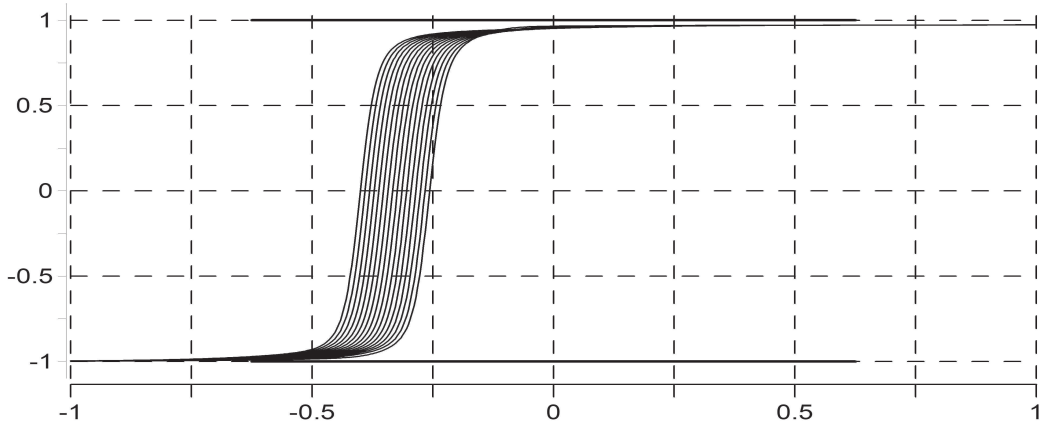

Рис. 7: Серия мгновенных снимков профиля движущейся КС для функции плотности источников с показательно–экспоненциально вырожденными крайними корнями

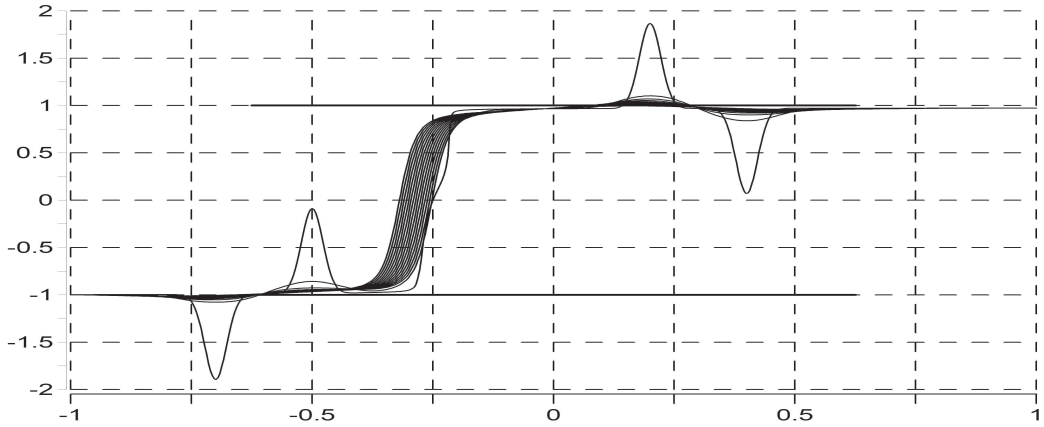

Рис. 8: Серия мгновенных снимков профиля движущейся КС с возмущенными начальными данными в области передней и задней частей фронта КС для показательно–экспоненциальной функции плотности источников (62)

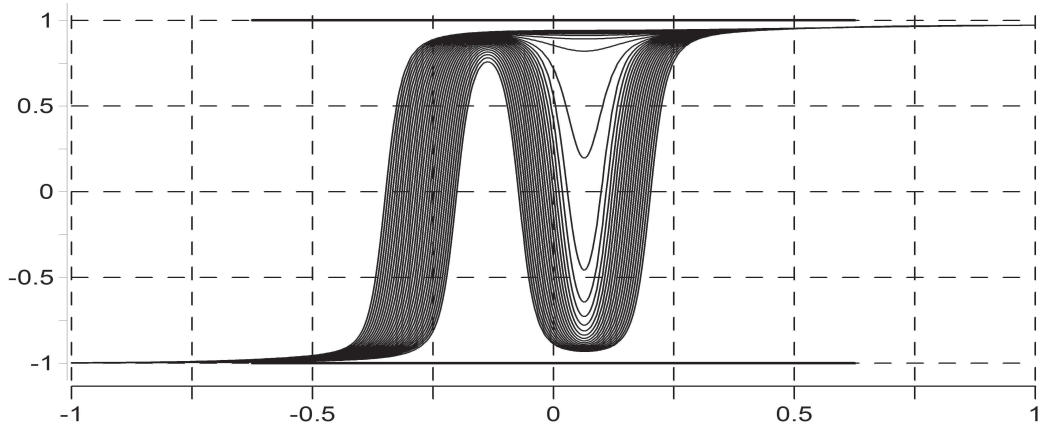

Рис. 9: Серия мгновенных снимков профиля движущейся КС с возмущенными начальными данными в средней области фронта КС для функции плотности источников с показательно–экспоненциально вырожденными крайними корнями. Второй и третий (справа налево) переходные слои сливаются и взаимно аннигилируют

чальных данных структуре, в которой положение единственного переходного слоя, остающегося после завершения процесса релаксации, может соответствовать любому из начальных слоев в зависимости от их расположения в начале процесса.

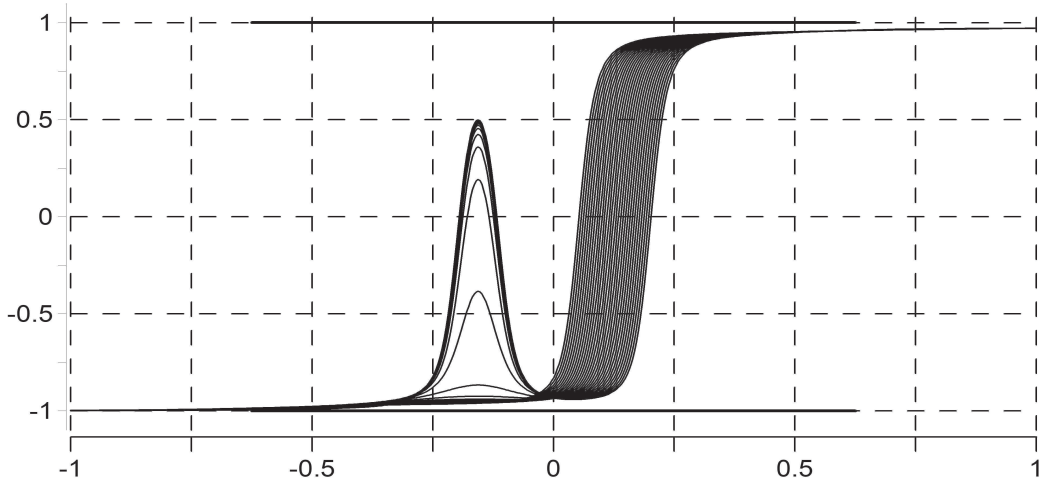

Рис. 10: Серия мгновенных снимков профиля движущейся КС с возмущенными начальными данными в средней области фронта КС. Возмущение начальных данных в этом примере обеспечивает взаимную аннигиляцию первого и второго (слева направо) переходных слоев, после чего остается третий слой, который начинает регулярное движение в соответствии с законами, установленными в настоящей работе

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение реакции–диффузии, в котором функция плотности источников имеет вырожденные корни, в окрестности которых функция убывает быстрее любой степенной функции, порождает движущуюся контрастную структуру, имеющую необычный характер убывания заднего участка фронта. Вместо обычного для таких задач с простыми корнями экспоненциального убывания задний участков стремится к своему стационарному значению более медленно. Для случая степенно-экспоненциального корня зависимость получается степенно–логарифмической. Эта особенность контрастных структур может иметь значение в практически важных приложениях, таких как теория горения, распространения примесей, экология, медицина.

Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору В. Ф. Бутузову и профессору Н. Н. Нефедову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00690-а).

[1] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. **4**, №. 3. С. 799.
[2] *Butuzov V. F, Vasilieva A. B.* // Singularly Pertubed Problems with Boundary and Interior Layers: Theory and Application. New York: John Wiley Sons, 1998.
[3] *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R.* // Journal of Mathematical Sciences. 2004. **121**, №. 1. P. 1971.
[4] *Orlov A., Levashova N., Burbaev T.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. **586**, №. 012003.
[5] *Vasilieva A., Nikitin A., Petrov A.* // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 1994. **78**, №. 1-4. P. 261.
[6] *Bykov A. A., Popov V. Yu, Sokoloff D. D., Shukurov A. M.* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1997. **292**, №. 1. P. 1.
[7] *Moss D., Petrov A., Sokoloff D.* // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2000. **92**, №. 1-2. P. 129.
[8] *Оран Э., Борис Дж.* // Численное моделирование реагирующих потоков. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
[9] *Бутузов В. Ф., Белошапко В. А.* // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, №. 5. С. 515.
[10] *Белошапко В. А., Бутузов В. Ф.* // ЖВМиМФ. 2016. **56**, №. 8. С. 1428.
[11] *Бутузов В. Ф.* // Математические заметки. 2013. **94**, №. 1. С. 68.
[12] *Бутузов В. Ф., Бычков А. И.* // Дифференциальные уравнения. 2013. **49**, №. 10. С. 1295.
[13] *Бутузов В. Ф., Бычков А. И.* // ЖВМиМФ. 2016. **56**, №. 4. С. 605.
[14] *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р.* // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, №. 3. С. 247.
[15] *Быков А. А., Ермакова К. Е.* // ЖВМиМФ. 2018. **58**, №. 12. С. 2060.
[16] *Быков А. А., Ермакова К. Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. №. 6. С. 20.
[17] *Pao C. V.* // Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum, 1992.
[18] *Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н.* // ЖВМиМФ. 2010. **50**, №. 2. С. 276.
[19] *Найфе А. Х.* // Методы возмущений. Мир, 1976.

Contrasting structures as solutions of the reaction-diffusion problem with an arbitrary roots order

A. A. Bykov[a], **K. E. Ermakova**[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]*abkov@yandex.ru,* [b]*kristinaermakova1908@gmail.com*

In this paper we consider the initial–boundary value problem, based on the reaction-diffusion equation in a homogeneous and inhomogeneous medium This equation possess the solutions known as a non-stationary contrasting structures. The right side of the equation is a given smooth function with three ordered roots. Moreover, in the vicinity of the first and the last roots this function tends to zero faster than the first power of the coordinate. It can be also be a power function with the exponent greater than one. It can also be a function that decreases faster than any power of the coordinate, for example, exponential. Thus this paper generalises the results of a series of papers by V. F. Butuzov and his colleagues. Also we discuss the new problem in which the density function is power–exponential. We show that the nose and tail regions of the contrasting structure tend to their stationary levels in different ways. The tail part tends to the stationary level more slowly than the nose region. The results are strictly substantiated by the differential inequalities method. The use of differential inequalities for the reaction – diffusion problems with a small parameter was developed H. N. Nefedov. The results are consistent with the results of computer simulation also presented in the paper.

PACS: 02.30.Jr.
Keywords: nonlinear differential equation, asymptotics, contrasting structure, differential inequalities.
Received 2018.

Сведения об авторах

1. Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33; e-mail: abkov@yandex.ru.
2. Ермакова Кристина Евгениевна — аспирантка; e-mail: kristinaermakova1908@gmail.com.