Итерационный способ приближённого решения возмущённого дифференциального уравнения первого порядка

Е. Е. Букжалёв[1,2*]

[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

[2]*Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Россия, 125190, Москва, ул. Усиевича, 20*

(Статья поступила 01.07.2019; Подписана в печать 07.08.2019)

Предложено развитие итерационного подхода к исследованию регулярно возмущённых дифференциальных уравнений. С помощью этого подхода построена последовательность, сходящаяся (по норме пространства непрерывных функций) к решению задачи Коши для возмущённого по малому параметру сильно нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Данная последовательность сходится к решению задачи также и в асимптотическом смысле. Доказательство сходимости (как обычной, так и асимптотической) построенной последовательности и оценка скорости сходимости основаны на теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства.

PACS: 02.30.Hq УДК: 517.928.1

Ключевые слова: теория возмущений, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье итерационный метод исследования возмущённых уравнений применяется к задаче Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (см. (1)–(2)). Данный метод позволяет построить последовательность $\psi(\varepsilon) = \{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся (при достаточно малых ε) по норме пространства $C[0,X]$ функций, непрерывных на $[0,X]$, к точному решению $y(\cdot;\varepsilon)$ указанной задачи. Построение и доказательство сходимости последовательности $\psi(\varepsilon)$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [1]). Поскольку при этом коэффициент сжатия $k(\varepsilon)$ отображения оказывается величиной порядка ε, то отклонение $\psi_n(\cdot;\varepsilon)$ от решения $y(\cdot;\varepsilon)$ (под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0,X]$) составляет $O(\varepsilon^{n+1})$, а значит, полученный результат носит также и асимптотический характер. Такая двойная сходимость получаемых приближений — в обычном и в асимптотическом смыслах — является принципиальным преимуществом итерационного подхода.

Каждый следующий элемент последовательности $\psi(\varepsilon)$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае каждая следующая итерация приближается к $y(\cdot;\varepsilon)$ в асимптотически большое (обратно пропорциональное ε) число раз. Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $\psi(\varepsilon)$ относится к классу не только итерационных, но и асимптотических методов исследования возмущённых уравнений. Подобный метод называют асимптотически-итерационным методом или методом асимптотических итераций (см., например, [2] и [3]), а последовательность $\psi(\varepsilon)$ — асимптотической последовательностью решения $y(\cdot;\varepsilon)$ рассматриваемой задачи.

Идея сочетания асимптотического и итерационного подходов не нова. В работах [4, 5] предложен итерационный процесс построения асимптотической последовательности решения задачи Коши для нормальной системы быстрых и медленных уравнений (соответственно с малым параметром при производной и без него). При этом упрощение, достигаемое за счёт применения итерационного асимптотического метода состоит в понижении размерности исследуемой системы. В отличие от данных работ в настоящей статье упрощение связано с линеаризацией исходного возмущённого дифференциального уравнения на решении невозмущённой задачи. Следует также упомянуть о монографиях [6, 7], в которых асимптотический и итерационный подходы используются для построения сходящихся асимптотических приближений периодических и условно-периодических решений возмущённых уравнений. Отметим, что общим преимуществом итерационных процедур являются сравнительно скромные конечные требования гладкости на входные данные задачи. В случае задачи (1)–(2) для построения всех $\psi_n(\cdot;\varepsilon)$ достаточно выполнения условий (25) на функцию F, в то время как неитерационные подходы, как правило, требуют бесконечной дифференцируемости входных данных.

Настоящая работа продолжает цикл статей, посвящённых применению метода асимптотических итераций к исследованию возмущённых уравнений. Ранее с помощью этого подхода были исследованы задачи Коши для ряда сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений: слабо нелинейного уравнения пер-

*E-mail: bukzhalev@mail.ru

вого порядка с одним и с двумя малыми параметрами (см. [8] и [9]), линейного и слабо нелинейного уравнений второго (см. [10–12]) и произвольного (см. [13–15]) порядков, а также сильно нелинейного уравнения первого порядка (см. [16]).

Далее с помощью индексов y и ε обозначаются частные производные функции F по первому и третьему аргументам соответственно: $\partial_1^i \partial_3^j F =: F_{y^i \varepsilon^j}$.

1. ПОСТАНОВКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного возмущённого дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'(x;\varepsilon) = F(y(x;\varepsilon), x; \varepsilon), \quad x \in (0, X]; \tag{1}$$
$$y(0;\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — параметр возмущения, $X \neq 0$,

$$F, F_y, F_\varepsilon, F_{yy}, F_{y\varepsilon} \in C(\mathbb{R} \times [0, X] \times \mathbb{R}). \tag{3}$$

Замечание. Если бы правая часть уравнения (1) являлась аналитической функцией y и ε, то по теореме Пуанкаре (см., например, [17]) зависимость решения $y(\cdot;\varepsilon)$ задачи (1)–(2) от параметра ε также была аналитичной, то есть $y(x;\varepsilon)$ могло бы быть представлено в виде сходящегося ряда по степеням ε при каждом $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x;\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon\, y_1(x) + \cdots .$$

Подчеркнём, что однородность начального условия (2) нисколько не ограничивает общности, так как мы всегда можем занулить начальное значение, сделав соответствующую замену переменной (сдвиг на константу).

Обозначим $\bar{y}$ решение невозмущённой задачи:

$$\bar{y}'(x) = F(\bar{y}(x), x; 0), \quad x \in (0, X];$$
$$\bar{y}(0) = 0$$

и в целях сокращения изложения определим функцию G:

$$G(u, x; \varepsilon) := F(\bar{y}(x) + u, x; \varepsilon). \tag{4}$$

Поскольку $\bar{y} \in C[0, X]$, то G удовлетворяет тем же условиям гладкости, что и F:

$$G, G_u, G_\varepsilon, G_{uu}, G_{u\varepsilon} \in C(\mathbb{R} \times [0, X] \times \mathbb{R}) \tag{5}$$

(здесь и всюду ниже индексы u и ε означают производные по первому и третьему аргументам соответственно).

Сделаем следующую замену переменной:

$$y(x;\varepsilon) = \bar{y}(x) + z(x;\varepsilon)\, h(x), \tag{6}$$

где

$$h(x) := \exp \int_0^x G_u(0, s; 0)\, ds. \tag{7}$$

Для новой функции $z(\cdot;\varepsilon)$ получаем:

$$z'(x;\varepsilon) = f(z(x;\varepsilon), x; \varepsilon), \quad x \in [0, X]; \tag{8}$$
$$z(0;\varepsilon) = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} f(u, x; \varepsilon) := h(x)^{-1} \big[&G(u\, h(x), x; \varepsilon) - \\ &- G(0, x; 0) - u\, h(x)\, G_u(0, x; 0) \big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что f удовлетворяет тем же условиям гладкости, что и G (см. (5)), и что

$$f(0, x; 0) = f_u(0, x; 0) = 0 \tag{11}$$

при всех $x \in [0, X]$.

Задача (8), (9) равносильна интегральному уравнению

$$\begin{gathered} z(x;\varepsilon) = \int_0^x f(z(s;\varepsilon), s; \varepsilon)\, ds =: \hat{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon))(x), \\ x \in [0, X]. \end{gathered} \tag{12}$$

Замечание. При каждом фиксированном ε под областью определения оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ подразумевается пространство $C[0, X]$. Очевидно, что $\hat{A}(\varepsilon) : C[0, X] \to C[0, X]$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Для всякого неотрицательного C обозначим через $O(C)$ замкнутую C-окрестность функции $\vartheta : x \mapsto 0$ в пространстве $C[0, X]$:

$$O(C) := \big\{ u \in C[0, X] \mid \forall x \in [0, X]\ u(x) \in [-C, +C] \big\},$$

а через $\hat{A}(C, \varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ на $O(C\,|\varepsilon|)$ (определение $\hat{A}(\varepsilon)$ см. в (12)).

Утверждение 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, что $\hat{A}(C_0, \varepsilon) : O(C_0|\varepsilon|) \to O(C_0|\varepsilon|)$ при каждом $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $C_0 \geqslant 0$, $u \in O(C_0\,\varepsilon)$ и $x \in [0, X]$, подействуем оператором $\hat{A}(\varepsilon)$ на функцию u и, учитывая (12) и (11), оценим в точке x получившийся результат (здесь и в доказательстве утверждения 2 для определённости считаем, что $X > 0$):

$$\begin{aligned} \left| \widehat{A}(\varepsilon)(u)(x) \right| &\leqslant \int_0^x |f(u(s), s; \varepsilon)|\, ds \leqslant \\ \leqslant \big\{ (C_0\,\varepsilon)^2\, \|f_{uu}\|(C_0|\varepsilon|, |\varepsilon|) &+ C_0\,\varepsilon^2\, \|f_{u\varepsilon}\|(C_0|\varepsilon|, |\varepsilon|) + \\ &+ |\varepsilon|\, \|f_\varepsilon\|(C_0|\varepsilon|, |\varepsilon|) \big\}\, X = l(C_0, |\varepsilon|)\, |\varepsilon|, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\|\cdot\|(\delta_1,\delta_2)$ — норма пространства $C([-\delta_1,+\delta_1]\times[0,X]\times[-\delta_2,+\delta_2])$.

Из (13) следует, что если

$$l(C_0,|\varepsilon|)\leqslant C_0, \tag{14}$$

то $\hat{A}(C_0,\varepsilon)(u)(x):=\hat{A}(\varepsilon)(u)(x)\in O(C_0|\varepsilon|)$, а значит, $\hat{A}(C_0,\varepsilon):O(C_0|\varepsilon|)\to O(C_0|\varepsilon|)$.

В качестве искомого C_0 можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$C_0>\|f_\varepsilon\|(0,0)\,X. \tag{15}$$

Тогда поскольку $l(C_0,\cdot)$ есть неубывающая функция и $l(C_0,0)<C_0$, то, во-первых, уравнение

$$l(C_0,\varepsilon_0)=C_0 \tag{16}$$

имеет не более одного корня ε_0, причём ε_0 заведомо больше нуля (в случае отсутствия корней считаем, что $\varepsilon_0=+\infty$), и, во-вторых, неравенство (14) справедливо при всех $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,+\varepsilon_0]$. Утверждение доказано.

Далее нам понадобится оценка, являющаяся прямым следствием определения l и ε_0:

$$\begin{gathered}\varepsilon_0\left\{C_0\,\|f_{uu}\|(C_0\varepsilon_0,\varepsilon_0)+\right.\\ \left.+\|f_{u\varepsilon}\|(C_0\varepsilon_0,\varepsilon_0)\right\}X\leqslant l(C_0,\varepsilon_0)/C_0=1.\end{gathered} \tag{17}$$

Пусть ρ — стандартная метрика пространства $C[0,X]$:

$$\rho(u_1,u_2):=\|u_2-u_1\|_{C[0,X]}:=\max_{x\in[0,X]}|u_2(x)-u_1(x)|$$

для любых $u_1,u_2\in C[0,X]$. Заметим, что $C[0,X]$ и $O(C)$ с так определённым расстоянием ρ представляют собой полные метрические пространства.

Утверждение 2. $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ — *сжимающий оператор при каждом* $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$.

Доказательство. Возьмём две произвольные функции u_1 и u_2 из $O(C_0|\varepsilon|)$ и, учитывая (12) и (11), оценим расстояние между $\hat{A}(C_0,\varepsilon)(u_1)$ и $\hat{A}(C_0,\varepsilon)(u_2)$:

$$\begin{gathered}\rho(\hat{A}(C_0,\varepsilon)(u_1),\hat{A}(C_0,\varepsilon)(u_2))=\\ =\max_{x\in[0,X]}\left|\hat{A}(\varepsilon)(u_2)(x)-\hat{A}(\varepsilon)(u_1)(x)\right|=\\ =\max_{x\in[0,X]}\int_0^x\left|f(u_2(s),s;\varepsilon)-f(u_1(s),s;\varepsilon)\right|ds\leqslant\rho(u_1,u_2)\times\\ \times\left\{C_0\,|\varepsilon|\,\|f_{uu}\|(C_0|\varepsilon|,|\varepsilon|)+|\varepsilon|\,\|f_{u\varepsilon}\|(C_0|\varepsilon|,|\varepsilon|)\right\}X.\end{gathered} \tag{18}$$

Из (18) и (17) вытекает, что при любом $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ для коэффициента сжатия $k(C_0,\varepsilon)$ оператора $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ справедливо:

$$\begin{aligned}&k(C_0,\varepsilon)\leqslant\\ &\leqslant|\varepsilon|\left\{C_0\,\|f_{uu}\|(C_0|\varepsilon|,|\varepsilon|)+\|f_{u\varepsilon}\|(C_0|\varepsilon|,|\varepsilon|)\right\}X\leqslant\\ &\leqslant|\varepsilon|\left\{C_0\,\|f_{uu}\|(C_0\varepsilon_0,\varepsilon_0)+\|f_{u\varepsilon}\|(C_0\varepsilon_0,\varepsilon_0)\right\}X\leqslant\\ &\leqslant|\varepsilon|/\varepsilon_0<1.\end{aligned} \tag{19}$$

Утверждение доказано.

Таким образом, к оператору $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ в $O(C_0|\varepsilon|)$ существует единственное решение $z(\cdot;\varepsilon)$ уравнения (12), равносильного задаче (8), (9). Отметим, что единственность решения $z(\cdot;\varepsilon)$ (при всех $\varepsilon\in\mathbb{R}$), причём глобальная (то есть единственность в классе $C[0,X]$), на самом деле сразу вытекает из условий гладкости на функцию F (см. (3)), так что содержательным результатом являются лишь существование решения и его принадлежность $O(C_0|\varepsilon|)$.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ

Свойство сжимаемости оператора $\hat{A}(C_0,\varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $\varphi(\varepsilon)=\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся по норме пространства $C[0,X]$ к точному решению $z(\cdot;\varepsilon)$ задачи (8), (9) при каждом $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$:

$$\begin{gathered}\|z(\cdot;\varepsilon)-z(\cdot;\varepsilon)\|:=\max_{x\in[0,X]}|z(x;\varepsilon)-z_n(x;\varepsilon)|\to0,\\ n\to\infty,\end{gathered}$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0,X]$ (заметим, что для всякого ε_0' из интервала $(0,\varepsilon_0)$ сходимость будет равномерной по ε на множестве $[-\varepsilon_0',+\varepsilon_0']$).

Положим $z_0(x;\varepsilon)\equiv0$. Поскольку $z(\cdot;\varepsilon)\in O(C_0|\varepsilon|)$, то

$$\|z(\cdot;\varepsilon)-z_0(\cdot;\varepsilon)\|=\|z(\cdot;\varepsilon)\|\leqslant C_0\,|\varepsilon|. \tag{20}$$

Далее, для любого натурального n положим

$$\begin{gathered}z_n(x;\varepsilon):=\hat{A}(C_0,\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x)=\hat{A}(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x),\\ x\in[0,X].\end{gathered} \tag{21}$$

Тогда, учитывая (19) и (20), для каждого $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}=:\mathbb{N}_0$ имеем:

$$\begin{gathered}\|z(\cdot;\varepsilon)-z_n(\cdot;\varepsilon)\|\leqslant k(C_0,\varepsilon)^n\,\|z(\cdot;\varepsilon)-z_0(\cdot;\varepsilon)\|\leqslant\\ \leqslant C_0\,\varepsilon_0\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^{n+1}.\end{gathered} \tag{22}$$

Вернёмся к задаче (1)–(2) для $y(\cdot;\varepsilon)$. Опираясь на (6) и (7), определим последовательность $\psi(\varepsilon)=\{y_n(\cdot;\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к решению $y(\cdot;\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}y_n(x;\varepsilon)=\bar{y}(x)+z_n(x;\varepsilon)\,h(x)=\\ =\bar{y}(x)+z_n(x;\varepsilon)\,\exp\int_0^x F_y(\bar{y}(s),s;0)\,ds,\end{gathered} \tag{23}$$

где $x\in[0,X]$, $n\in\mathbb{N}_0$.

При $n\geqslant1$ элементы $y_n(\cdot;\varepsilon)$ с помощью (23), (21), (12), (10) и (4) могут быть выражены непосредственно через $y_{n-1}(\cdot;\varepsilon)$:

$$y_n(x;\varepsilon) = \bar{y}(x) + h(x)\,\hat{A}(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x) = \\ = \bar{y}(x) + \int\limits_0^x K(x,s)\,\big[F(y_{n-1}(s;\varepsilon),s;\varepsilon) - \\ - F(\bar{y}(s),s;0) - (y_{n-1}(s;\varepsilon) - \bar{y}(s))\,F_y(\bar{y}(s),s;0)\big]\,ds =: \\ =: \hat{B}(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot;\varepsilon))(x),$$

где

$$K(x,s) := h(x)\,h(s)^{-1} = \exp\int\limits_s^x F_y(\bar{y}(t),t;0)\,dt.$$

Отметим, что $\hat{B}(C_0,\varepsilon) : \tilde{O}(C_0,\varepsilon) \to \tilde{O}(C_0,\varepsilon)$ при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0,+\varepsilon_0]$ (то есть при тех же ε, что и в утверждении 1), где

$$\tilde{O}(C_0,\varepsilon) := \big\{y \in C[0,X] \mid \forall x \in [0,X]\ y(x) \in [\bar{y}(x) - \\ - |\varepsilon|\,C_0,\ \bar{y}(x) + |\varepsilon|\,C_0]\big\}$$

— замкнутая $(|\varepsilon|\,C_0)$-окрестность функции $\bar{y}$ в пространстве $C[0,X]$, $\hat{B}(C_0,\varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ на $\tilde{O}(C_0,\varepsilon)$. Кроме того, оператор $\hat{B}(C_0,\varepsilon)$ является сжимающим при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ (то есть при тех же ε, что и в утверждении 2).

Теорема. *Пусть функция F и числа ε_0 и C_0 удовлетворяют условиям (3), (16) и (15). Тогда, во-первых, при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ существует единственное решение $y(\cdot;\varepsilon)$ задачи (1)–(2) и, во-вторых, при любых $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ и $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y_n(\cdot;\varepsilon)\| \leqslant C_0\,\varepsilon_0\,e^{\|\bar{F}_y\|\,|X|}\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^{n+1},$$

где $\bar{F}_y : [0,X] \ni x \mapsto F_y(\bar{y}(x),x;0)$.

Доказательство. Поскольку существование и единственность решения $y(\cdot;\varepsilon)$ задачи (1)–(2) являются непосредственными следствиями существования и единственности решения $z(\cdot;\varepsilon)$ задачи (8)–(9) (установленных в предыдущем разделе), то нам остаётся только оценить точность, с которой $y_n(\cdot;\varepsilon)$ приближает $y(\cdot;\varepsilon)$. Для каждых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)$ и $x \in [0,X]$ имеем (см. (6), (23) и (22)):

$$|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)| = |\varepsilon|\,|z(x;\varepsilon) - z_n(x;\varepsilon)|\,h(x) \leqslant \\ \leqslant |\varepsilon|\,\|z(\cdot;\varepsilon) - z_n(\cdot;\varepsilon)\|\,e^{\|\bar{F}_y\|\,|X|} \leqslant \\ \leqslant C_0\,\varepsilon_0\,e^{\|\bar{F}_y\|\,|X|}\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^{n+1}.$$

Теорема доказана.

4. ОСЛАБЛЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ГЛАДКОСТИ

Применение метода асимптотических итераций к задаче (1)–(2) возможно и при более слабых ограничениях на функцию F:

$$F, F_y, F_\varepsilon, F_{yy} \in C(\mathbb{R} \times [0,X] \times \mathbb{R}). \tag{24}$$

В этом случае вместо замены (6) следует сделать замену

$$y(x;\varepsilon) = \bar{y}(x) + z(x;\varepsilon)\,h(x,\varepsilon),$$

где

$$h(x,\varepsilon) := \exp\int\limits_0^x G_u(0,s;\varepsilon)\,ds.$$

Новая функция $z(\cdot;\varepsilon)$ будет решением задачи (8)–(9), в которой

$$f(u,x;\varepsilon) := h(x,\varepsilon)^{-1}\,\big[G(u\,h(x,\varepsilon),x;\varepsilon) - G(0,x;0) - \\ - u\,h(x,\varepsilon)\,G_u(0,x;\varepsilon)\big].$$

Из определения f видно, что

$$f(0,x;0) = f_u(0,x;\varepsilon) = 0$$

при всех $x \in [0,X]$ и всех рассматриваемых ε.

Тот факт, что $f_u(0,x;\varepsilon)$ обращается в нуль не только при $\varepsilon = 0$, делает возможным следующую оценку:

$$|f_u(u,x;\varepsilon)| \leqslant |u|\,\|f_{uu}\|(|u|,|\varepsilon|),$$

в то время как ранее (когда f удовлетворяла лишь (11)) для оценки f_u нам приходилось использовать смешанную производную второго порядка:

$$|f_u(u,x;\varepsilon)| \leqslant |u|\,\|f_{uu}\|(|u|,|\varepsilon|) + |\varepsilon|\,\|f_{u\varepsilon}\|(|u|,|\varepsilon|).$$

Дальнейшее изложение полностью повторяет изложения для случая, когда F удовлетворяла условиям (3), с тем изменением, что в доказательствах утверждений 1 и 2 исчезают слагаемые, содержащие $\|f_{u\varepsilon}\|$.

Замечание. Требования (24) на функцию F можно ещё немного ослабить. Несложно убедиться, что предложенная в этом разделе схема исследования задачи (1)–(2) безо всяких модификаций и усложнений работает и в случае, когда

$$F, F_y \in C(\mathbb{R} \times [0,X] \times \mathbb{R}), \quad F_{yy} \in C(\{0\} \times [0,X] \times \mathbb{R}), \\ F_\varepsilon \in C(\{0\} \times [0,X] \times \{0\}). \tag{25}$$

Сделанное замечание может быть актуальным, если, например, $F(y,x;\varepsilon)$ содержит слагаемое $y\sqrt{\varepsilon}$, которое не дифференцируемо по ε при $\varepsilon = 0$ и $y \neq 0$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-424).

[1] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* // Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. М., 1998.

[2] *Барашков А.С., Борхаленко В.А.* // Вестник МЭИ. 2013. №. 6. С. 141.

[3] *Копачевский Н.Д., Смолич В.П.* // Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. Симферополь, 2009.

[4] *Боглаев Ю.П.* // Докл. АН СССР. 1976. **227**, №. 5. С. 1009.

[5] *Боглаев Ю.П., Жданов А.В., Стельмах В.Г.* // Дифференц. уравнения. 1978. **14**, №. 3. С. 395.

[6] *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* // Конструктивные методы анализа нелинейных систем. Нелинейный анализ и его приложения. М., 1979.

[7] *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* // Введение в резонансную аналитическую динамику. М., 1999.

[8] *Букжалёв Е.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. 2018. №. 1. С. 53. (*Bukzhalev E.E.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 1. P. 53).

[9] *Букжалёв Е.Е.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2017. №. 4. 1740304.

[10] *Букжалёв Е.Е.* // Электронный Журнал «Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления». 2018. №. 4. С. 41.

[11] *Букжалёв Е.Е.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. **57**, №. 10. С. 1661.

[12] *Букжалёв Е.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017. №. 3. С. 10.

[13] *Букжалёв Е.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2018. **73**, №. 2. С. 3.

[14] *Bukzhalev E., Ovchinnikov A.* // Aust. J. Math. Anal. Appl. 2018. **15**, N 2.

[15] *Alimov A., Bukzhalev E.* // Turk. J. Math. 2018. **42**, N 5. P. 2841.

[16] *Букжалёв Е.Е.* // Дифференц. уравнения. 2018. **54**, №. 2. С. 155.

[17] *Моисеев Н.Н.* // Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969.

An iterative way for the approximate solution of the first-order perturbed differential equation

E. E. Bukzhalev[1,2]

[1]*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*
Moscow 119991, Russia
[2]*All-Russian Institute for Scientic and Technical Information of the RAS. Moscow, 125190, Russia*
E-mail: bukzhalev@mail.ru

We propose a development of an iterative approach to regularly perturbed differential equations. With this approach we construct a sequence that converges (with respect to the norm of the space of continuous functions) to the solution to the Cauchy problem for a perturbed by a small parameter first-order strongly nonlinear differential equation. This sequence also converges to the solution to the problem in the asymptotic sense. The proof of convergence (both the ordinary and the asymptotic) of the sequence constructed and the estimate of the rate of convergence are based on the Banach fixed-point theorem for a contraction mapping of a complete metric space.

PACS: 02.30.Hq
Keywords: perturbation theory, Banach fixed-point theorem, method of asymptotic iterations.
Received 2018.

Сведения об авторах

Букжалёв Евгений Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bukzhalev@mail.ru.