Гипербраны со скалярными волосами

И. А. Богуш* Д. В. Гальцов†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.08.2019; Подписана в печать 16.09.2019)

В соответствии с теоремами об отсутствии скалярных волос у черных дыр, обладающих регулярным горизонтом событий, дилатонный заряд p-бран в теориях супергравитации не является независимым параметром. В скалярно-тензорной теории с минимальной связью асимптотически-плоское решение с ненулевым скалярным зарядом имеет сингулярный горизонт. Методом генерации решений с помощью сигма-модельного представления здесь мы получаем решения для p-бран, в которых дилатонный заряд является независимым параметром, и обсуждаем их свойства. Для случая трехмерного поперечного пространства строятся также новые решения в которых поперечное пространство не является сферически симметричным и содержит независимый параметр деформации. При $p = 0$ и в отсутствии скалярного поля это соответствует решению Зипоя–Вурхиса в общей теории относительности.

PACS: 04.20.Dw; 04.20.Jb; 04.50.Gh УДК: 514.822
Ключевые слова: черные дыры, p-браны, теоремы об отсутствии волос, решения Вейля, голые сингулярности.

ВВЕДЕНИЕ

Стандартные дилатонные p-браны в теориях супергравитации являются решениями уравнений Эйнштейна с дилатоном и антисимметричной формой в качестве источников [1, 2]. Эти решения являются асимптотически плоскими в поперечном пространстве и имеют регулярный горизонт событий. При этом дилатонный заряд не является независимым параметром, но выражается через другие параметры решения, такие как масса и заряды Пейджа p-браны. Для случая $p = 0$ это соответствует выполнению теоремы об отсутствии волос, запрещающей независимый скалярный заряд для асимптотически плоских чёрных дыр с регулярным горизонтом событий. Решения считаются частицеподобными, если выполняется один из критериев: сильный (решения должны быть несингулярными) либо слабый (сингулярности допускаются, но полная энергия и энергия материальных полей должны быть конечными) [3]. В последнее время привлекают внимание решения с сингулярностями, в частности изучаются астрофизические следствия допущения о возможности нарушения принципа космической цензуры [4–7]. Как было показано в [8], теория Калуцы–Клейна, которая сводится к модели Эйнштена–Максвелла с дилатоном, не допускает регулярные незаряженные решения с нетривиальным полем дилатона. В скалярн–тензорной теории с минимальной связью наиболее известным сингулярным решением с независимым скалярным зарядом является решение Фишера–Яниса–Ньюмена–Виникура [9], переоткрытое позже в работах [10–13], эквивалентность которых показана в [14, 15]. Это решение удовлетворяет слабому энергетическому условию и обладает горизонтом событий с сильной сингулярностью кривизны [16–18].

Подобные сингулярные решения можно построить и для дилатонных p-бран; ранее они возникали как нежелательные решения при построении общих решений уравнений супергравитации для этих объектов. Их свойства, однако, не были достаточно изучены. Здесь мы построим заряженные решения для сингулярных p-бран, представляющие собой обобщение решения Фишера-Яниса-Ньюмена-Виникура, методом преобразований Харрисона [19]. В этот класс входит, в частности, NS5-брана в теории струн типа IIB. Для случая трехмерного поперечного пространства также строится более общее решение, в котором вводится параметр отклонения от сферичности Зипоя-Вурхиса [20, 21].

Глобальный характер геодезических и аккреционных дисков на фоне решения Фишера–Яниса–Ньюмена–Виникура в значительной степени зависит от параметра отклонения от решения Шварцшильда, который выражается через массу и скалярный заряд [22, 23]. Геодезические заряженных частиц на фоне заряженных решений Фишера в теории Эйнштейна-Максвелла со скаляром (без взаимодействия скаляра с полем Максвелла) были подробно изучены в работе [24]. В настоящей работе будет рассмотрено асимптотическое поведение незаряженных геодезических и пробного скалярного поля в окрестности сингулярностей различного характера, возникающих в полученных решениях.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРРИСОНА ДЛЯ БРАН

Опишем коротко технику построения p-бранных решений [25] с помощью обобщенных преобразований

*E-mail: ig.bogush16@physics.msu.ru
†E-mail: galtsov@phys.msu.ru

Харрисона. Рассмотрим теорию Эйнштейна с дилатоном и полем антисимметричной формы в D-мерном пространстве:

$$S = \int d^D x\sqrt{-G}\left(R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\exp(-\alpha\phi)}{2(n+1)!}F^2_{(n+1)}\right), \tag{1}$$

где G_{MN} — метрика, $F_{(n+1)} = dA_{(n)}$ — антисимметричная форма ранга $n+1$, ϕ — дилатон, α — дилатонная константа связи, значение которой определяется конкретной теорией. Действию (1) соответствуют уравнения движения

$$R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = e^{-\alpha\phi}T^{(F)}_{MN} + T^{(\phi)}_{MN}, \tag{2}$$

$$\partial_M\left(e^{-\alpha\phi}\sqrt{-G}F^{MM_1\ldots M_n}\right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-G}}\partial_M\left(\sqrt{-G}G^{MN}\partial_N\phi\right) + \frac{\alpha}{2(n+1)!}e^{-\alpha\phi}F^2_{(n+1)} = 0, \tag{4}$$

где тензоры энергии-импульса для антисимметричной формы и дилатона определены следующим образом

$$T^{(F)}_{MN} = \frac{1}{2n!}\left(F_{MM_1\ldots M_n}F_N{}^{M_1\ldots M_n}\right) + \\ + \frac{1}{4(n+1)!}G_{MN}F^2_{(n+1)}, \tag{5}$$

$$T^{(\phi)}_{MN} = \frac{1}{2}\left(\partial_M\phi\partial_N\phi - \frac{1}{2}G_{MN}\partial_L\phi\partial^L\phi\right). \tag{6}$$

Предполагая существование d коммутирующих векторов Киллинга, один из которых времениподобен, определим анзац для D-мерной метрики

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dy^\mu dy^\nu + \left(\sqrt{-g}\right)^{-2/s}h_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta, \tag{7}$$

где $g_{\mu\nu}$ и $h_{\alpha\beta}$ — метрики на d-мерном мировом объеме браны и $s+2$-мерном поперечном пространстве, так что $D = d+s+2$. Обе метрики зависят только от координат поперечного к бране пространства, а их индексы пробегают значения $\mu,\nu = 0,\ldots,d-1$ и $\alpha,\beta = 1,\ldots,s+2$. Для антисимметричной формы $F_{(n+1)} = dA_{(n)}$ можно выбрать электрический анзац с $n = d$

$$A_{01\ldots d-1} = v(x) \tag{8}$$

или магнитный анзац с $n = s$

$$F^{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}} = \frac{e^{\alpha\phi}}{\sqrt{-G}}\epsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}\beta}\partial_\beta u(x), \tag{9}$$

где электрический $v(x)$ и магнитный $u(x)$ потенциалы зависят также только от координат поперечного пространства. Для удобства представления сигма-модели, перенормируем метрику мирового объема браны следующим образом $g_{\mu\nu} = f^{2/d}\tilde{g}_{\mu\nu}$, где $f = \sqrt{-g}$, $\det\tilde{g}_{\mu\nu} = -1$. Подстановка этих величин в уравнения исходной теории приводят к уравнениям электрической либо магнитной сигма-моделей на поперечном пространстве, в которых роль скалярных функций выполняют величины $f, \phi, \tilde{g}^{\mu\nu}$ и v либо u соответственно [25]. Линейные элементы пространства скаляров сигма–моделей имеют вид:

$$dl_e^2 = Ad\xi_+^2 + Bd\psi_+^2 - \frac{1}{2}e^{-\psi_+}dv^2 + \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left[\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\,\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\right], \tag{10}$$

$$dl_m^2 = Ad\xi_-^2 + Bd\psi_-^2 - \frac{1}{2}e^{-\psi_-}du^2 + \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left[\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\,\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\right], \tag{11}$$

где $\xi_\pm, \psi_\pm$ — следующие функции от ϕ и f:

$$\xi_\pm = \pm sd\phi - \alpha(s+d)\ln f, \qquad \psi_\pm = \pm\alpha\phi + 2\ln f, \tag{12}$$

и A, B — константы:

$$A = \frac{1}{sd\Delta}, \qquad B = \frac{s+d}{2\Delta}, \qquad \Delta = \alpha^2(s+d) + 2sd.$$

Между электрической (10) и магнитной (11) σ-моделями существует дискретная электромагнитная дуальность

$$\phi \to -\phi, \qquad u \leftrightarrow v, \tag{13}$$

переводящая электрическое решение в магнитное и наоборот. Учитывая, что магнитное решение можно получить из электрического с помощью дуальности, рассмотрим электрический случай (10).

Группа изометрий таргет-пространства $SL(d,R)/SO(1,d-1) \times SL(2,R)/SO(1,1) \times R$ состоит из преобразований матрицы $\tilde{g}$, трансляции вдоль ξ_+ и нетривиальных преобразований на подпространстве (ψ_+, v), на которых основана генерация новых решений. Как и в четырехмерной теории Эйнштейна-Максвелла, можно ввести потенциалы Эрнста:

$$\Phi = \frac{v}{2\sqrt{2B}}, \qquad \mathcal{E} = \exp\psi_+ - \frac{v^2}{8B}. \tag{14}$$

Нетривиальное преобразование изометрии, сохраняющее асимптотическое поведение потенциалов Эрнста $\mathcal{E} \to 1$ и $\Phi \to 0$, имеет вид:

$$\Phi = \frac{\Phi^{(0)} + c(c\Phi^{(0)} + \mathcal{E}^{(0)} - 1)}{1 - 2c\Phi^{(0)} - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \\ \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^{(0)} + 2c\Phi^{(0)} - c^2}{1 - 2c\Phi^{(0)} - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \tag{15}$$

где индекс $^{(0)}$ обозначает принадлежность затравочному решению, на которое действует преобразование, а c — вещественный параметр преобразования. Для затравочного решения с тривиальным электрическим потенциалом $v_0 = 0$ преобразование (15) упрощается

$$\Phi = c\frac{\mathcal{E}^{(0)} - 1}{1 - c^2\mathcal{E}^{(0)}}, \qquad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^{(0)} - c^2}{1 - c^2\mathcal{E}^{(0)}}. \tag{16}$$

Преобразования изометрии магнитного таргет–пространства (11) можно получить, заменив v, ψ_+ на u, ψ_- в (14). Полученные преобразования являются обобщением преобразований Харрисона на рассматриваемую модель (1).

2. ЗАРЯЖЕННАЯ ГИПЕРБРАНА СО СКАЛЯРНЫМИ ВОЛОСАМИ

Для того, чтобы сгенерировать заряженную гипербрану с независимым скалярным зарядом, будем использовать решение рассматриваемой системы уравнений в отсутствии поля формы, известное в четырехмерии как решение Фишера.

2.1. Решение Фишера в D измерениях

Решение Фишера [9], переоткрытое позже в ряде работ [10–13], было обобщено на случай произвольной размерности Ксантопулосом и Занниасом [26]. В теории с действием

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi}\int d^q x\sqrt{-g}\left(R - \frac{q-2}{q-3}(\nabla\varphi)^2\right) \tag{17}$$

решение записывается в виде

$$\begin{gathered} ds^2 = -f_1^\sigma dt^2 + f_1^{\frac{1-\sigma}{q-3}-1}dr^2 + r^2 f_1^{\frac{1-\sigma}{q-3}}d\Omega^2_{(q-2)},\\ \varphi = \frac{\Sigma\sigma}{2M}\ln f_1, \quad f_1 = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-3},\\ r_0^{q-3} = \frac{16M\pi}{(q-2)\sigma S_{q-2}}, \quad \sigma = \frac{M}{\sqrt{M^2+\Sigma^2}}, \end{gathered} \tag{18}$$

где масса M и скалярный заряд Σ являются независимыми параметрами решения, $S_n = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ — площадь единичной n-сферы, $d\Omega^2_{(n)}$ — квадрат элемента длины на единичной n-сфере. После замены $\varphi = \sqrt{(q-3)/(2q-4)}\ \phi$ можно убедиться, что уравнения движения модели с действием (17) согласованно соответствуют уравнениям движения (2)-(4) для тривиальной формы $F_{(n+1)} = 0$. Поэтому решение Фишера также является решением рассматриваемой модели (1).

Горизонт событий при $r = r_0$ сингулярен для $\Sigma \neq 0$, в чем можно убедиться, вычислив скаляр кривизны. Нулевой скалярный заряд $\Sigma = 0$ приводит к стандартному решению Шварцишильда в q измерениях.

2.2. Генерация заряженной Фишер–браны

Для получения заряженной Фишер-браны, выберем затравочное решение в виде (18), дополнив метрику плоским подпространством с координатами $y_1, \ldots, y_{d-1}$. Метрику подпространства с координатами $t, y_1, \ldots, y_{d-1}$ и пространственно-подобную часть метрики (18) можно отождествить с $g^{(0)}_{\mu\nu}$ и $h^{(0)}_{\alpha\beta}$ соответственно, откуда потенциалы затравочного решения имеют вид $\psi_+^{(0)} = \sigma U \ln f_1$ и $\xi_+^{(0)} = \xi_+ = \sigma V \ln f_1$, где

$$U = \sqrt{\frac{s+1}{2s}}\frac{\alpha\Sigma_0}{M_0} + 1, \quad V = sd\sqrt{\frac{s+1}{2s}}\frac{\Sigma_0}{M_0} - \frac{1}{2}\alpha(s+d). \tag{19}$$

Подставляя $\psi_+^{(0)}$ и $\xi_+^{(0)}$ в (14), получим затравочные потенциалы Эрнста $\mathcal{E}^{(0)} = f_1^{\sigma U}$, $\Phi^{(0)} = 0$. Тогда действие преобразования (16) на потенциалы затравочного решения приводит к новым потенциалам Эрнста

$$\mathcal{E} = \frac{f_1^{\sigma U} - c^2}{1 - c^2 f_1^{\sigma U}}, \quad \Phi = c\frac{f_1^{\sigma U} - 1}{1 - c^2 f_1^{\sigma U}}. \tag{20}$$

Используя (12) и (14) можно выразить новые v, ϕ и f для сгенерированного решения, которые приводят к окончательному выражению для электрически заряженной p-браны

$$\begin{gathered} ds^2 = f_2^{4s/\Delta}\left(-f_1^\sigma dt^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_{d-1}^2\right) + \\ + f_2^{-4d/\Delta} f_1^{-\sigma/s}\left(f_1^{(1-s)/s}dr^2 + r^2 f_1^{1/s}d\Omega^2_{s+1}\right),\\ \phi = \frac{\sigma(U-1)}{\alpha}\ln f_1 + 4B\alpha\ln f_2,\\ A_{01\ldots d-1} = 2c\sqrt{2B}\left(f_1^{\sigma U} f_2 - 1\right), \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} f_1 = 1 - \frac{r_0^s}{r^s}, \qquad f_2 = \frac{1-c^2}{1-c^2 f_1^{\sigma U}},\\ r_0^s = \frac{16M_0\pi}{\sigma(s+1)S_{s+1}}, \qquad \sigma = \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2+\Sigma_0^2}}. \end{gathered}$$

Решение имеет физический смысл при s, $d \geq 1$. Независимыми параметрами являются масса и скалярный заряд затравочного решения M_0, Σ_0 и параметр преобразования c. Решение (18) может быть восстановлено при $c = 0$, $d = 1$.

Магнитную брану можно найти с помощью электромагнитной дуальности (13). Согласно (9), антисимметричная форма с опущенными индексами имеет вид

$$F_{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}} = \frac{c}{1-c^2}\frac{s}{s+1}\frac{32M_0U\pi\sqrt{2B}}{S_{s+1}}\sqrt{\Omega_{(s+1)}}\epsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}}, \tag{22}$$

где $\sqrt{\Omega_{(n)}}$ — элемент объема единичной n-сферы, $\epsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}} = \pm 1$.

Важным примером полученных решений могут служить браны F1 и NS5 в суперструнной теории типа IIB. Фундаментальная струна F1 является решением с электрически заряженной 3-формой при $d = 2, s = 6, \alpha = 1$. Дуальная ей солитонная 5-брана NS5 обладает магнитным зарядом с параметрами $d = 6, s = 2, \alpha = 1$.

2.3. Заряды

Масса Комара и электрический заряд Пейджа заряженной Фишер-браны определяются следующим образом

$$\tilde{M} = \kappa_D \int_{\partial M} *dK = \frac{D-2}{D-3}\frac{s}{s+1} M_0 \left(1+\delta_M\right) V_y, \quad (23)$$

$$\tilde{Q} = \kappa_D \int_{\partial M} *F_e = (-1)^d \frac{c}{1-c^2}\frac{D-2}{D-3}\frac{s}{s+1} 2\sqrt{2B} M_0 U. \quad (24)$$

где

$$\kappa_D = -\frac{1}{16\pi}\frac{D-2}{D-3}, \qquad \delta_M = \frac{4s}{\Delta}\frac{c^2}{1-c^2}U, \quad (25)$$

и $K = \partial_t$ — времениподобный вектор Киллинга, V_y — нормировочный объем браны, ∂M — гиперповерхность $s+1$-сферы на асимптотике. Для согласованности с параметром M_0 из затравочной метрики, переопределим массу и электрический заряд следующим образом

$$M = \frac{(D-3)(s+1)}{(D-2)sV_y}\tilde{M} = M_0 \left(1+\delta_M\right), \quad (26)$$

$$Q = \frac{(D-3)(s+1)}{(D-2)s}\tilde{Q} = (-1)^d \frac{c}{1-c^2} 2\sqrt{2B} M_0 U. \quad (27)$$

Выражение для магнитного заряда $\tilde{P} = \kappa_D \int_{\partial M} F_m$ совпадает с электрическим.

Из асимптотического поведения поля дилатона на $r \to \infty$

$$\phi \approx -\frac{r_0^s}{r^s}\frac{\sigma(U-1)}{\alpha}\left(1+\delta_\Sigma\right), \qquad \delta_\Sigma = 4B\alpha^2 \frac{U}{U-1}\cdot\frac{c^2}{1-c^2} \quad (28)$$

определим скалярный заряд как $\Sigma = \Sigma_0\left(1+\delta_\Sigma\right)$ с целью выполнения равенства $\Sigma = \Sigma_0$ при $c = 0$. В дальнейшем удобнее переопределить дилатонный заряд так:

$$D = -\frac{\Sigma}{\alpha}\sqrt{\frac{s+1}{2s}}. \quad (29)$$

Как будет показано в разделе 2.4, необходимым условием регулярности горизонта является $\Sigma_0 = 0$. Это условие не приводит к нулевому скалярному заряду D, а накладывает на заряды условие

$$Q^2 = D\left(\frac{\Delta-4s}{d+s}D - 2M\right) \quad (30)$$

для электрического решения и

$$P^2 = D\left(\frac{\Delta-4s}{d+s}D + 2M\right) \quad (31)$$

для магнитного, которое можно получить с помощью замены $D \to -D$, $Q \to P$. Для $d = s = 1$, $\alpha = \sqrt{3}$, $(\Delta - 4s)/(d+s) = 2$ условия (30), (31) совпадают со связью на заряды Рашида в теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и константой связи $\alpha = \sqrt{3}$ [27]. Уравнение (30) имеет два корня

$$D_\pm = \frac{d+s}{\Delta-4s}M\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{\Delta-4s}{d+s}\frac{Q^2}{M^2}}\right). \quad (32)$$

При $Q = 0$, условие регулярности должно приводить к условию регулярности для затравочных зарядов ($\Sigma_0 = D = 0$). Поэтому, корень D_+ является побочным и не соответствует возможной связи на заряды $\Sigma_0 = 0$. Такая же ситуация наблюдается для связи (31) магнитного решения.

При $U \to 0$, $c^2 \to 1$ выражения для зарядов (26), (27), (29) и метрический тензор имеют нетривиальный конечный предел

$$f_2 = \left(\zeta \ln f_1 + 1\right)^{-1}, \quad (33)$$

$$\lim_{\substack{U\to 0\\ c\to\pm 1}} \frac{\sigma U}{1-c^2} \equiv \zeta,$$

поэтому решение в этом пределе имеет физический смысл. При $\zeta > 0$ функция f_2 расходится на радиусе $r_\zeta = r_0\left(1-e^{-1/\zeta}\right)^{-1/s} > r_0$ как $1/(r-r_\zeta)$. При $\zeta < 0$ функция f_2 не имеет нулей и стремится к нулю на горизонте как $1/\ln f_1$.

Аналогично, предел M_0, $\Sigma_0 \to 0$, $c^2 \to 1$ оставляет заряды конечными. Введем малый параметр ϵ, от которого параметры M_0, Σ_0, c зависят как $M_0 = \xi\epsilon$, $\Sigma_0 = \zeta\epsilon$, $c = \pm(1-\epsilon)$, где ζ и ξ — константы. Тогда, предел $\epsilon \to 0$ приводит к переопределению функций

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = \frac{r^s}{\rho^s + r^s}, \quad (34)$$

и зарядов

$$M = \frac{2s\Phi}{\Delta}, \quad D = -\frac{\Phi(d+s)}{\Delta}, \quad Q = \pm\Phi\sqrt{\frac{d+s}{\Delta}}, \quad (35)$$

где

$$\rho^s = \frac{8\pi\Phi}{(s+1)S_{s+1}}, \qquad \Phi = \xi + \alpha\zeta\sqrt{\frac{1+s}{2s}}.$$

Заряды магнитного решения можно получить из (35) с помощью замены $D \to -D$, $Q \to P$. Можно убедиться, что полученные выражения для зарядов тождественно выполняют условие регулярности (32), но регулярными не являются в силу предельного характера. Эти решения известны и были найдены ранее в работе [28].

Предел $c \to \infty$ приводит к переопределению функции

$$f_2 = f_1^{-\sigma U}, \quad (36)$$

при этом поле антисимметричной формы становится тривиальным. Это решение является частным случаем более широкого класса решений, которое можно получить из затравочного с помощью $SO(2)$ преобразований, рассмотренных в разделе 5.

Предельное решение (33) качественно не отличается от общего класса решений, а предельное решение (36) является частным случаем другого широкого класса решений, который требует отдельного изучения. Поэтому далее в статье будут рассматриваться общее решение и предельное решение (34), которые будут обозначаться S_G и S_E соответственно.

2.4. Геометрические свойства

Чтобы провести анализ кривизны пространства-времени, найдем скалярную кривизну, свернув индексы в уравнении (2) и подставив решение в общем виде для электрической или магнитной формы и скаляра в тензор энергии-импульса

$$R = \frac{1}{2}\sigma^2 f_2^{4d/\Delta} f_1^{(\sigma-s-1)/s} f_1'^2 \left(R_F + R_\phi\right), \tag{37}$$
$$R_F = \frac{4c^2U^2(d-s)f_2^2 f_1^{\sigma U}}{(1-c^2)^2\Delta},$$
$$R_\phi = \left(\frac{\Sigma_0}{M_0}\sqrt{\frac{s+1}{2s}} + \frac{2\alpha c^2 U(d+s) f_2 f_1^{\sigma U}}{(1-c^2)\Delta}\right)^2.$$

В общем случае S_G функция f_2 регулярна в точке $r = r_0$, поэтому она не может давать вклад в сингулярность. В случае $\Sigma_0 \neq 0$ скалярная кривизна (37) содержит слагаемое пропорциональное $f_1^{(\sigma-s-1)/s}$, которое расходится в силу отрицательности показателя степени. При $\Sigma_0 = 0$, $M_0 > 0$ сингулярные слагаемые отсутствуют и решения представляют регулярные черные дыры.

Функция f_2 может расходиться, если знаменатель обращается в нуль при $f_1^{\sigma U} = c^{-2}$. Функция f_1 ограничена сверху значением 1, поэтому решение может существовать при $c^2 > 1$. Как видно из (37), это приводит к появлению еще одной сингулярной поверхности с радиусом $r_0(1 - c^{-2/\sigma U})^{-s} > r_0$.

Для класса S_E скалярная кривизна имеет вид

$$R = \left(\frac{2s\rho^s}{r^{s+1}\Delta}\right)^2 f_2^{4d/\Delta+2} d(\Delta - s(d+s)) \sim r^{4ds/\Delta-2}. \tag{38}$$

Чтобы выяснить, является ли точка $r = 0$ сингулярностью, найдем экстремумы показателя степени $-2 + 4ds/\Delta$ относительно параметра α^2. Наименьшее значение степень принимает при $\alpha^2 \to \infty$, при котором выражение стремится к -2. С другой стороны, при $\alpha^2 = 0$ выражение принимает наибольшее значение равное нулю. В этом случае, скалярное поле имеет тривиальный вид, а решение является обобщением экстремального решения Рейснера-Нордстрема на p-браны. Поэтому, класс решений S_E является сингулярным при $\alpha \neq 0$. При $\alpha^2 = s(s-d)/(s+d)$, $s \geq d$ метрика является Риччи-плоской, но прямыми вычислениями можно показать, что скаляры $R_{MN}R^{MN}$ и $R_{MNLK}R^{MNLK}$ имеют поведение $r^{4(d-s)/(d+s)}$ в окрестности $r = 0$ и расходятся при $s \neq d$.

Для общих решений S_G с параметром $c^2 < 1$ тип решения определяется из характеристик поверхности $r = r_0$. Определение горизонта событий является весьма условным для сингулярного случая, так как такая поверхность геометрически является точкой. Определение горизонта событий из уравнения $g^{rr} = 0$ обладает рядом недостатков. В общем случае S_G это уравнение накладывает условие на показатель степени $\sigma + s - 1 > 0$, которое тождественно выполняется при $s > 2$ и не выполняется при $s = 2$, $\sigma = -1$ или $s = 1$, $\sigma \leq 0$. Однако, этому условию удовлетворяют решения Шварцшильда с отрицательной массой ($\sigma = -1$, $c = 0$) при $s > 2$, которые являются голыми сингулярностями, а не черными дырами. Условие не является инвариантным относительно замены радиальной координаты, с помощью которой можно менять показатель степени функции f_1. Такими недостатками не обладает условие $g_{tt} = 0$, которое для статических регулярных решений также выделяет горизонт событий. В случае решений S_G это уравнение накладывает условие $\sigma > 0$ ($M_0 > 0$). В решениях с положительной затравочной массой M_0 на поверхности $r = r_0$ наблюдается бесконечное красное смещение $g_{tt} \to 0$, в случае отрицательной — бесконечное синее смещение $g_{tt} \to \infty$. Как будет показано в разделе 3, приближение радиальной геодезической к точке $r = r_0$ наблюдается за конечное время с точки зрения внешнего бесконечно удаленного наблюдателя при любом параметре $\sigma \neq 1$. Таким образом $r = r_0$ при $\sigma \neq 1$ строго не является горизонтом, однако может обладать определенными его свойствами. Для решений с параметром $c^2 > 1$ определяющей поверхностью является поверхность, на которой расходится функция f_2. В силу g_{tt}, $g^{rr} \to \infty$, такие решения являются голыми сингулярностями, на которых наблюдается бесконечное синее смещение. Решения класса S_G не могут быть экстремальными в смысле $g'_{tt}(r_0) \neq 0$ и $g'^{rr}(r_0) \neq 0$, в чем можно убедиться прямыми вычислениями.

Для $\alpha = 0$ класс решений S_E совпадает с экстремальными решениями Рейснера-Нордстрема с электрическим или магнитным зарядом. Из (35) можно получить аналог no-force условия [29, 30] на заряды M и Q (или M и P)

$$M^2 = \frac{4s^2}{(d+s)\Delta}Q^2, \tag{39}$$

а выражение для вторичного скалярного заряда находится из (32) для D_-. При подстановке $d = s = 1$ выражение (39) совпадает с известными результатами для BPS-решений в теории EMD $M^2 = Q^2/(1 + \alpha^2)$ [27, 31–33]. Класс S_E всецело представляет BPS-решения при любых параметрах d, s, α, которые соответствуют p-бранам в теории суперструн IIA/IIB [34–36].

В соответствии с данным анализом, класс S_G является голой сингулярностью при $\sigma \neq 1$, которая может обладать определенными свойствами черной дыры. Класс предельных решений S_E является обособленным, отделяя экстремальные решения от общего решения S_G, которые являются регулярными лишь при $\alpha = 0$ (представляя экстремальные решения Рейснера-Нордстрема с одним зарядом).

3. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Запишем уравнение геодезических в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left(G_{MN}\dot{X}^N\right) - \frac{1}{2}\frac{dG_{PQ}}{dX^M}\dot{X}^P\dot{X}^Q = 0. \qquad (40)$$

Метрика (21) может быть представлена в компактной форме

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + b(r)\, d\vec{y}^{\,2} + v(r)dr^2 + w(r)d\Omega^2_{s+1}, \qquad (41)$$

где

$$a(r) = f_2^{4s/\Delta} f_1^{\sigma}, \quad b(r) = f_2^{4s/\Delta},$$
$$v(r) = f_2^{-4d/\Delta} f_1^{(1-s-\sigma)/s}, \quad w(r) = f_2^{-4d/\Delta} f_1^{(1-\sigma)/s} r^2. \qquad (42)$$

В силу сферической симметрии, выберем направление движения лишь по экваториальной окружности на $s+1$-сфере вдоль координаты φ. Из (40) можно найти интегралы движения для t, y^i и φ

$$\dot{t} = Ea^{-1}, \qquad \dot{y}^i = k^i b^{-1}, \qquad \dot{\varphi} = Lw^{-1}. \qquad (43)$$

Выбираем аффинный параметр τ так, что $\dot{X}_M\dot{X}^M = -\epsilon$, где $\epsilon = -1, 0, 1$ для пространственно-подобных, изотропных и времени-подобных геодезических соответственно. Учитывая интегралы движения (43), получим уравнение радиального движения

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{av}\left(E^2 - V_{\text{eff}}\right), \qquad (44)$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{a}{b}\vec{k}^2 + \frac{a}{w}L^2 + a\epsilon. \qquad (45)$$

В терминах времени удаленного наблюдателя радиальное уравнение геодезической кривой примет вид

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{a}{E^2 v}\left(E^2 - V_{\text{eff}}\right) \qquad (46)$$

Интервалы собственного времени и времени в системе бесконечно удаленного наблюдателя необходимого для перемещения из r_1 в r_2 равны

$$\Delta\tau = \pm\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{av}dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}}},$$
$$\Delta t = \pm\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{v}{a}} \frac{dr}{\sqrt{1 - V_{\text{eff}}/E^2}} \qquad (47)$$

Геодезические могут достигать некоторой поверхности S с радиусом r_S, если эффективный потенциал V_{eff} не стремится к $+\infty$ на этой поверхности. Для изотропных и времениподобных геодезических эффективный потенциал является положительно определенной функцией во внешней области решения. Поэтому достаточно потребовать ограниченности потенциала V_{eff}. Если каждое слагаемое эффективного потенциала имеет поведение $(r - r_S)^a$ вблизи поверхности S, где a — некоторая константа, то необходимым и достаточным условием является $a \geq 0$ для каждого слагаемого в потенциале. Если геодезическая пересекает поверхность S, то интервал времени необходимый для пересечения этой поверхности в той или иной системе отсчета может быть конечным или расходиться. Для внешнего удаленного наблюдателя геодезическая достигает поверхности S за конечное время Δt только в том случае, если $\sqrt{v/a}$ интегрируемо в окрестности этой поверхности. Следовательно, $\sqrt{v/a}$ не может расходиться как $(r - r_S)^{-1}$ или быстрее. Аналогично, интервал собственного времени $\Delta\tau$, за который геодезическая достигает поверхность S, конечен, если $\sqrt{va}$ не расходится быстрее $(r - r_S)^{-1}$. В табл. II приведены соответствующие условия для функций a, a/b, a/w, $\sqrt{va}$ и $\sqrt{v/a}$ на основе результатов таблицы I.

Поведение геодезических на фоне общего решения S_G при $c^2 < 1$ принципиально не отличается от движения на фоне незаряженных Фишер–бран. В зависимости от значения σ, эффективный потенциал может быть как ограниченным, так и расходящимся в сингулярной точке. При $\sigma \geq 1/(1+s)$ потенциал всегда ограничен для любых геодезических; при $0 \leq \sigma < 1/(1+s)$ потенциал ограничен лишь для геодезических без углового момента $L = 0$; в случае $\sigma < 0$ сингулярность r_0 достижима лишь для радиальных изотропных геодезических ($\epsilon = k = L = 0$). Событие пересечения геодезической кривой поверхности r_0 всегда происходит за конечное собственное время $\Delta\tau$. Внешний удаленный наблюдатель может наблюдать это событие за конечное время лишь для сингулярного случая $\sigma \neq 1$.

В решениях S_G с параметром $c^2 > 1$ появляется другая сингулярность, которая меняет поведение геодезических в своей окрестности. Времениподобные геодезические никогда не достигают сингулярности в силу неограниченного роста эффективного потенциала. Изотропные геодезические могут достигать ее, если не обладают угловым моментом $L = 0$. С точки зрения внешнего наблюдателя, изотропные геодезические всегда достигают сингулярность за конечное время Δt и за конечный параметр $\Delta\tau$.

Геодезические на фоне решения из класса S_E при $\alpha^2 \leq \alpha^2_{\text{crit}}$, где $\alpha^2_{\text{crit}} = \frac{2s^2}{s+d}$, обладают конечным эффективным потенциалом. Пересечение поверхности $r = 0$ осуществляется за конечное собственное время τ, но бесконечно долго для внешнего наблюдателя. С другой стороны, в теориях с $\alpha^2 > \alpha^2_{\text{crit}}$ на фоне решений S_E эффективный потенциал с ненулевым угловым моментом неограниченно растет на сингулярности, а геодези-

Таблица I: поведение a, a/b, a/w и $\sqrt{av}$, $\sqrt{v/a}$ вблизи поверхности S с радиусом r_S с точностью до мультипликативного коэффициента, $x = r - r_S$

Решение	Общее выражение	S_G, $c^2 < 1$	S_G, $c^2 > 1$	S_E
r_S		r_0	$r_0(1-c^{-2/\sigma U})^{-s}$	0
a	$f_2^{4s/\Delta} f_1^{\sigma}$	x^{σ}	$x^{-4s/\Delta}$	$x^{4s^2/\Delta}$
a/b	f_1^{σ}	x^{σ}	x^0	1
a/w	$f_2^{4(s+d)/\Delta} f_1^{\sigma-\frac{1-\sigma}{s}} r^{-2}$	$x^{\sigma-\frac{1-\sigma}{s}}$	$x^{-4(s+d)/\Delta}$	$x^{-2+4s(s+d)/\Delta}$
$\sqrt{av}$	$f_2^{2(s-d)/\Delta} f_1^{\frac{(1-s)(1-\sigma)}{2s}}$	$x^{\frac{(1-s)(1-\sigma)}{2s}}$	$x^{2(d-s)/\Delta}$	$x^{2s(s-d)/\Delta}$
$\sqrt{v/a}$	$f_2^{-2(s+d)/\Delta} f_1^{\frac{-(s+1)\sigma+1-s}{2s}}$	$x^{\frac{-(s+1)\sigma+1-s}{2s}}$	$x^{2(s+d)/\Delta}$	$x^{-2s(s+d)/\Delta}$

Таблица II: условия регулярности слагаемых в эффективном потенциале (45) и достижимости поверхности S с радиусом r_S в собственном времени τ и времени внешнего бесконечно удаленного наблюдателя t для различных решений; e_ϵ, e_k, e_L, e_τ, e_t — показатели степени ведущего члена в разложении функций a, a/b, a/w, $\sqrt{av}$, $\sqrt{v/a}$ вблизи поверхности S соответственно

Решение	r_S	$e_\epsilon \geq 0$	$e_k \geq 0$	$e_L \geq 0$	$e_\tau > -1$	$e_t > -1$
S_G, $c^2 < 1$	r_0	$\sigma \geq 0$	$\sigma \geq 0$	$\sigma \geq \frac{1}{1+s}$	Всегда	$\sigma \neq 1$
S_G, $c^2 > 1$	$r_0(1-c^{-2/\sigma U})^{-s}$	Никогда	Всегда	Никогда	Всегда	Всегда
S_E	0	Всегда	Всегда	$\alpha^2 \leq \frac{2s^2}{s+d}$	Всегда	$\alpha^2 > \frac{2s^2}{s+d}$

ческие с нулевым угловым моментом $L = 0$ достигают сингулярность за конечное время Δt.

4. ПРОБНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ НА ФОНЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ФИШЕР-БРАНЫ

Исследуем решение уравнения Клейна–Гордона для скалярного поля с массой μ, воспользовавшись обозначениями (42). После подстановки фоновой метрики, уравнение Клейна-Гордона $(\Box - \mu^2)\phi = 0$ принимает вид

$$-a^{-1}\partial_t^2\phi + b^{-1}\partial_i^2\phi + \frac{1}{R}\partial_r\left(Rv^{-1}\partial_r\phi\right) + \frac{1}{w}\Delta_S^{s+1}\phi - \mu^2\phi = 0, \tag{48}$$

где Δ_S^{s+1} — оператор Лапласа-Бельтрами на единичной $s+1$-сфере и

$$R(r) = \sqrt{-G/\Omega_{(s+1)}} = \sqrt{ab^{d-1}vw^{s+1}} = f_2^{-4d/\Delta} f_1^{\frac{1-\sigma}{s}} r^{s+1}.$$

Подставив анзац для решения $\phi = \exp\left\{-i\omega t + ik_i y^i\right\}\Phi(r)Y_l^K(\theta)$, где K — совокупность квантовых чисел гармоник Y_l^K на гиперсфере, кроме квантового числа полного момента l и учитывая собственные значения гармоник на $s+1$-сфере $\Delta_S^{s+1}Y_l^K = -l(l+s)Y_l^K$ (состояние l вырождено $(2l+s)(l+s-1)!/l!s!$ раз [37]), получим

$$\frac{1}{R}\partial_r\left(Rv^{-1}\partial_r\Phi\right) + \left(\frac{\omega^2}{a} - \frac{\vec{k}^2}{b} - \frac{l(l+s)}{w} - \mu^2\right)\Phi = 0. \tag{49}$$

Выполним замену переменных $\partial_r = W(\varrho)\partial_\varrho$ и подстановку $\Phi = P(r)\chi(r)$, где W и P — некоторые произвольные функции. Желая получить уравнение вида

$$\chi'' + \left(\omega^2 - V_{\text{eff}}\right)\chi = 0, \tag{50}$$

где штрих $'$ обозначает производную по ϱ, положим

$$W^2 = \frac{v}{a}, \qquad P = \sqrt{\frac{v}{WR}} = f_2^{\frac{s+d}{\Delta}} f_1^{-(1-\sigma)(s+1)/4s} r^{-(s+1)/2}. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (49), получим эффективный потенциал V_{eff}

$$V_{\text{eff}} = \vec{k}^2\frac{a}{b} + l(l+s)\frac{a}{w} + a\mu^2 + V_0, \tag{52}$$

$$V_0 = (\ln P)'^2 - (\ln P)''. \tag{53}$$

Стабильность фонового решения при линейных возмущениях скалярного поля зависит от спектра соответствующих решений. Если задача является сингулярной, все решения дифференциального оператора могут быть квадратично интегрируемыми, вследствие чего возникает необходимость наложить граничные условия для обеспечения самосопряженности дифференциального оператора задачи Штурма-Лиувилля [38]. Спектр возмущений зависит от наложенных граничных условий, поэтому выводы о стабильности фоновой метрики неоднозначны относительно выбора граничных условий [39]. Квадратичная L^2-интегрируемость решений не зависит от выбора функций W и P, если в соответствии с задачей Штурма-Лиувилля выбрать правильную меру интегрирования: $R/a\,dr$ для (49) либо $d\varrho$ для (50).

В пределе $r \to +\infty$ мера имеет асимптотическое поведение $r^{s+1}dr$, поэтому L^2-интегрируемые решения должны стремиться к нулю быстрее $r^{-1-s/2}$, при этом решение уравнения (49) имеет асимптотический вид

$$\Phi \approx r^{-s/2}\left(C_1 J_{l+s/2}(\kappa r) + C_2 Y_{l+s/2}(\kappa r)\right), \qquad \kappa^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 - \mu^2.$$

При $\kappa^2 > 0$ решения являются волновыми и не принадлежат классу L^2-интегрируемых, что видно из амплитуды колебаний решений $r^{-(s+1)/2}$ на асимптотике. Выполнение строгого равенства $\kappa^2 = 0$ приводит к решению вида $\Phi \approx C_1 r^l + C_2 r^{-l-s}$, у которого квадратично интегрируемой функцией может быть лишь вторая мода при $s > 2$ либо $l > 0$. При $\kappa^2 < 0$ одна мода решения экспоненциально расходится, а другая экспоненциально стремится к нулю, поэтому L^2-интегрируемой на асимптотике может быть лишь одна из мод. В итоге, L^2-интегрируемые функции должны выполнять неравенство $\omega^2 < \vec{k}^2 + \mu^2$ (неравенство может быть нестрогим при $s > 2$ либо $l > 0$).

Рассмотрим уравнение вблизи сингулярности. Асимптотика функции $W = \sqrt{v/a}$ была рассмотрена для каждого случая в таблице I. В общем случае $W \sim x^m$, где m — константа, которая выражается из параметров теории и решения. С точностью до мультипликативной и произвольной аддитивной константы, новая координата выражается через старую как $\varrho \sim x^{m+1}$ (либо $\rho \sim \ln x$ при $m = -1$). Вблизи сингулярности функция P ведет себя как x^n с точностью до коэффициента, где n — определенная константа. Из (53) для $m \neq -1$ получим $V_0 \approx (\nu^2 - 1)\varrho^{-2}/4$, где

$$\nu = \frac{2n + m + 1}{m + 1}. \tag{54}$$

Найдем вид решения в окрестности сингулярности для каждого класса фоновой метрики.

a. Класс S_G при $c^2 < 1$. Показатель степени $m = -1 + (1+s)(1-\sigma)/2s$ достигает минимума при $\sigma = 1$ и равен -1. Случай $\sigma = 1$ аналогичен рассмотрению пробного поля на фоне регулярных метрик Шварцшильда или Рейснера-Нордстрема [40–42], поэтому рассматриваться не будет. Во всех остальных случаях $m > -1$, поэтому в окрестности сингулярности $\varrho \to 0$. Чтобы в V_{eff} не возникало более сингулярных членов, чем ϱ^{-2} из V_0, необходимо потребовать выполнение неравенств

$$\frac{\sigma}{m+1} \geq -2, \qquad \left(\sigma - \frac{1-\sigma}{s}\right)/(m+1) \geq -2.$$

Оба условия выполняются строго при подстановке m, поэтому наиболее сингулярное слагаемое эффективного потенциала содержится в V_0. Функция P имеет асимптотику $x^{-\frac{m+1}{2}}$, откуда $n = -(m+1)/2$ и $\nu = 0$. Решение уравнения (50) с таким эффективным потенциалом вблизи $r = r_0$ имеет вид

$$\Phi \approx P\varrho^{1/2}\left(C_1 + C_2 \ln \varrho\right) \approx C_1' + C_2' \ln x. \tag{55}$$

Обе моды решения являются квадратично интегрируемыми в окрестности сингулярности. Чтобы пробное поле оставалось регулярным, необходимо положить $C_2' = 0$ [43].

b. Класс S_G при $c^2 > 1$. Проведя аналогичные рассуждения, получим $m = 2(s+d)/\Delta > 0$, $n = -m/2$ и $\varrho \to 0$ в окрестности сингулярности. Условиями того, что другие слагаемые V_{eff} менее сингулярны, чем V_0, являются

$$(m+1)\Delta - 2s > 0, \qquad (m+1)\Delta - 2(d+s) > 0,$$

и выполняются строго при любых параметрах решения. Подставляя значения m и n в (54), получим $\nu = 1/(m+1)$. Решением уравнения (50) с таким эффективным потенциалом в окрестности сингулярности является

$$\Phi \approx P\sqrt{\varrho}\left(C_1\varrho^{+\nu/2} + C_2\varrho^{-\nu/2}\right) \approx C_1 x + C_2. \tag{56}$$

Обе моды решения являются как регулярными, так и квадратично интегрируемыми в окрестности сингулярности.

c. Класс S_E при $\alpha^2 \neq \alpha^2_{crit} = 2s^2/(s+d)$. Решения $\alpha = 0$ являются регулярными экстремальными черными дырами Рейснера–Нордстрема [44], поэтому подробно рассматриваться не будут и далее будем предполагать $\alpha \neq 0$. Из асимптотик функций W и P находим

$$m = -2s(s+d)/\Delta \neq -1, \qquad n = -\frac{m+s+1}{2}, \tag{57}$$

$$\varrho \approx \frac{r^{m+1}}{\rho^m(m+1)}. \tag{58}$$

Рассмотрим эффективный потенциал вблизи сингулярности, оставив лишь наиболее значимые члены разложения каждого слагаемого

$$V_{\text{eff}} \approx \vec{k}^2 + q\left(\frac{r^{m+1}}{\rho^m(m+1)}\right)^{-2} + \mu^2\left(\frac{r}{\rho}\right)^{4s^2/\Delta}, \tag{59}$$

где

$$q = \frac{l(l+s)}{(m+1)^2} + \frac{\nu^2 - 1}{4} = \left(\frac{l + s/2}{m+1}\right)^2 - \frac{1}{4}. \tag{60}$$

При $m > -1$ ($\alpha^2 > \alpha^2_{\text{crit}}$) либо $\vec{k}^2 = \omega^2$, наиболее значимым является второе слагаемое $V_{\text{eff}} \approx q\varrho^{-2}$. В этом случае в окрестности сингулярности решение имеет вид

$$\Phi \approx P\sqrt{\varrho}\Big(C_1\varrho^{\sqrt{q+1/4}} + C_2\varrho^{-\sqrt{q+1/4}}\Big) \approx \approx C_1' r^l + C_2' r^{-l-s}, \quad (61)$$

которое регулярно при $C_2' = 0$. Функции, квадратично интегрируемые в окрестности сингулярности на фоне решений класса S_E, должны стремиться к нулю быстрее, чем $r^{-s/2-1+2(d+s)/\Delta}$. Первая мода r^l удовлетворяет этому условию во всех случаях, кроме $l \le 2s(d+s)/\Delta - 1 - s/2$ при $d = 1$, $\alpha^2 < 2s^2/(s+1)(s+2) < \alpha^2_{\rm crit}$. Другая мода r^{-l-s} локально квадратично интегрируема лишь в случае $l = 0$, $s = 1$, $\alpha^2 > 2(d+2)/(d+1) > \alpha^2_{\rm crit}$.

При $\alpha^2 < \alpha^2_{\rm crit}$, $\vec{k}^2 \neq \omega^2$ координата ϱ стремится к бесконечности и уравнение на χ принимает вид

$$\chi'' + \kappa^2\chi \approx 0, \qquad \kappa^2 = \omega^2 - \vec{k}^2,$$

решение которого обладает асимптотическим поведением

$$\Phi \approx r^n(C_1\exp(i\kappa\varrho) + C_2\exp(-i\kappa\varrho)). \quad (62)$$

При $\kappa^2 > 0$ в окрестности сингулярности решение бесконечно быстро осциллирует, расходится вследствие $n < 0$ и не является квадратично интегрируемым. При $\kappa^2 < 0$ решение содержит моды, одна из которых экспоненциально расходится, а другая — экспоненциально стремится к нулю, являясь квадратично интегрируемой вблизи сингулярности.

d. Класс S_E при $\alpha^2 = \alpha^2_{crit} = 2s^2/(s+d)$. Из асимптотики соответствующих функций, имеем $m = -1$, $n = -s/2$, $\varrho \approx \rho\ln r \to -\infty$. Подставляя фоновое решение в (53), получим точное выражение функции V_0

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(r^s + \rho^s\right)^{-\frac{2(s+1)}{s}} \times \times \left(\left(s^2-1\right)r^{2s} + 2s(s+1)r^s\rho^s + s^2\rho^{2s}\right). \quad (63)$$

В точке сингулярности, выражение (63) стремится к конечному положительному значению $V_0|_{r=0} = (s/2\rho)^2$. Учитывая другие слагаемые, эффективный потенциал стремится к значению $V_{\rm eff} \approx \vec{k}^2 + (l+s/2)^2/\rho^2$. Уравнение и решение имеют вид (62) с точностью до замены $\kappa^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 - (l+s/2)^2/\rho^2$ и зависимости $\varrho(r)$. При $\kappa^2 > 0$ моды остаются сингулярными и не интегрируемыми. При $\kappa^2 < 0$ решение можно упростить

$$\Phi \approx C_1 r^{-|\kappa|\rho - s/2} + C_2 r^{|\kappa|\rho - s/2}.$$

Первая мода решения всегда сингулярна и не интегрируема. Вторая мода регулярна при условии $|\kappa|\rho \ge s/2$ (которое можно переписать в виде $\omega^2 \le \vec{k}^2 + l(l+s)/\rho^2$) и всегда интегрируема. В случае $\kappa^2 = 0$ выбирается следующее значимое слагаемое эффективного потенциала r^z с наименьшей степенью, для которого уравнение и решение принимают вид

$$\chi'' - b\exp\left(z\varrho/\rho\right)\chi \approx 0,$$

$$\Phi \approx r^{-s/2}\left(C_1 I_0\left(\frac{2\sqrt{b}\rho}{z}r^{z/2}\right) + \right. \left. + C_2 K_0\left(\frac{2\sqrt{b}\rho}{z}r^{z/2}\right)\right) \approx \approx C_1' r^{-s/2} + C_2' r^{-s/2}\ln r,$$

где $b, z > 0$ — константы, I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя второго рода. Полученные решения расходятся при любых C_1, C_2 и не являются интегрируемыми.

5. ФИШЕР–БРАНЫ С ПАРАМЕТРОМ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ СФЕРИЧНОСТИ

Статичные незаряженные решения в теории гравитации со скаляром, к которой сводится действие (1) при $F = 0$, можно свести к простой σ-модели, которая позволяет вносить скалярный заряд в решения общей теории относительности. Для этого в σ-моделях (10) или (11) можно положить равным нулю v или u соответственно

$$dl_0^2 = \frac{s+d}{sd}\left(d\ln\sqrt{-g}\right)^2 + \frac{1}{2}d\phi^2. \quad (64)$$

Метрика таргет-пространства (64) обладает $SO(2)$-симметрией с соответствующим преобразованием [17]

$$\begin{cases} \ln\sqrt{-g} = \cos\beta\cdot\ln\sqrt{-g^{(0)}} - \sqrt{\frac{sd}{2(s+d)}}\sin\beta\cdot\phi^{(0)} \\ \phi = \sqrt{\frac{2(s+d)}{sd}}\sin\beta\cdot\ln\sqrt{-g^{(0)}} + \cos\beta\cdot\phi^{(0)} \end{cases}, \quad (65)$$

где β — параметр преобразования.

Используя известное в 3+1-мерной ОТО метрику Зипоя-Вурхиса с аксиальной симметрией, браны с $s = 1$ можно дополнительно снабдить параметром деформации δ [20, 21]. Для этого начнем с метрики Зипоя-Вурхиса в 4-мерном пространстве

$$\begin{gathered} ds^2 = -f_1(x)^\delta dt^2 + f_1(x)^{-\delta}ds^2_{(3)}, \\ ds^2_{(3)} = k^2\left[H(x,y)\left(dx^2 + \frac{x^2-1}{1-y^2}dy^2\right) + \right. \\ \left. + (x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2\right], \\ f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad H(x,y) = \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{\delta^2-1}, \end{gathered} \quad (66)$$

где k и δ — произвольные константы, а x и y — сфероидальные координаты, связанные со сферическими соотношениями $x = \frac{r}{k} - 1$, $y = \cos\theta$. Подставляя $d = s = 1$,

$|g^{(0)}| = f^{\delta}$ и $\phi^{(0)} = 0$ в $SO(2)$-преобразования (65) и переопределяя β через соответствующие заряды, получим новое решение

$$ds^2 = -f_1^{\delta\sigma} dt^2 + f_1^{-\delta\sigma} ds^2_{(3)}, \qquad \phi = \frac{\Sigma}{k} \ln f_1, \qquad (67)$$

где σ имеет прежнее значение, $k = \dfrac{M}{\sigma\delta}$. Полученное решение объединяет решения Фишера и Зипоя-Вурхиса. Далее, расширим решение до $D = d + 3$ измерений и применим преобразования (16). Так как решение имеет вид решения Фишера в $3+1$ измерениях с точностью до $f_1^{\sigma} \to f_1^{\sigma\delta}$ и $ds_{(3)}$, новое решение примет вид, аналогичный решению (21)

$$\begin{gathered}
ds^2 = f_2^{4/\Delta} \left(-f_1^{\sigma\delta} dt^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_{d-1}^2\right) + \\
+ f_2^{-4d/\Delta} f_1^{-\sigma\delta} ds^2_{(3)}, \\
\phi(r) = \frac{\Sigma}{k} \ln f_1 + 4B\alpha \ln f_2, \\
f_1(r) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_2(r) = \frac{1-c^2}{1-c^2 f_1^{\sigma\delta U}}, \\
\sigma = \frac{M}{\sqrt{M^2+\Sigma^2}}, \quad U = 1 + \frac{\Sigma\alpha}{M},
\end{gathered} \qquad (68)$$

с электрическим потенциалом

$$A_{01\ldots d-1} = \frac{2\sqrt{2B}}{c} (f_2 - 1)$$

или магнитным полем

$$F_{y\varphi} = \frac{4c\sqrt{2B}}{1-c^2} (M + \alpha\Sigma).$$

Полученное решение представляет решение со скалярными волосами и параметром деформации δ. Его вид совпадает с решениями (7), (8) с точностью до замены $\sigma \to \sigma\delta$ и метрики $h_{\alpha\beta}$ на 3-мерную часть метрики Зипоя–Вурхиса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построены заряженные p-браны с первичными скалярными волосами и электрическим или магнитным зарядом в теории Эйнштейна со дилатоном и полем антисимметричной формы с помощью сигма-модельного представления. Благодаря непрерывной $SO(2)$-дуальности решения с 3-мерным поперечным пространством удалось также снабдить параметром отклонения от сферичности наподобие решения Зипоя-Вурхиса в ОТО.

Полученные сферически симметричные решения представляют собой голые сингулярности, кроме случая черных дыр при регулярном затравочном решении $\sigma = 1$ ($\Sigma_0 = 0$, $M_0 > 0$) с параметром преобразования Харрисона $c^2 < 1$. Условие $\Sigma_0 = 0$ может быть выражено в терминах новых зарядов, и в случае 0-бран в 4-мерном пространстве совпадает со связью на заряды Рашида [27]. Параметр преобразования таргет-пространства c, принимающий значения от -1 до $+1$, аналитически может быть продолжен на всю вещественную ось, причем существуют нетривиальные пределы в окрестности точек $c = \pm 1$. Один из таких пределов накладывает две связи на заряды: одну — совпадающую с условием регулярности и другую — дополнительную, которая совпадает с условием «no-force» для известных случаев. Необходимое условие регулярности на заряды приводит к регулярным черным дырам лишь для общего случая. Несмотря на выполнение этого условия предельными решениями S_E, их горизонт совпадает с другой сингулярностью при $\alpha \neq 0$, и поэтому решения S_E являются сингулярными. В случае $c^2 > 1$ возникает новая сингулярность с другими физическими свойствами.

В работе были изучены геодезические в окрестности сингулярности на фоне каждого класса решений, в том числе эффективный радиальный потенциал и интервал времени (собственный и удаленного наблюдателя), необходимый для достижения геодезическими сингулярности. В общем случае при $c^2 < 1$ ключевую роль в поведении геодезических играет параметр σ. Для общего случая с параметром $c^2 > 1$ характер геодезических в окрестности сингулярности принципиально не зависит от параметров теории и фонового решения. Существенным для характера геодезических на фоне решений из класса S_E является отношение дилатонной константы связи α к своему критическому значению $\alpha^2_{\text{crit}} = 2s^2/(s+d)$. Если $\alpha^2 \leq \alpha^2_{\text{crit}}$, характер геодезических кривых в окрестности сингулярности схож с геодезическими в окрестности черной дыры: эффективный потенциал всегда ограничен, а сама геодезическая достигает сингулярности за бесконечный промежуток времени относительно внешнего наблюдателя. В противном случае, при $\alpha^2 > \alpha^2_{\text{crit}}$ эффективный потенциал для геодезических с угловым моментом расходится, а радиальные геодезические достигают точку сингулярности за конечное время удаленного наблюдателя.

На фоне полученных решений было рассмотрено пробное скалярное поле. С помощью замены динамической переменной и радиальной координаты, уравнение движения пробного скалярного поля всегда приводимо к виду уравнения Шредингера с некоторым эффективным радиальным потенциалом. Этот потенциал состоит из двух частей, одна из которых совпадает с эффективным потенциалом геодезических с точностью до замены интегралов движения на квантовые числа; вторая часть определяется формой фоновой метрики и всегда содержит значимые для асимптотического поведения в окрестности сингулярности члены. Поведение новой радиальной координаты, при которой уравнение принимает вид уравнения Шредингера, существенно зависит от того, достигают ли геодезические точки сингулярности за конечное время внешнего наблюдателя. Для класса фоновых метрик S_E было показано, что вид скалярного поля существенно меняется при переходе через критическую точку дилатонной константы связи $\alpha_{\rm crit}$. В зависимости от параметров фоновой метрики, пробное скалярное поле может быть регулярным, сингулярным либо содержать как регулярные, так и сингулярным моды. Для общего класса решений при любых значениях c^2 все моды решений являются квадратично интегрируемыми в окрестности сингулярности, поэтому выбор граничных условий является важным вопросом в задаче о стабильности решений на фоне линейных скалярных возмущений. Для предельного класса решений по меньшей мере одна из мод не является квадратично интегрируемой в окрестности горизонта, за исключением случая $l = 0$, $s = 1$, $\alpha^2 > 2(d+2)/(d+1) > \alpha^2_{\rm crit}$, который для теории суперструн имеет вид $s = 1$, $d = 7$, $|\alpha| > 3/2$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта 17-02-01299а.

[1] *Stelle K. S.* // В “Trieste 1996, High energy physics and cosmology”. P. 287-339.
[2] *Asakawa T., Kobayashi S., Matsuura S.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2006. **21**. P. 1503.
[3] *Bronnikov K. A., Melnikov V. N., Shikin G. N., Staniukowicz K. P.* // Annals Phys. 1979. **118**. P. 84.
[4] *Virbhadra K. S., Ellis G. F. R.* // Phys. Rev. D. 2002. **65**. P. 103004.
[5] *Gyulchev G. N., Yazadjiev S. S.* // Phys. Rev. D. 2008. **78**. P. 083004.
[6] *Crisford T., Santos J. E.* // Phys. Rev. Lett. 2017. **118**. P. 181101.
[7] *DeAndrea J. P., Alexander K. M.* // Phys. Rev. D. 2014. **89**. P. 129904(E) [Erratum: Phys. Rev. D. 2014. **89**. P. 123012].
[8] *Sokolowski L., Carr B. J.* // Phys. Lett. B. 1986. **176**. P. 334.
[9] *Fisher I. Z.* // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1948. **18**. P. 636.
[10] *Janis A. I., Newman E. T., Winicour J.* // Phys. Rev. Lett. 1968. **20**. P. 878.
[11] *Winicour J., Janis A. I., Newman E. T.* // Phys. Rev. 1968. **176**. P. 1507.
[12] *Wyman M.* // Phys. Rev. D. 1981. **24**. P. 839.
[13] *Buchdahl H. A.* // Phys. Rev. 1959. **115**. P. 1325.
[14] *Virbhadra K. S.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1997. **12**. P. 4831.
[15] *Bhadra A., Nandi K. K.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2001. **16**. P. 4543.
[16] *Virbhadra K. S., Jhingan S., Joshi P. S.* // Int. J. Mod. Phys. D. 1997. **6**. P. 357.
[17] *Abdolrahimi S., Shoom A. A.* // Phys. Rev. D. 2010. **81**. P. 024035.
[18] *Chase J. E.* // Commun. Math. Phys. 1970. **19**. P. 276—288.
[19] *Harrison B. K.* // J. Math. Phys. 1968. **9**. P. 1744.
[20] *Zipoy D. M.* // J. Math. Phys. 1966. **7**. P. 1137.
[21] *Voorhees B. H.* // Phys. Rev. D. 1970. **2**. P. 2119.
[22] *Zhou S., Zhang R., Chen J. , Wang Y.* // Int. J. Theor. Phys. 2015. **54**. P. 2905.
[23] *Chowdhury A. N., Patil M., Malafarina D., Joshi P. S.* // Phys. Rev. D. 2012. **85**. P. 104031.
[24] *Babar G. Z., Jamil M., Lim Y.-K.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2016. **25**. P. 1650024.
[25] *Gal’tsov D. V., Rytchkov O. A.* // Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 122001.
[26] *Xanthopoulos B. C., Zannias T.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 2564.
[27] *Rasheed D.* // Nucl. Phys. B. 1995. **454**. P. 379.
[28] *Lu H., Pope C. N., Sezgin E., Stelle K. S.* // Nucl. Phys. B. 1995. **456**. P. 669.
[29] *Tseytlin A. A.* // Nucl. Phys. B. 1997. **487**. P. 141.
[30] *Scherk J.* // Phys. Lett. 1979. **88B**. P. 265.
[31] *Nozawa M.* // Class. Quant. Grav. 2011. **28**. P. 175013.
[32] *Poletti S. J., Twamley J., Wiltshire D. L.* // Class. Quant. Grav. 1995. **12**. P. 1753 [Erratum: Class. Quant. Grav. 1995. **12**. P. 2355].
[33] *Geng W. J., Giant B., Lu H., Pope C. N.* // Class. Quant. Grav. 2019. **36**, no. 14. P. 145003.
[34] *Dabholkar A., Gibbons G. W., Harvey J. A., Ruiz Ruiz F.* // Nucl. Phys. B. 1990. **340**. P. 33.
[35] *Duff M. J., Khuri R. R., Lu J. X.* // Phys. Rept. 1995. **259**. P. 213.
[36] *Clement G., Gal’tsov D., Leygnac C.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**. P. 084014.
[37] *Harnad J. P., Winternitz P.* // Lett. Math. Phys. 1995. **33**. P. 61.
[38] *Sadhu A., Suneeta V.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2013 **22**. P. 1350015.
[39] *Gibbons G. W., Hartnoll S. A., Ishibashi A.* // Prog. Theor. Phys. 2005. **113**. P. 963.
[40] *Philipp D., Perlick V.* // arXiv:1503.08101 [gr-qc].
[41] *Kehle C., Shlapentokh–Rothman Y.* // Annales Henri Poincare. 2019. **20**, no. 5. P. 1583.
[42] *Futterman J. A. H., Handler F. A., Matzner R. A.* // “Scattering From Black Holes”. Cambridge University Press, 2012.
[43] *Bronnikov K. A.* // Particles. 2018. **1**, no. 1. P. 56.
[44] *Dain S., Dotti G.* // Class. Quant. Grav. 2013. **30**. P. 055011.

Hyperbranes with scalar hair

I. A. Bogush[a], D. V. Gal'tsov[b]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]ig.bogush16@physics.msu.ru, [b]galtsov@phys.msu.ru

According to the well-known theorems of the absence of scalar hair in black holes with a regular event horizon, the dilaton charge of the p-brane in supergravity theories is not an independent parameter. In a scalar-tensor theory with minimal coupling, the asymptotically flat solution with a non-zero scalar charge has a singular horizon. With solution generating techniques via sigma-model representation, here we obtain p-brane solutions, where the dilaton charge is an independent parameter, and then we discuss their properties. For the case of three-dimensional transverse space, we construct solutions with an independent deformation parameter, which represents the deviation from the spherical symmetry. For $p = 0$ and in the absence of the scalar field, this solution corresponds to the Zipoy-Voorhees solution in general relativity.

PACS: 04.20.Dw; 04.20.Jb; 04.50.Gh.
Keywords: black holes, p–branes, no-hair theorems, Weyl solutions, naked singularities.
Received 25 August 2019.

Сведения об авторах

1. Гальцов Дмитрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: gdmv04@mail.ru.
2. Богуш Игорь Андреевич — аспирант; e-mail: ig.bogush16@physics.msu.ru.