

## Характеристики фрактальных многослойных структур с метаматериалами

Ю. В. Рыжикова<sup>1,\*</sup>, Ю. В. Мухартова<sup>2</sup>, С. Б. Рыжиков<sup>3</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет

<sup>1</sup>кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем

<sup>2</sup>кафедра математики, <sup>3</sup>кафедра общей физики

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 30.06.2018; Подписана в печать 10.09.2018)

Рассмотрены скейлинговые свойства спектральных характеристик аперiodических многослойных систем с метаматериалами. Определена роль дисперсионных эффектов и эффектов фазовой компенсации при изменении геометрии образующих слоев и переходе к квазикристаллическим моделям аппроксимантов.

PACS: 68.65.Ac; 42.25.Nz; 02.70.-c

УДК: 535.015

Ключевые слова: скейлинг, аперiodические многослойные системы, дисперсия, метаматериалы, аппроксиманты.

### ВВЕДЕНИЕ

Элементы со сложной пространственной структурой, в том числе обладающие фрактальными свойствами, широко используются в различных оптических устройствах, создаваемых, в частности, на основе современных нанотехнологий [1, 2]. Среди них широкое распространение получили многослойные системы с метаматериалами [3, 4].

В процессе исследования характеристик многослойных систем выяснилось, что отступление от периодичности приводит к появлению целого ряда уникальных особенностей, представляющих как практический, так и общетеоретический интерес. В частности, аперiodические многослойные структуры (АМС) применяются при создании широкополосных отражателей, оптических переключателей, элементов рентгеновской оптики, антенн с новыми оптическими свойствами, высокочувствительных сенсоров для детектирования биологических и химических агентов и других устройств [5, 6]. Часто аперiodичность сочетается с наличием фрактальных признаков, проявляющихся в структуре объектов и их характеристиках. Поскольку фрактальность заметно воздействует на оптические свойства структур, существует потребность в определении степени влияния различных факторов на самоподобие их спектральных характеристик.

Несмотря на определенное внимание к исследованию фрактальных многослойных структур с метаматериалами [7, 8], целый ряд вопросов, относящихся к условиям формирования фрактальных признаков зондирующих световых пучков, остается недостаточно изученным.

Целью настоящей работы было рассмотрение ряда слабо изученных вопросов, относящихся к анализу скейлинговых особенностей спектров пропускания и их связи с проявлением самоподобия в геометрии исследуемых структур. В частности, на основе чис-

ленного моделирования была проведена оценка влияния изменения геометрии структуры АМС Фибоначчи с метаматериалами на стабильность самоподобных фрагментов, присутствующих в оптических спектрах анализируемых систем.

### 1. ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ СИСТЕМ С МЕТАМАТЕРИАЛАМИ

Изменения в многослойную структуру вносились путем трансформации их геометрического принципа построения и переходом к моделям аппроксимантов [9, 10]. С использованием внесения геометрических изменений в исследуемые многослойные структуры открывается возможность оказывать целенаправленное воздействие на их спектральные характеристики.

Часто многослойные структуры представляются в виде блоков элементов  $A$  и  $B$ , чередующихся по определенному закону и соответствующих различным уровням генерации [7]. Так, начальные уровни аперiodической системы Фибоначчи состоят из элементов:  $S_0 = B$ ,  $S_1 = A$ ,  $S_2 = AB$ . При переходе к более высокому структурному уровню используются правила замещения:  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow A$ . Блоки первых структурных уровней АМС Морса–Туэ записываются, как  $S_0 = A$ ,  $S_1 = A$ ,  $S_2 = ABBA$ . Переход к каждому более высокому структурному уровню может быть осуществлен с помощью правил замены:  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow BA$ . Величины  $A$ ,  $B$  и порядок их следования определяют в АМС чередование слоев с разными показателями преломления  $N_A$  и  $N_B$ . В настоящей работе было принято, что показатель преломления среды, окружающей АМС, равен  $N_C = 1$ .

Применительно к рассматриваемым аперiodическим структурам простейший тип их аппроксимантов — блочный:  $A_l^{(1)} = A_l = \{S_l\}^p$ ,  $l$  — уровень генерации, используемой аперiodической числовой последовательности,  $p$  — порядок аппроксиманта, определяемый числом элементарных ячеек [9, 10].

\*E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru

В настоящей работе рассматривается модель АМС, где слои  $A$  выполнены из метаматериала, который в определенном спектральном интервале характеризуется отрицательным показателем преломления. При этом слои  $B$  выполнены из диэлектрика с постоянным положительным показателем преломления. Возможная геометрическая конфигурация метаматериала приведена в [11].

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  и магнитная восприимчивость  $\mu$  метаматериала определяется с помощью следующих выражений [12]:

$$\varepsilon_A(f) = 1 + \frac{5^2}{0.9^2 - f^2 - if\gamma} + \frac{10^2}{11.5^2 - f^2 - if\gamma}, \quad (1)$$

$$\mu_A(f) = 1 + \frac{3^2}{0.902^2 - f^2 - if\gamma}, \quad (2)$$

где  $f$  и  $\gamma$  — величины, численно равные частоте, измеренной в ГГц,  $\gamma$  — характеризует величину потерь,  $i = \sqrt{-1}$ . Дискретизация величины  $f$  задается с помощью соотношения  $f_k = 1.5(1 + 0.0033k)$ , где  $k = 0 \dots \tilde{N}_{\max}$  — коэффициенты дискретизации,  $\tilde{N}_{\max}$  — заданное дискретное значение, ограничивающее частотный интервал.

В ходе расчетов спектров отражения и пропускания АМС применяется матричный подход [13] с использованием закона Френеля для метаматериалов [3]. При этом предполагается, что на выходе рассматриваемых систем формируется волна единичной амплитуды. Амплитуды электрического поля отраженной  $E^{(r')}$  и прошедшей волн  $E^{(t)}$  со стороны среды, из которой падает свет, с учетом граничных условий на  $m$ -ой границе раздела, имеют вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{0-}^{(t)} \\ E_{0-}^{(r')} \end{bmatrix} &= \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \dots \Delta_{m-1} \begin{bmatrix} E_{(m)-}^{(t)} \\ E_{(m)-}^{(r')} \end{bmatrix} = \\ &= \Delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N_m}{N_{m-1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{N_m}{N_{m-1}} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Delta = \prod_{j=1}^{m-1} \Delta_j$ , индексы  $t$  и  $r'$  относятся к волнам, распространяющимся соответственно в прямом и обратном направлениях, знак «-» при нижних индексах означает, что напряженности определяются слева от границы раздела слоев. По найденному из уравнения (3) значению  $E_{0-}^{(t)}$  определяется величина коэффициента пропускания по мощности  $T_k$ :

$$T_k = \frac{1}{|E_{0-}^{(t)}|_k^2}. \quad (4)$$

Для более отчетливого проявления самоподобных деталей спектральных зависимостей применяется логарифмическое представление  $r = -\ln(T_k)$ .

Для расчета спектральных характеристик многослойных систем с метаматериалами нами был разработан комплекс вычислительных программ. С целью тестирования разработанного комплекса, матричный подход оценок коэффициентов пропускания (3)–(4) был применен к периодическим многослойным системам. Результаты определения коэффициентов пропускания совпадают с литературными данными [14, 15].

В результате проведенных численных расчетов было показано, что внесение метаматериалов значительно видоизменяет и усложняет структуру спектральных характеристик многослойных систем. Эти изменения могут быть проанализированы на основе использования паттерного подхода [16], базирующегося на фиксации и определении особенностей отдельных самоподобных фрагментов (паттернов) структур и характеристик рассматриваемых распределений. Регистрируя наличие и форму того или иного паттерна в характеристиках АМС, можно проводить идентификацию их структурных особенностей.

В ходе исследований оптических характеристик аperiodических многослойных структур с различной геометрией расположения слоев было установлено, что формирование паттернов при отрицательных показателях преломления свойственно лишь структурам, у которых количество слоев разных типов неодинаково. Это связано с тем, что в системах с одинаковым числом слоев разных типов начинает сильно проявляться эффект фазовой компенсации, характерный для спектров пропускания периодических систем с метаматериалами [14, 15]. На рис. 1 показано, что наличие метаматериала  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$  приводит к подавлению пропускания (ступенчатая дисперсионная зависимость) и возникновению дополнительной запрещенной зоны (в случае дисперсионных эффектов вида (1)–(2)). Упрощенная ступенчатая дисперсионная модель (рис. 1) позволяет селективным образом описать, как на структуру паттернов влияет сам факт присутствия в многослойной системе метаслоев.

На рис. 2 представлена спектральная характеристика  $r(k)$  АМС Морса–Туэ, некоторые спектральные свойства которой рассмотрены в [17, 18]. Данная аperiodическая многослойная система характеризуется одинаковым числом слоев разных типов  $A$  и  $B$ . Из рис. 2 видно, что при отрицательных показателях преломления паттерны  $ab$ ,  $cd$  формироваться не будут. Паттерны на приведенном графике наблюдаются лишь в области, где  $\varepsilon_A > 0$ ,  $\mu_A > 0$ . Их форма полностью соответствует паттернам, наблюдаемым в диэлектрических АМС Морса–Туэ [17].

Количественные оценки структурного соответствия фиксируемых паттерных образований в спектральных характеристиках исследуемых систем выполнялись на основе корреляционного анализа и определения коэффициентов скейлинга. На рис. 3 представлена зависимость приведенного коэффициента отражения  $r$  для АМС Фибоначчи с учетом дисперсионных эффектов и потерь (1)–(2).

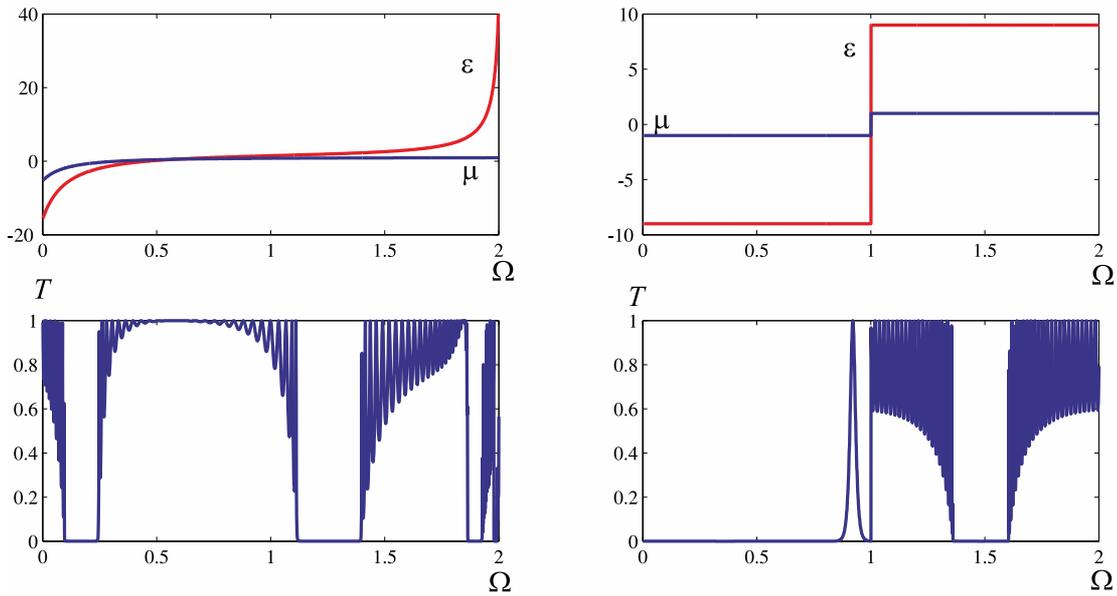


Рис. 1: Дисперсионные зависимости  $\varepsilon(\Omega)$  и  $\mu(\Omega)$  (вверху) и спектры пропускания для периодических систем с метаматериалами (внизу).  $\Omega = \omega/\omega_0$ , где  $\omega$  — частота падающей волны,  $\omega_0$  соответствует частоте, на которой меняется знак диэлектрической проницаемости

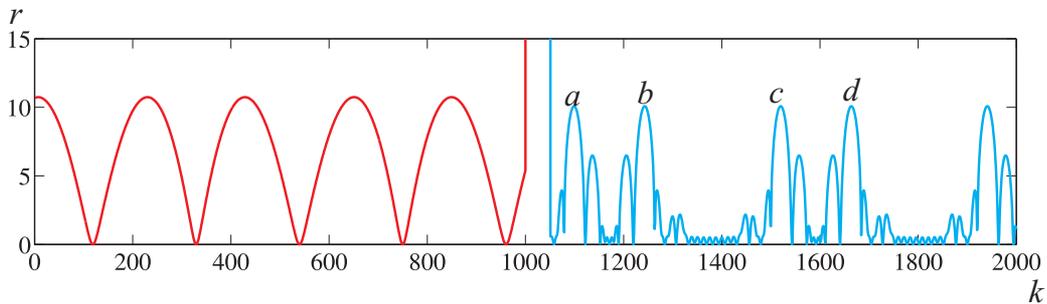


Рис. 2: Спектральная характеристика  $r(k)$  системы Морса–Туэ в однородном приближении:  $|\varepsilon_A| = 9, |\mu_A| = 1, \varepsilon_B = 2.25, \mu_B = 1$ . Присутствующие в спектре паттерны характеризуются максимумами  $abcd$ . Толщины образующих слоев равны  $d_A = 2.4$  см,  $d_B = 4.8$  см. Число слоев  $J = 32$

На рис. 3, внизу показано изменение формы наиболее устойчивого к потерям участка спектральной зависимости  $r(k)$ . Коэффициенты взаимной корреляции  $K$  между кривыми 1–4 (рис. 2, внизу) и кривой на участке  $ab$  при  $\gamma = 0$  (рис. 3, вверху), находились в интервале  $K = 0.99 - 0.97$  при малых потерях  $\gamma$ .

Определяемые из соотношения расстояний между их пиками локальные коэффициенты скейлинга в переходной области  $ab$  имеют значения  $\zeta = ab/ad \approx 1.62$  и  $\zeta_1 = ad/db \approx 1.6$  (рис. 3, внизу). При этом в области с положительным значением показателя преломления максимумы также подчиняется правилу золотого сечения [16]. В рассмотренной многослойной системе Фибоначчи число слоев  $A$  превосходит число слоев  $B$ , примерно, в  $\zeta$  раз. Здесь  $\zeta \approx 1.62$  — коэффициент скейлинга структуры Фибоначчи, равный коэффициенту золотого сечения  $\Phi$ .

Рассмотренные ранее [16, 17] особенности проявления симметрии самоподобия в АМС позволяют утверждать, что структуры Морса–Туэ и двойного периода можно характеризовать коэффициентом скейлинга равным  $\zeta = 2$ , структуру Фибоначчи —  $\zeta = \Phi \approx 1.62$ , а структуру Кантора  $\zeta = 3$ . Аналогичными коэффициентами скейлинга обладают аппроксиманты таких диэлектрических аperiodических структур [9, 10, 17].

Выполненные расчеты указывают на то, что определяющим параметром, влияющим на структуру оптических спектров аппроксимантов, является уровень генерации  $l$ . В случае наличия в АМС метаслоев требуется корректно учитывать эффекты фазовой компенсации, которые могут полностью подавить формирование паттернов (системы Морса–Туэ). Так, для АМС Фибоначчи свойственно проявление сходных по своей структуре устойчивых паттернов, как в областях с по-

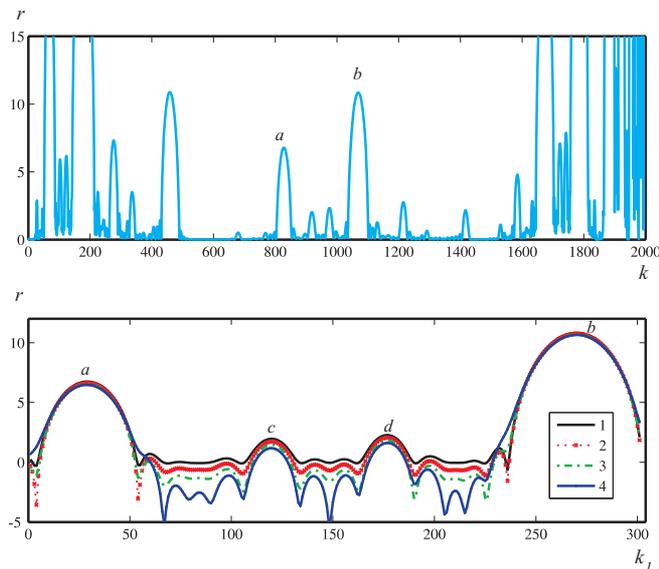


Рис. 3: Трансформация формы паттернов в спектральных характеристиках АМС Фибоначчи с учетом дисперсионных эффектов (сверху). Число слоев  $J = 64$ ,  $n_B = 1.5$ ,  $ab$ ,  $acdb$  — паттерны. Зависимости приведенного коэффициента отражения  $r$  для паттерна  $ab$  (снизу): 1 —  $\gamma = 0.01$  ГГц, 2 —  $\gamma = 0.05$  ГГц, 3 —  $\gamma = 0.1$  ГГц, 4 —  $\gamma = 0.2$  ГГц.  $k$  и  $k_1$  — коэффициенты дискретизации величины  $f$

ложительными, так и отрицательными коэффициентами преломления для  $l > 4$  [7]. При этом коэффициенты

взаимной корреляции по форме фиксируемых паттерных образований из одного интервала последовательно сформированных аппроксимантов увеличиваются с ростом  $l$  от  $K = 0.65$  до  $K = 0.97$ .

Замена аперидических систем на их аппроксиманты в ряде случаев позволяет технически упростить процесс получения более простых в изготовлении структур с желаемыми оптическими характеристиками.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показали, что на скейлинг в характеристиках многослойных систем существенное влияние оказывает изменение геометрического принципа их построения, в частности, изготовление части слоев на основе метаматериалов.

Исследование устойчивости фрактальных признаков оптических характеристик АМС с учетом влияния эффекта фазовой компенсации, показало, что наличие слоев из метаматериала оказывает заметное влияние на проявление скейлинга в оптических характеристиках рассматриваемых систем, а в некоторых случаях — под влиянием фазовой компенсации полностью его подавляет. Этот факт следует учитывать при фиксации паттернов в спектрах отражения АМС с целью выявления особенностей их структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00723 а.

- [1] Potapov A. A., Ushakov P. A., Gil'mutdinov A. Kh. Phys. Wave Phenom. 2010. **18**, N 2. P. 119.
- [2] Марголин В. И., Жабров В. А., Лукьянов Г. Н., Тулик В. А. Введение в нанотехнологию: Учебное пособие. 1-е изд. Санкт-Петербург: Издательский дом «Лань», 2012.
- [3] Веселаго В. Г. УФН. 2003. **173**, № 3. С. 790.
- [4] Боголюбов А. Н., Мухартова Ю. В., Гао Ц. Математическое моделирование. 2013. **25**, № 2. С. 65.
- [5] Лагарьков А. Н., Рыжиков И. А., Васькин А. В., Афанасьев К. Н., Богинская И. А., Быков И. В., Курочкин И. Н., Будашов И. А., Горелик В. С., Сарычев А. К. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 2. Химия. 2015. **56**, № 3. С. 115.
- [6] Suwa T., Tomita S., Hosoito N., Yanagi H. Materials. 2017. **10**. P. 1209.
- [7] Давыдова М. Г., Короленко П. В., Рыжикова Ю. В. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрон. 2016. № 4. С. 56.
- [8] Давыдова М. Г., Короленко П. В., Рыжиков С. Б., Рыжикова Ю. В. Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2015. № 4. С. 154312.
- [9] Ryzhikova Y. V., Korolenko P. V., Ryzhikov S. B. PIERS. 2017. P. 2742.
- [10] Рыжикова Ю. В., Короленко П. В., Рыжиков С. Б. Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2017. № 4. С. 1740602.
- [11] Li J., Zhou L., Chan C. T., Sheng P. Phys. Rev. Lett. 2003. **90**, N 8. P. 083901.
- [12] Aghajamali A., Javanmardi B., Barati M., Wu C.-J. Optik. 2014. **125**. P. 839.
- [13] Путилин Э. С. Оптические покрытия. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010.
- [14] Daninthe H., Foteinopoulou S., Soukoulis C. M. Photon. Nanostruct. Fundam. Appl. 2006. **4**, N 3. P. 123.
- [15] Rao V. S. C. M., Gupta S. D. J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2004. **6**. P. 756.
- [16] Davydova M. G., Korolenko P. V., Ryzhikov S. B., Ryzhikova Yu. V. Phys. Wave Phenom. 2016. **24**, N 1. P. 17.
- [17] Короленко П. В., Логачев П. А., Рыжиков С. Б., Рыжикова Ю. В. Физические основы приборостроения. 2014. **3**, № 3. С. 66.
- [18] Maksimovic M., Jaksic Z. Acta Phys. Pol. A. 2007. **112**, N 5. P. 1049.

## Characteristics of fractal multilayer structures with metamaterials

Yu. V. Ryzhikova<sup>1,a</sup>, Yu. V. Mukhartova<sup>2</sup>, S. B. Ryzhikov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Department of optics, spectroscopy and nanosystems physics,*

<sup>2</sup>*Department of Mathematics, <sup>3</sup>Department of general physics,*

*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>ryzhikova@physics.msu.ru*

The scaling properties of the spectral characteristics of aperiodic multilayer systems with metamaterials are considered. The role of dispersion effects and phase compensation effects is determined by changing the geometry of the layers and the transition to quasicrystalline models of approximants.

PACS: 68.65.Ac; 42.25.Hz; 02.70.-c

*Keywords:* scaling, aperiodic multilayer systems, dispersion, metamaterials, approximants.

*Received 30 June 2018.*

### Сведения об авторах

1. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikova@physics.msu.ru.
2. Мухартова Юлия Вячеславовна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: muhartova@yandex.ru.
3. Рыжиков Сергей Борисович — доктор пед. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: sbr@physics.msu.ru.