Обусловленное сверхразрешение с классификаторами

Е. Н. Терентьев[1*] Н. Е. Шилин–Терентьев[2†]
[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, математического моделирования и информатики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
[2]*Google, San Francisco, CA, USA*

(Статья поступила 26.06.2018; Подписана в печать 26.09.2018)

Классификация разновидностей методов сверхразрешения производится по величине промежутка между минимальным значением Модуляционной Передаточной Функции (МПФ) M(O) (для дискретной Аппаратной Функции (АФ) O) и нулем. Классификаторы лежат в основе концепции сверхразрешения. Главный параметр настройки АФ O для повышения разрешения — обусловленность, численно равная обратной величине минимального значения |M(O)|или величине этого промежутка.

PACS: 02.30.Nw, 02.30.Zz УДК: 517.444
Ключевые слова: модуляционная передаточная функция, обусловленность, свертка преобразование Фурье, обратная проблема, сверхразрешение.

ВВЕДЕНИЕ

Аналогом обусловленности матрицы является параметр обусловленности для циклической матрицы или АФ O. Проблема сверхразрешеня начинается с построения множества {O} дискретных моделей АФ O по непрерывной модели АФ parO по трем параметрам: длина области определения Loc, шаг оцифровки dx и параметр обусловленности DIAP=1/diap (от слова diapazon для значений МПФ M(O), M(R)). В примере на рис. 1 оцифровывается стандартная гауссоида с Loc=6 с $dx = 1$ и $dx = 1/2$. Задачи выбора дискретной модели АФ O рассматриваются на множестве LO={pO | [Loc, dx, DIAP]} обратимых pR=pO^{-1}, M(pR)=1/M(pO).

Для АФ дельта–символ Кронекера DK МПФ(DK)==1, тождественно равна единице. Ниже единицы до diap располагаются значения МПФ M(pO), выше единицы до DIAP=1/diap — значения M(pR)=1/M(pO). Самая обусловленная АФ DK, с DIAP=diap=1, если DIAP увеличивается, то обусловленность падает. Точность ортогонализации двумерных Фурье гармоник учитываем инструментальной ошибкой (из-за ошибок мантиссы) Iz$\sim 10^{-13}$. Отсюда минимальное значение обусловленности — DIAP=Iz^{-1}. Ограничимся АФ O с МПФ M(O)(0,0)=1.

Мы исходили из того, что нам доступны изображения низкой точности в одно или в двух байтовом представлении. Поэтому в классификаторе разновидностей методов сверхразрешения пока выделяем пять методов–клеток в зависимости от длины промежутка между минимальным собственным значением md = min(|M(O)|) и нулем и точностью представления изображений.

Настройка АФ pO по обусловленности

По данной двумерной дискретной АФ O в линейной модели со сверткой — собственные функции АФ O есть множество двумерных Фурье гармоник H. В основе расчета двумерных массивов МПФ M_{ij} =M(O), i,j =1:Loc+1 — задача на собственные значения O$*$H=M_{ij}H, которая решается с помощью Дискретного Прямого Преобразования Фурье (ДППФ) и операции четного продолжения [4].

Прибор с дискретной АФ O присутствует в линейной модели регистрации изображений со сверткой I_∂ =Oσ*I_x. Значками SD (стандартное отклонение) ∂ и σ, отмечаем, что измеренное изображение I_∂ и АФ Oσ известны с ошибками. В этой работе предполагается линейная дискретная модель регистрации изображений I_∂=O*I_x, т.е. с $\sigma = 0$. Одинаково точные с $\sigma = 0$ модели дискретных АФ O с разными Loc и dx, полученные оцифровкой с одной непрерывной АФ parO, заметно различаются в результатах получаемого сверхразрешения. Часто возникают ситуации, когда исходное изображение с $dx = 1$, требуется интерполировать (или измерить снова) под меньший шаг оцифровки с обратимым АФ O. Обозначим md=min|M(O)| — не настраиваемый и mD=min|M(pO)| — настраиваемый промежуток МПФ M(O) и нулем. Если md>0, то R=O^{-1} и I_x=R$*I_\partial$.

Пусть мы «отодвинули» от нуля опасные малые значения МПФ на расстояние mD>md с получением двумерного массива МПФ pM_{ij} из M_{ij}=M(O), i,j = 1:Loc+1, т.е. повысили обусловленность АФ pO. Тогда с помощью Дискретного Обратного ПФ (ДОПФ) и операции четного продолжения решается обратная задача на собственные значения: pO*H=pM_{ij} H по вычислению настроенного двумерного АФ pO [4]. Так как мы далее АФ O заменяем более обусловленной АФ pO, то оцениваем и увеличенную ошибку Err(pO) и уменьшенную реакцию на шум Nor(pR)=||pR||есть норма разрешающей функции такой настройки по обусловленности.

*E-mail: en.teren@physics.msu.ru
†E-mail: nikolay.terentyev@gmail.com

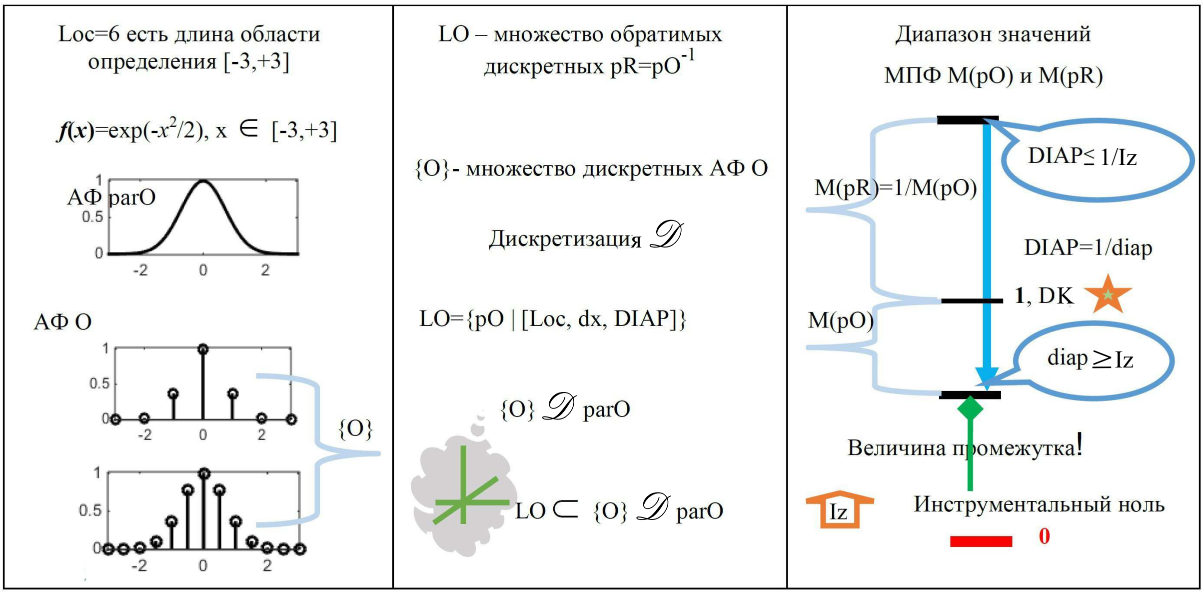

Рис. 1: Иллюстрации основных понятий

A	B	C	D	E	F, Finish
O=D_K	O~D_K	M(O),M(pO)	M(O),M(pO)	M(O),M(pO)	M(O)~D_K
md=M(D_K)=1	**1≤md≤10^{-1}** R=O^{-1}	**10^{-1}≤md≤10^{-4}** md->mD pR=pO^{-1}	**10^{-4}≤md≤10^{-5}** md->mD pR=pO^{-1}	**Iz≤ md≤10^{-5}** md->mD pR=pO^{-1}	**0≤md≤Iz=10^{-13}**
Обращение не нужно	*Обычное обращение*	*Для измерений низкой точности*	*Для измерений высокой точности*	*Модельные эксперименты*	*Ошибки мантиссы*

Рис. 2: Классификатор методов сверхразрешения. В последнем случае F из-за ошибок мантиссы вычисления не имеют смысла

Ошибки АФ pO при настройке обусловленности

Величина ошибки АФ pO оценивалась величиной Err(pO)=SD(O-pO)/max(O), где

$$\mathrm{SD}(\mathrm{O}-\mathrm{pO}) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc}+1} (\text{O-pO})^2 / \left((\mathrm{Loc}+1)^2 - 1\right)}.$$

Прибор априори — до измерений — должен «настраиваться» по параметрам [Loc, dx, mD] по непрерывной АФ parO [2–5], так что бы было либо естественное md> 0, либо с интерполированием изображения под другой шаг оцифровки, и повышением обусловленности DIAP для АФ O, mD >md> 0 (рис. 2 и 4). Сказанное означает, что в Классификаторе мы можем оказаться в **методах C, D** (измерения низкой и высокой точности), но лучше бы сразу попасть в идеальный **метод B** (обычное обращение без настройки обусловленности) (рис. 2).

В работе [3] приводится пример, когда для АФ O с Loc=размер изображения добавление одной точки (Loc увеличивается на 1) приводит к обратимости АФ O, задача становиться корректной.

Классификаторы

Классифицируются методы сверхразрешения по величине промежутка 0 ≤md≤ 1 для АФ O в модели регистрации изображений I∂ =O*I_x.

Исходные данные

Для иллюстрации возможностей методов будут взяты три малых фрагмента изображения поверхности Марса с камнем. Заметим, что выделенные малые фрагменты изображений малоконтрастные — низкой точности — все яркости представлялись одним байтом, **метод C** классификатора.

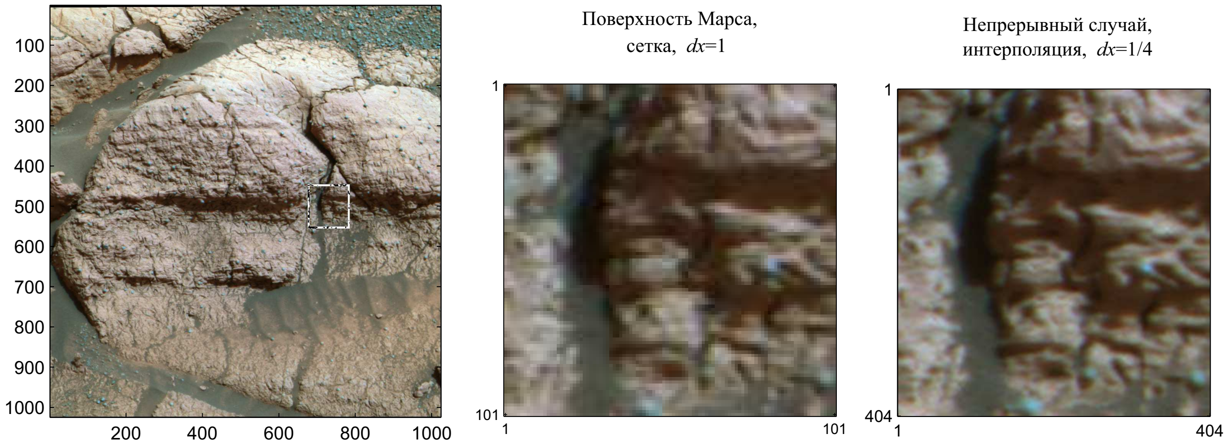

Рис. 3: Фрагмент изображения поверхности Марса, представленного на исходной сетке с $dx = 1$ и интерполированное изображение с помощью КМТО в непрерывный случай на сетке с $dx = 1/4$

Конечномерная Теорема Отсчетов для интерполяции

КМТО: Пусть даны: двумерный массив отсчетов (изображение на исходной сетке K, N) $D = f(x0, y0)$, двумерные ортонормированные матрицы дискретных Фурье гармоник $H(x0) = \{H_i(x0), i = 1 : K, x0 = 0 : K-1\}$, $H(y0) = \{H_j(y0), j = 1 : N, y0 = 0 : N-1\}$ и «непрерывные» Фурье гармоники $H(x) = \{H_i(x), i = 1 : K, x = 0 : dx : K-dx\}$, $H(y) = \{H_j(y), j = 1 : K, y = 0 : dy : K-dy\}$, $dx < 1$, $dy < 1$. Все Фурье гармоники нумеруются первым индексом и в матрицах H гармоники располагаются горизонтально.

Тогда непрерывная функция:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{K,N} C_{i,j}\, H_i(x)\, H_j(y) \tag{1}$$

$$c_{i,j} = (f(x0,y0), H_i(x0)H_j(y0)) = \\ = \sum_{x0,y0=1}^{K,N} f(x0,y0)H_i(x0)H_j(y0), \quad i = 1:K, \quad j = 1:N \tag{2}$$

проходит через точки отсчетов $f(x0, y0)$. Скалярные произведения (2) реализуют двумерные ДППФ, а Фурье ряд (1) дает нам интерполированный двумерный результат.

В одномерном случае $D = f(x0)$ результат интерполирования записывается в одну строку:

$$f(x) = (H(x0) * D')' * H(x). \tag{3}$$

Звездочкой «$*$» в (3) обозначаем правило «строка $*$ столбец с суммированием» при умножении матриц и штрихом $'$ — транспонирование. Первая звездочка реализует одномерное ДППФ (2), а вторая звездочка — сумму дискретного ряда Фурье (1). Заметим, что матрицы оцифрованных Фурье гармоник $H(x0), H(y0)$ — унитарные по построению и предназначены для реализации одномерных ДПФ.

Такая интерполяция (1) дает хорошие результаты, если нет перепада отсчетов на границе изображений. В противном случае надо применять специальные защищенные от граничных эффектов методы [2, 3].

Есть варианты КМТО с операциями интегрирования и дифференцирования над массивами отсчетов вдобавок к интерполяции [6].

Выбор адекватной модели в методах C, D и E

Основная задача по выбору АФ $\mathrm{pO} = \mathrm{pR}^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{\mathrm{LO}}\{\|\mathrm{pR}\|\,|\mathrm{Err(pO)} \le \mathrm{err}\}, \quad \mathrm{LO} = \mathrm{pO}|[\mathrm{Loc}, dx, \mathrm{mD}]\} \tag{4}$$

с построением Характеристикой Адекватности Модели (ХАМ) АФ О [2, 3]

$$\mathrm{x} = \mathrm{Nor(pR)} = \|\mathrm{pR}\|, \quad \mathrm{y} = \mathrm{Err(pO)}, \mathrm{z} = \mathrm{II(pR * O)}. \tag{5}$$

Снизу не настраиваемый промежуток md должен быть больше Iz: md>Iz. В связи с этим ограничением по ошибке рассмотрим вариант ХАМ АФ О учитывая Iz обращение двумерной МПФ M(O)(в записи без индексов):

$$\mathrm{M}(\mathrm{z}R) = \begin{cases} 1/\mathrm{M}(O), \text{for all } |\mathrm{M}(O)| > \mathrm{I}z, \\ \mathrm{M}(O) \end{cases}, \tag{6}$$

$$\{x = \|\mathrm{zR}\|, \quad y = \mathrm{Err(zO)}, \quad z = \mathrm{II(zR * O)}\}. \tag{7}$$

В ХАМ АФ О (5,7) по оси z откладываются значения Индикаторов Обратимости (Indicators of Inversion) II(pR$*$O)=(pR$*$O)(0,0) и II(zR$*$O)=(zR$*$O)(0,0), т.е.

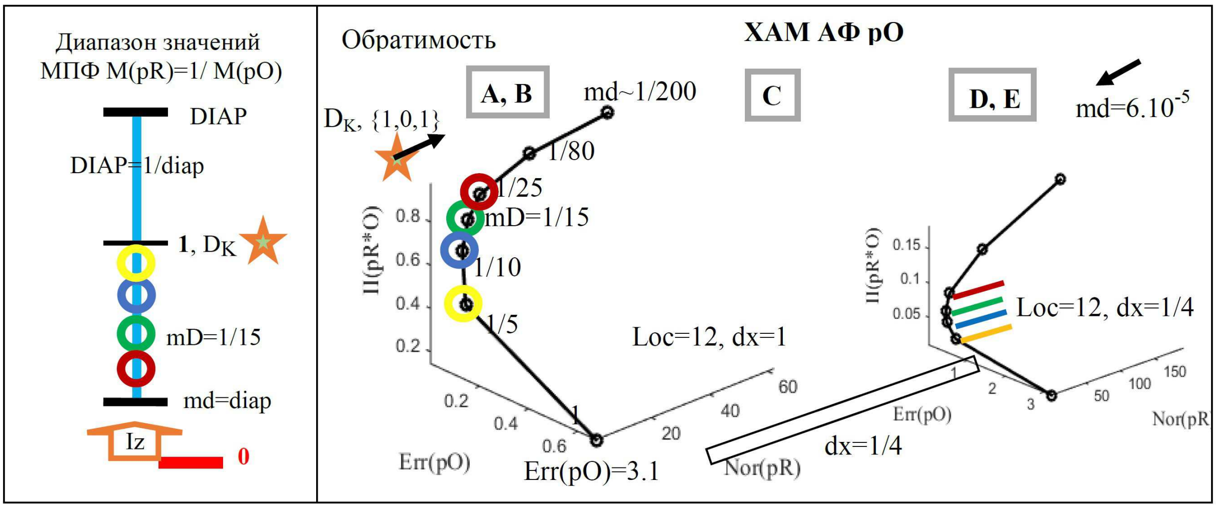

Рис. 4: Промежутки md=min|M(O)|, mD=min|M(pO)|и ХАМ АФ pO

значения сверток настраиваемой pR и не настраиваемой zR с исходной АФ O в точке (0,0). В обратимом случае II(zR$*$O)=1, zR=R=O^{-1}. Может случиться и так, что изменяя длину области определения Loc мы получаем обратимый случай II(pR$*$O)=1, pR=O^{-1}. В ХАМ АФ O (5,7) Индикаторы Обратимости являются основным понятием для интерпретации результата сверхразрешения, который соответствует прибору с АФ pR$*$O. При идеальном сверхразрешении pR$*$O=DK — символ дельта Кронекера.

Оценивание величины сверхразрешения

Пусть имеет место нормировка для $\sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{Loc+1}} O_{ij} = 1$, тогда МПФ M(O)(0,0)=1, в этом случае мы будем оценивать настраиваемое сверхразрешение величиной

$$\mathrm{SR} = \mathrm{BP}/\sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc+1}} \mathrm{M}_{ij}(\mathrm{pO}) \leq \sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc+1}} / \sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc+1}} \mathrm{M}_{ij}(\mathrm{pO}) \geq 1, \tag{8}$$

$$\mathrm{BP} = \sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc+1}} \mathrm{M}_{ij}(\mathrm{pR})\mathrm{M}_{ij}(\mathrm{O}). \tag{9}$$

где BP (9) (от Band Pass) — полоса пропускания. Если АФ O=DK — символ дельта–Кронекера, то SR=1. Понятно, что проблема сверхразрешения возникает для случаев, когда АФ O≠DK.

Полоса пропускания ограничивается площадью области определения АФ O BP $\leq \sum_{i,j=1}^{\mathrm{Loc+1}} = (\mathrm{Loc+1})^2$. Величина SR не должна зависеть от больших размеров областей определения АФ O и размеров изображений. Аналогично настраиваемым SR (8) и BP(9) можно ввести величины максимально возможные величины zSR и zBP при минимальной обусловленности DIAP=Iz^{-1}, но заметим, что это реализуется при максимальной реакции на шум Nor(zR) (7).

Примеры ХАМ АФ pO

С ХАМ АФ O (4) представлены **методы** от **A** до **E**, отмеченные светлыми прямоугольниками. ХАМ дискретной модели с $dx = 1$ и размером области определения Loc=12 соответствует методу **C**. ХАМ непрерывной модели с $dx = 1/4$, Loc=12 ближе к **методам D**, **E** (рис. 4).

Если ХАМ непрерывной модели изображать в одном масштабе, то ХАМ непрерывной модели условно займет место длинного прямоугольника, помеченного Err(pO)=3.1 и $dx = 1/4$ (рис. 4).

Математическая фокусировка — регулировка увеличения разрешения изображений начинается с уменьшения от единицы регулируемого промежутка до нерегулируемого 1≥mD≥md>0 При mD=1 в результате остается исходное изображение, ошибка Err(DK) — максимальная. С уменьшением mD (падает обусловленность АФ pO) растут величины сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR), ошибки Err(pO) уменьшаются до нуля (рис.4,5,6).

Для однобайтовых изображений (низкой точности **метод C**) ограничение (неадекватность) реализуется около mD∼1/25, появляются изменяющиеся («выбиваются» красные) мелкие детали в изображении (высокой реакцией на шум — Nor(pR)) (рис. 5). Поэтому считаем, для однобайтовых изображений, как в нашем примере ($\partial \sim 3 - 5\,\%$), допустимы величины SR∼9.5. Для двух байтовых изображений ожидается сверхразрешение SR∼20–30, **методы типа D**.

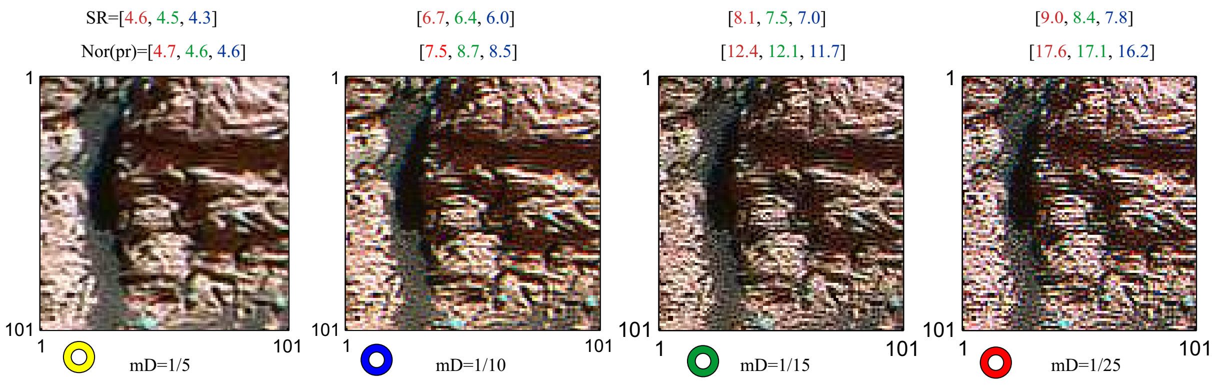

Рис. 5: Обусловленные сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) в исходной сетке $dx = 1$

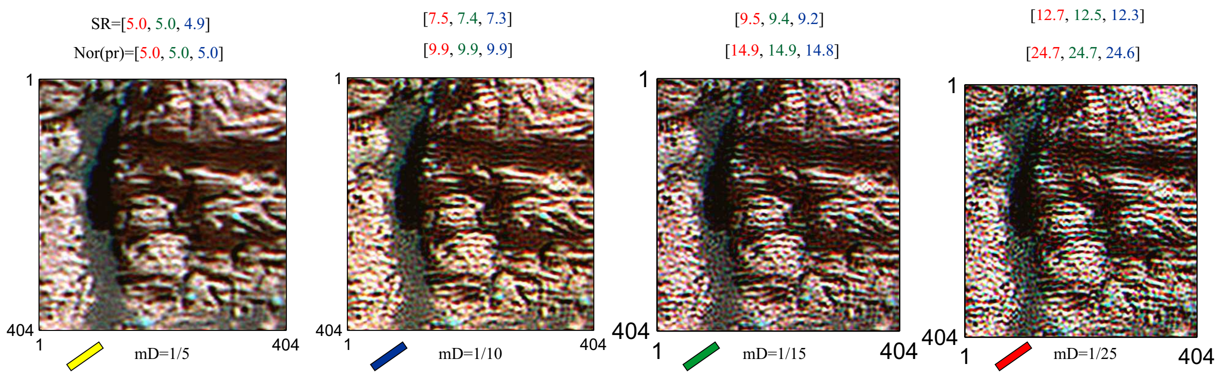

Рис. 6: Обусловленные сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) с интерполяцией dx=1/4

Промежутки md и mD

На рис 7, 8 представлены промежутки md=min|M(O)| — не настраиваемый и mD=min|M(pO)| — настраиваемый промежуток МПФ M(O) и нулем.

Структуры, похожие на окаменевший коралл

В втором изображении для демонстрации обусловленного сверхразрешения взята другая область изображения камня. По нашему мнению, структура этого участка похожа на окаменевший коралл. На этот результат обращаем внимание специалистов.

О разрешении объектов меньших пиксела

На третьем выделенном фрагменте изображения камня выделен участок с подозрением на песок в виде дюн. В дискретном и непрерывном случаях выделяются отдельные песчинки, меньшие чем пиксел исходного изображения.

О величине сверхразрешения SR

В обратимых случаях SR, zSR (8,9) как функция от параметров [Loc, dx, mD] является функцией **с насыщением** по двум параметрам: длины области определения Loc и обусловленности mD. В дискретном случае $dx = 1$ это видно на рис. 11 слева. В непрерывном случае $dx = 1/4$ это видно на рис. 11 справа для больших значений mD в случае Iz обращений. А так как размер изображения, как правило больше размера области определения Loc, то действительно величина (**с насыщением**) обусловленного сверхразрешения SR не зависит от размеров изображений.

Iz обращения (6,7) с zSR позволяет нам «заглянуть за горизонт высоких обусловленностей в область низких обусловленностей», те найти величину сверхразрешения для очень больших mD вплоть до Iz^{-1}. Если при mD=1/15 мы имеем SR=SR$\sim$9.5, то при mD$\sim$Iz^{-1} zSR будет порядка $\sim$156. Такое большое сверхразрешение практически можно достичь только в модельных задачах — **метод E**, потому, что это сопровождается огромной реакцией на шум Nor(zR)$\sim 6\times10^5$ (рис. 12).

Применение теоремы о свертке

Обычно свертку связывают с ПФ, но это можно делать только при соблюдении определенных условий

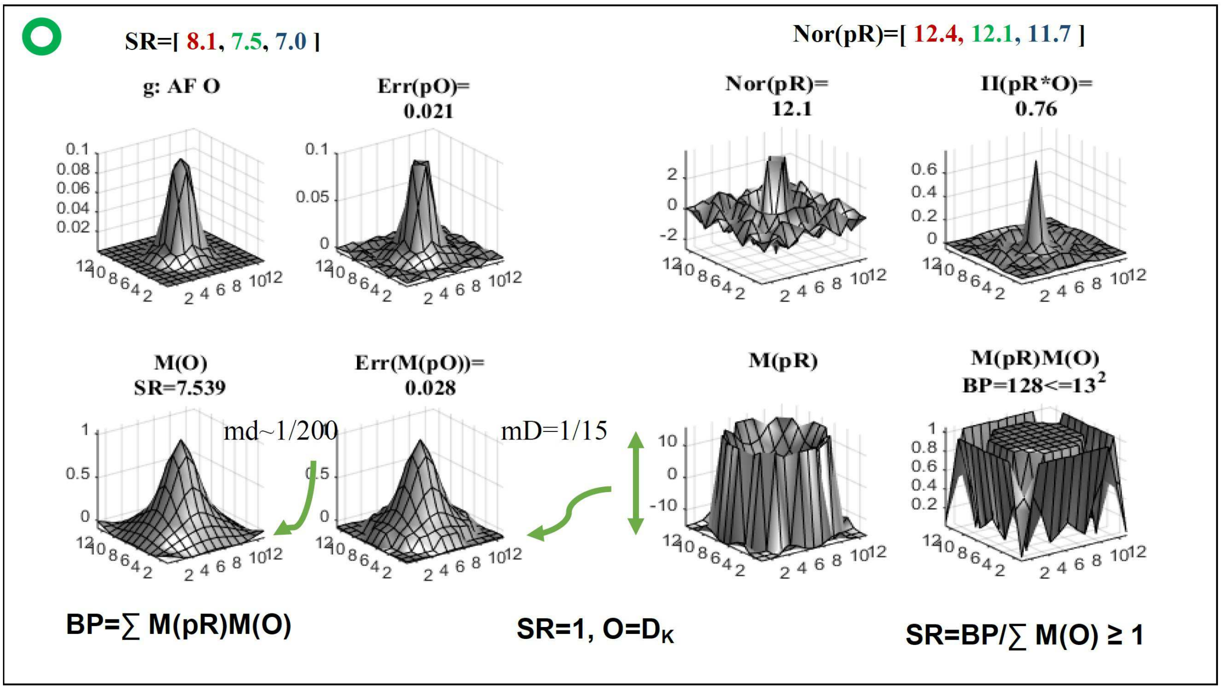

Рис. 7: Дискретная модель $dx = 1$ с промежутками md∼1/200 и mD=1/15

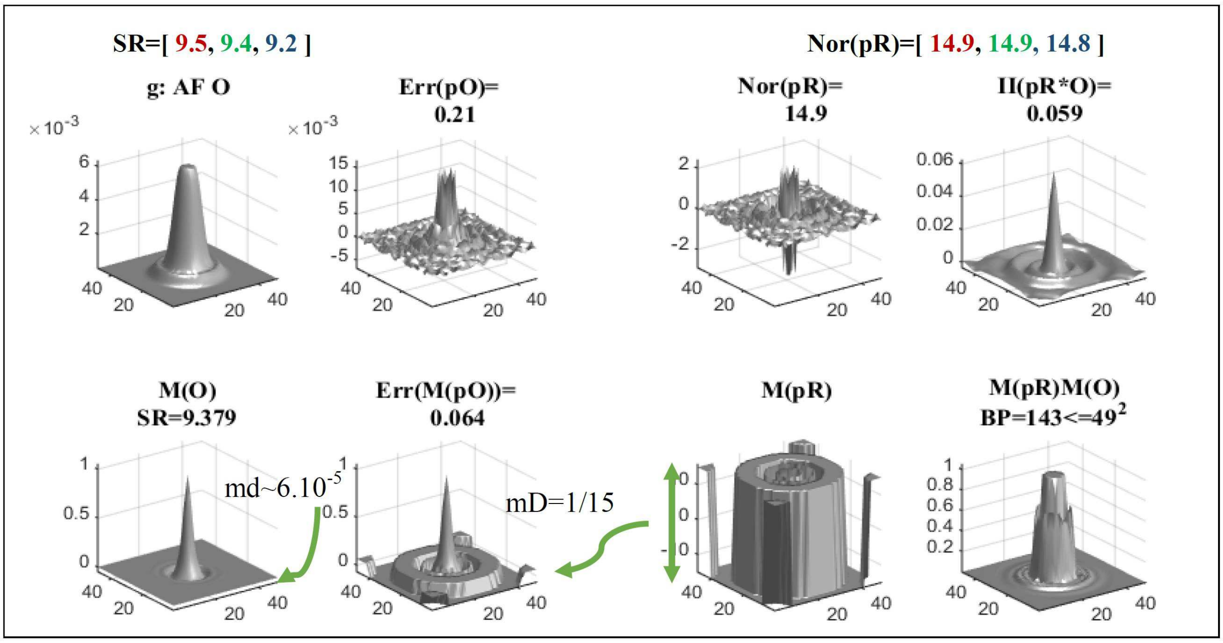

Рис. 8: Непрерывная модель $dx = 1/4$ с промежутками md$\sim 6.10^{-5}$ и mD=1/15

для недопущения граничных эффектов. АФ O — четная и изображение то же должно быть четным [1, 2]. На рис. 13 показано, как проявляет себя «граничный эффект».

Для подавления граничных эффектов изображение следует «продолжить на тор» с регулируемыми размерами областей нейтрализации [1, 2]. Но по нашему опыту, лучше не использовать ПФ, а продолжать функцию за границу изображения «зеркальным отражением» [1, 2]. При этом увеличивается объем вычислений, а ошибки на границе изображения не столь заметны (рис. 14).

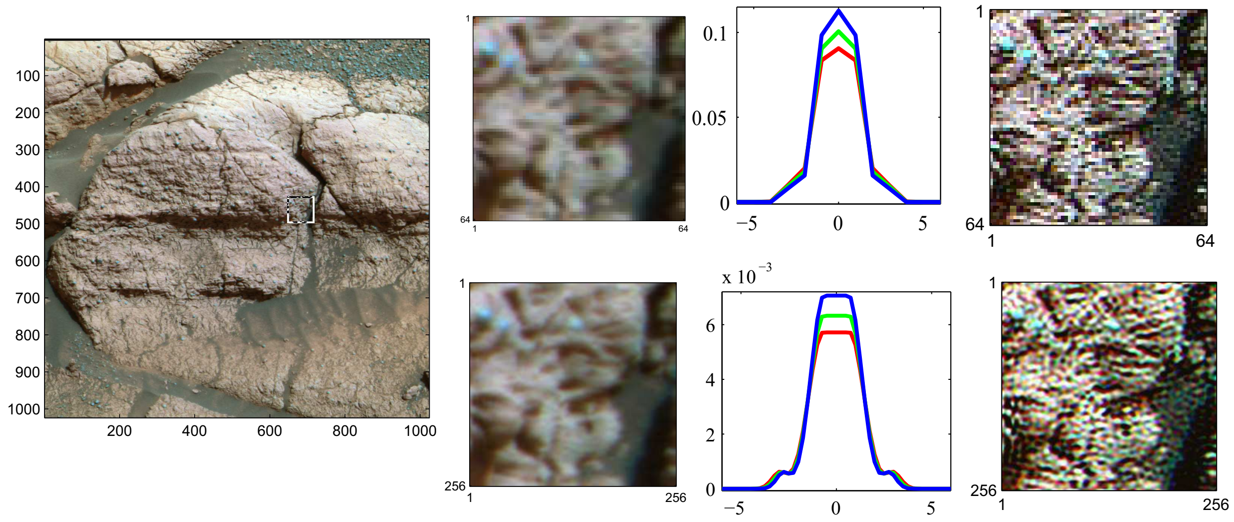

Рис. 9: Примеры обусловленных mD=1/15 сверхразрешений в дискретном $dx = 1$ и непрерывных $dx = 1/4$ случаях с Loc=12

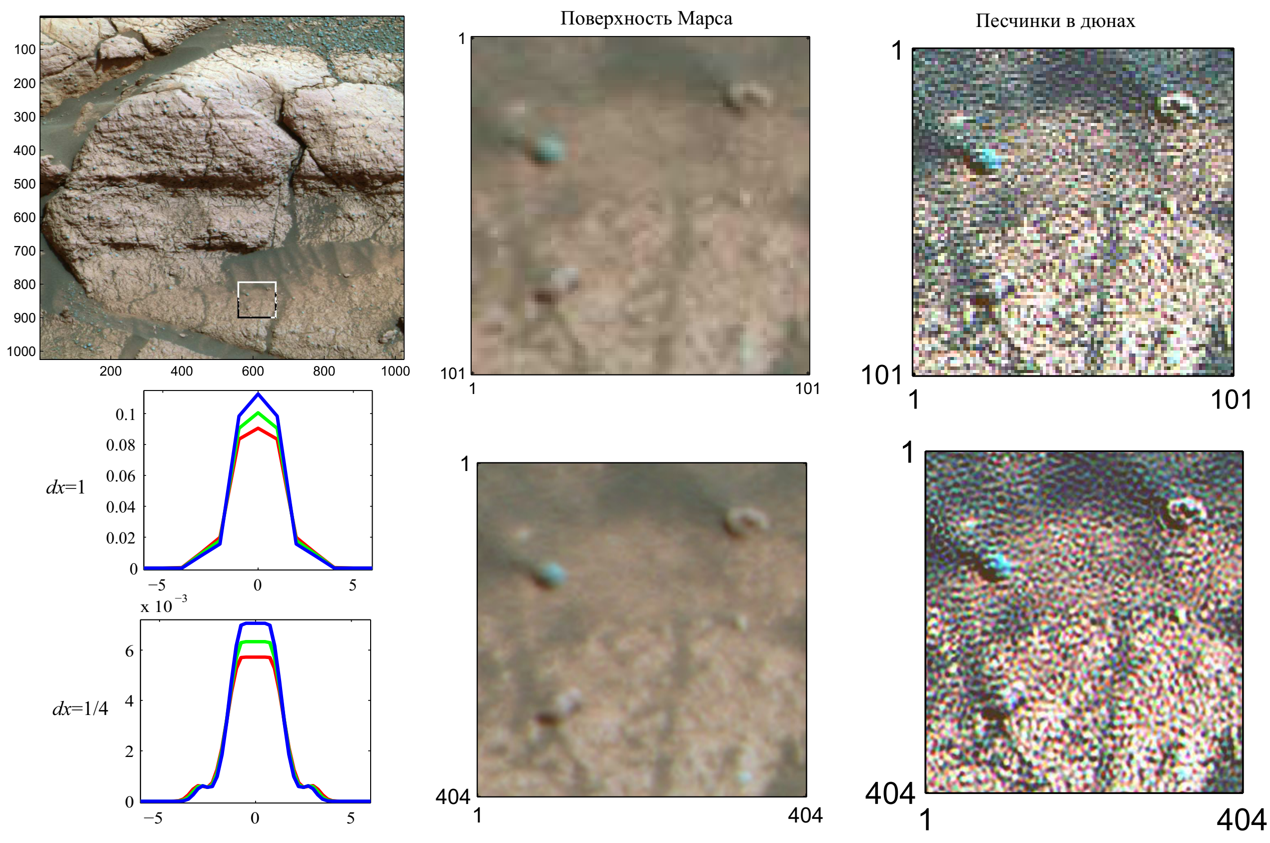

Рис. 10: Обусловленное mD=1/15 сверхразрешение отдельных песчинок в дискретном $dx = 1$ и непрерывном случаях $dx = 1/4$, Loc=12

Обсуждение

Подход в проблеме обусловленного сверхразрешения с Классификаторами упорядочивает создание моделей для достижения адекватного сверх разрешения.

В сверхразрешённых изображениях возможны скачки, перепады яркостей, т.е. решения обратной задачи по компенсации искажений АФ О не являются гладкими.

Не гладкость решений позволяет обоснованно и безопасно применять данный метод, например, в контурах управления реакторами, навигаторами и т.п.

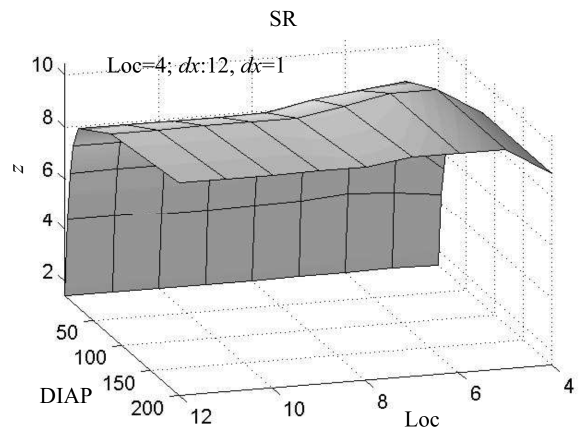

Рис. 11: Примеры зависимостей величин сверхразрешения SR от настраиваемых для локальных областей определения АФ pO параметров [Loc, dx, mD] в LO (4) в дискретном и непрерывных случаях

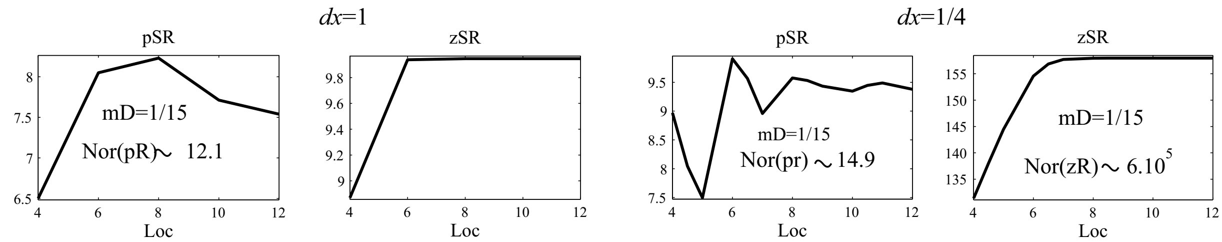

Рис. 12: Зависимости величин сверхразрешений pSR=SR и zSR от mD, Loc в дискретном $dx = 1$ и непрерывном $dx = 1/4$ случаях при Iz обращениях

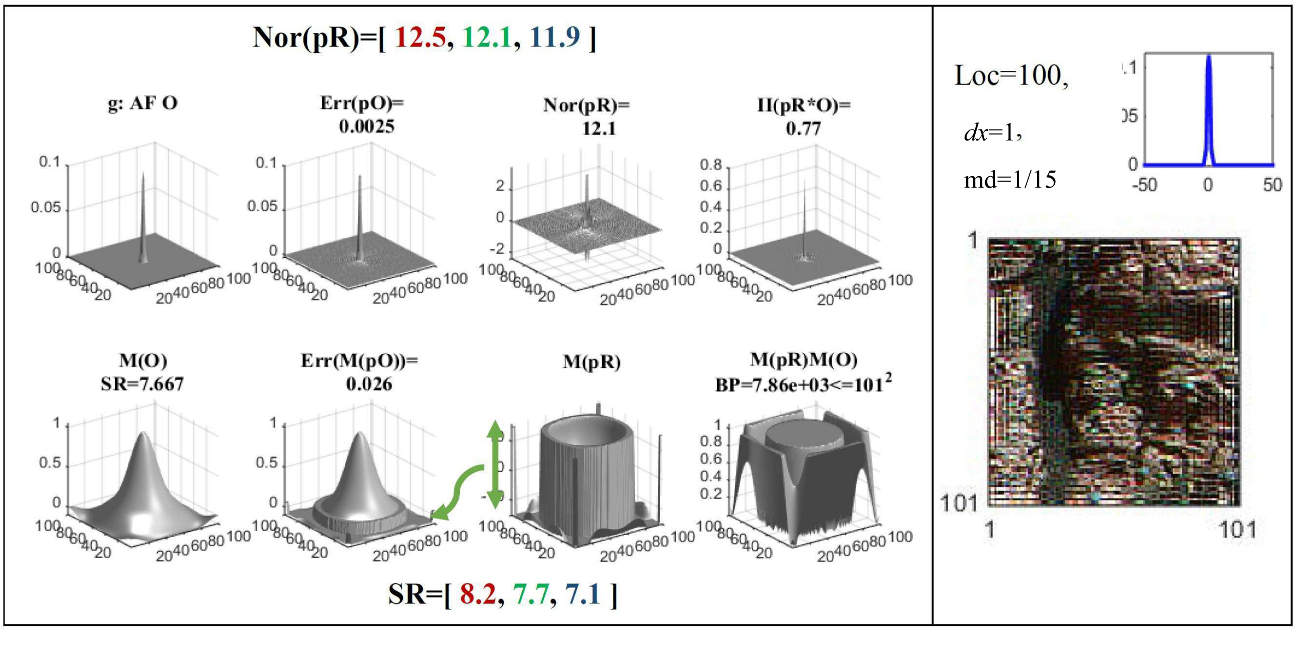

Рис. 13: Область определения АФ O — все изображение, дискретный случай $dx = 1$, граничные эффекты

Интересные модификации методов могут быть реализованы в новых радарных технологиях (с управляемой диаграммой направленности), в радарах с синтезированной апертурой и т.п. Результаты с более высоким SR∼17 уже получены в пассивном радиовидении [3]. Этот результат соответствует примерно двух байтовой точности представления данных измерений. Выделенные малоконтрастные фрагменты однобайтовых мар-

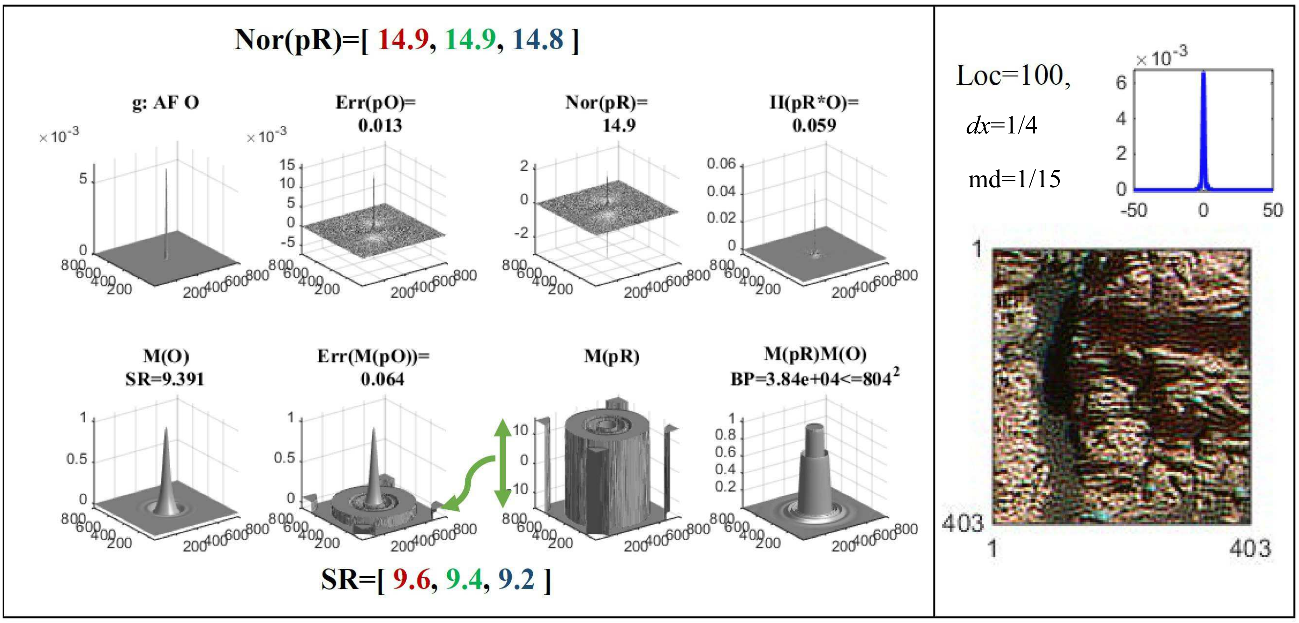

Рис. 14: Область определения АФ О все изображение, непрерывный случай $dx = 1/4$, защищенный режим

сианских изображений представлены с относительной точностью 3–5%, т.е. даже частью одного байта.

Если есть необходимость, то решения (сверхразрешенные изображения) можно «сгладить» (конечно, с потерей разрешения) согласно априорной информации.

Возможно применение методов сверхразрешения с интерполяцией для достижения предельного сверх разрешения в электронной микроскопии и томографии.

Необходимо разработать Классификатор для неточных моделей регистрации изображений I_∂=$O_\sigma$$*$Ix, $\partial >0$ и $\sigma > 0$.

Предлагаемая концепция проблемы сверхразрешения с классификатором намного сложнее классического метода регуляризации [6].

В работе [5] приведен пример пятилучевой Диаграммы Направленности (ДН), когда при компенсации искажений ДН реализуется идеальное сверхразрешение с нулевой ошибкой Err(pO) и малой реакцией на шум Nor(pR).

Конечно, следует более детально просчитать ситуации с выходом из точки DK, по отрезку, сектору в плоскости Err(pO)=0, Nor(pR)>1 потом с выходом в пространство 3D XAM с Err(pO)>0 и Nor(pR)>1 (упрощенный пример на рис. 4).

Важное свойство: при изменении настраиваемого промежутка mD к не настраиваемому md>0 (с понижением обусловленности АФ pO) и при стремлении к нулю ошибки $\partial- > 0$, приближенное сверхразрешение решение с SR стремиться к идеальному сверхразрешению с zSR. Практически реальное сверхразрешение ограничивается реакцией на шум Nor(pR), Nor(zR). Это по сути аналог асимптотического утверждения А. Н. Тихонова для метода регуляризации [6].

[1] *Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е.* Изв. РАН. Сер. физ. 2015. **79**, № 12. С. 1633. (*Terentiev E.N., Terentiev N.E.* Bull. of the RAS. Physics. 2015. **79**, N 12. P. 1427.

[2] *Терентьев Е.Н.* Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2017. № 6. 1761005.

[3] *Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е.* 7-я межд. конф. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации , 15-17 сен. 2014, Суздаль, Россия, Программа, с. 49.

[4] *Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е.* там же, с. 53.

[5] *Terentiev E.N., Terentiev N.E., Farshakova I.I.* Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes (PMMEEP). 2017. **19**. P. 171–182.

[6] *Тихонов А.Н., Уфимцев М.В.* Статистическая обработка результатов эксперимента. М.: изд. Московского университета, 1988.

Conditional super-resolution with classifiers

E. N. Terentiev[1,a], **N. E. Shilin-Terentyev**[2,b]

[1]*Department of Mathematical modeling and informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*
Moscow 119991, Russia
[2]*Google, San Francisco, CA, USA*
E-mail: [a]*en.teren@physics.msu.ru,* [b]*nikolay.terentyev@gmail.com*

Classification of varieties of methods of super-resolution is based on the gap between the minimum value of the Modulation Transfer Function (MTF) M (O) (for discrete Apparatus Function (AF) O) and zero. Classifiers underlie the concept of super-resolution. The main parameter of the AF O setting for increasing the resolution is the conditionality numerically equal to the reciprocal of the minimum value |M (O) |or gap's value.

PACS: 02.30.Nw, 02.30.Zz.
Keywords: modulation transfer function, conditionality, convolution, Fourier transform, invers problem, super–resolution.
Received 26 June 2018.

Сведения об авторах

1. Терентьев Евгений Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: en.teren@physics.msu.ru.
2. Шилин–Терентьев Николай Евгеньевич — lead developer, Google, San Francisco, CA, USA, e-mail: nikolay.terentyev@gmail.com.