

Квантовая теория последовательных нелинейных преобразований

А. В. Белинский*, Р. Сингх†

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 26.06.2018; Подписана в печать 13.07.2018)

Впервые рассмотрены невырожденные процессы: суммарная генерация гармоник $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$ и одновременная генерация суммарных частот $\omega_1 + \omega_3 = \omega_4$, $\omega_2 + \omega_3 = \omega_5$ в кристаллах с регулярной доменной структурой (РДС) и квадратичной нелинейностью. Получены результаты квантового описания для больших длин взаимодействия с помощью численного метода. Обнаружены почти периодические осцилляции среднего числа фотонов в модах. Найдены моды жесткой корреляции и антикорреляции. Первые могут стать хорошими кандидатами для восстановления изображений методами компьютерной обработки информации. Найдены эффекты инверсии взаимной корреляции мод генерируемого излучения при превышении определенной длины взаимодействия.

PACS: 42.65.Ky; 42.79

УДК: 51-73: 535.012.21

Ключевые слова: кристаллы с регулярной доменной структурой; фотонные кристаллы; квазисинхронизм; генерация суммарной гармоник; квантовая корреляция фотонов.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интерес к применению РДС-кристаллов с квадратичной нелинейностью в области квантовой оптики и информатики значительно вырос [1–3]. Изучение квантовых статистических характеристик играет важную роль в применении их в прикладных задачах квантовой информации. Часто применяется метод заданного поля [1–3] для линеаризации нелинейных операторных уравнений движений. Метод заданного поля дает возможность получить решение в аналитической форме, что в свою очередь позволяет проводить анализы взаимодействующих мод внутри РДС-кристаллов на коротких длинах взаимодействия. При этом теряется информация о неистощаемой моде, которая считается постоянной. Недостаток данного метода проявляется в потере информации о почти осциллирующих, периодических поведении статистических кривых на больших длинах взаимодействия. Применяется также метод теории возмущения [4, 5, 7], который требует достаточно большое количество слагаемых высокого порядка точности для нахождения более точного решения. При этом такое приближенное решение применимо для небольшого количества средних фотонов и длин взаимодействия. Метод теории возмущения дает возможность обнаружить почти осцилляционные или периодические характеристики поведения наблюдаемых величин. Существует еще один численный метод диагонализации гамильтониана взаимодействия [6, 7], который позволяет находить собственные значения гамильтониана взаимодействия и собственные вектора. Метод диагонализации учитывает квантово-механические эффекты всех взаимодействующих мод и позволяет увидеть почти осцилли-

рующие или периодические изменения поведения наблюдаемых операторов (средних значений числа фотонов и значения коэффициентов корреляций). Следует также отметить, что существует еще один метод решения задач квантовой нелинейной оптики, который основан на полиномиальной алгебре [8]. Впервые в работе [7] была решена задача квантового описания взаимодействия плоских монохроматических мод в РДС-кристалле с помощью метода диагонализации при полном учете квантово-механического взаимодействия всех 5 плоских монохроматических мод и источника накачки. В [7] изучено поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимных корреляций 2-го порядка для параметрического процесса ($\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$) и затем генерация суммарной частоты ($\omega_1 + \omega_3 = \omega_4$ и $\omega_2 + \omega_3 = \omega_5$).

В настоящей работе впервые исследованы корреляции 2, 3, 4 и 5-го порядка для суммарной генерации гармоник $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$ и одновременной генерации суммарных частот. Показана динамика эволюции среднего числа фотонов в модах и их взаимная корреляция, что особенно важно для компьютерной обработки информации в условиях зашумления, поскольку известные корреляционные зависимости позволяют эффективно выделять полезные сигналы на фоне шума, например, при работе с квантовыми фантомными изображениями, их мультиплицирования и компьютерной обработки с целью повышения соотношения сигнал/шум [2, 3].

1. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ И УСЛОВИЯ ИХ КВАЗИСИНХРОНИЗМА

Пусть 5 плоских монохроматических мод необыкновенных поляризаций, характеризующихся операторами уничтожения фотона $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$ и $\hat{a}_5$ на оптических частотах ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 и ω_5 , коллинеарно распространяются внутри РДС-кристалла с квадратичной нели-

*E-mail: belinsky@inbox.ru

†E-mail: ranjit.singh@mail.ru

нейностью. Происходит три процесса:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (1a)$$

$$\delta k_3 = k_3 - k_1 - k_2 + m_3 G_3 = \Delta k_3 + m_3 G_3$$

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_4, \quad (1b)$$

$$\delta k_4 = k_4 - k_1 - k_3 + m_4 G_4 = \Delta k_4 + m_4 G_4,$$

$$\omega_2 + \omega_3 = \omega_5, \quad (1c)$$

$$\delta k_5 = k_5 - k_2 - k_3 + m_5 G_5 = \Delta k_5 + m_5 G_5.$$

Здесь k_j — абсолютные значения волновых векторов соответствующих мод с частотами ω_j ; $j = 1, 2, 3, 4, 5$; Δk_q — волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла; $q = 3, 4, 5$; $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ — порядки квазисинхронизма $G_q = 2\pi/\Lambda_q$ — волновое число (модуль «псевдовектора» решетки доменной структуры с периодом Λ_q). Условия выполнения квазисинхронизма процессов (1a–1c) были найдены в работе [7] для кристалла LiNbO₃.

Гамильтониан взаимодействия рассматриваемых процессов представляется в следующем виде [1]:

$$\hat{H}_I = h (\beta \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3^+ + \gamma_1 \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4^+ + \gamma_2 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5^+) + H.c., \quad (2)$$

где h — постоянная Планка, β и $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты

нелинейного взаимодействия, $H.c.$ — эрмитово сопряжение.

Операторные уравнения движения по длине взаимодействия z внутри РДС-кристалла в представлении Гейзенберга описываются уравнением

$$\frac{d\hat{a}_j}{dz} = -\frac{i}{h} [\hat{a}_j, \hat{H}_I].$$

Квантовую задачу с помощью метода диагонализации можно решить следующим образом. Запишем матричные элементы оператора уничтожения в энергетическом представлении:

$$\hat{a}_{j,n',n} = \langle n' | \hat{a}_j | n \rangle = \delta_{n',n-1} \sqrt{n}.$$

Аналогичным образом выражаются матричные элементы оператора рождения $\hat{a}_j^+$. Введем безразмерные нелинейные коэффициенты связи $\xi_{1,2} = \frac{\gamma_{1,2}}{\beta}$. Тогда гамильтониан взаимодействия (2) принимает следующий вид:

$$\hat{H}_I = h (\hat{a}_1' \hat{a}_2' \hat{a}_3'^+ + \xi_1 \hat{a}_1' \hat{a}_3' \hat{a}_4'^+ + \xi_2 \hat{a}_2' \hat{a}_3' \hat{a}_5'^+) + H.c., \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_1' &= (\hat{a}_{1,n'_1,n_1}) \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}_2' &= \hat{E}_1 \otimes (\hat{a}_{2,n'_2,n_2}) \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}_3' &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes (\hat{a}_{3,n'_3,n_3}) \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}_4' &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes (\hat{a}_{4,n'_4,n_4}) \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}_5' &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes (\hat{a}_{5,n'_5,n_5}), \end{aligned}$$

$\hat{E}_j$ — единичные матрицы соответствующих мод, матрица $(\hat{a}_{j,n',n})$ состоит из матричных элементов $\hat{a}_{j,n',n}$, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение и $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Диагоналируем гамильтониан взаимодействия (2.a) и найдем его собственные значения и собственные векторы. Оператор эволюции в матричном представлении вычисляется как

$$\hat{U}(\zeta) = \sum_{m=0}^M e^{-i\lambda_m \zeta} |m\rangle \langle m|,$$

где $\zeta = \beta z$ — приведенная длина взаимодействия; $M = (n_1 + 1) * (n_2 + 1) * (n_3 + 1) * (n_4 + 1) * (n_5 + 1)$;

n_j — числа фотонов в модах; $|m\rangle$ — собственный вектор с числом фотонов m при собственном значении λ_m гамильтониана взаимодействия (2.a): $\hat{H}_I |m\rangle = \lambda_m |m\rangle$.

Матрица плотности вычисляется как

$$\hat{\rho}_Q(\zeta) = \hat{U}(\zeta) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(\zeta).$$

Здесь $\hat{\rho}(0) = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ — матрица плотности начального состояния для всех пяти мод на входе РДС-кристалла. В тензорном представлении эта матрица плотности принимает следующий вид:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0) \otimes \hat{\rho}_3(0) \otimes \hat{\rho}_4(0) \otimes \hat{\rho}_5(0).$$

2. КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вычислим средние значения фотонов и коэффициентов корреляции 2, 3, 4 и 5-го порядка или фактора $g(2, 3, 4, 5)$ в модах по формулам:

$$N_j(\zeta) = \langle \hat{a}'_j^+(\zeta) \hat{a}'_j(\zeta) \rangle,$$

и

$$\begin{pmatrix} g_{jk}^{(2)}(\zeta) \\ g_{jkl}^{(3)}(\zeta) \\ g_{jklm}^{(4)}(\zeta) \\ g_{12345}^{(5)}(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \hat{a}'_j^+(\zeta) \hat{a}'_j(\zeta) \hat{a}'_k^+(\zeta) \hat{a}'_k(\zeta) \rangle}{N_j(\zeta) N_k(\zeta)} \\ \frac{\langle \hat{a}'_j^+(\zeta) \hat{a}'_j(\zeta) \hat{a}'_k^+(\zeta) \hat{a}'_k(\zeta) \hat{a}'_l^+(\zeta) \hat{a}'_l(\zeta) \rangle}{N_j(\zeta) N_k(\zeta) N_l(\zeta)} \\ \frac{\langle \hat{a}'_j^+(\zeta) \hat{a}'_j(\zeta) \hat{a}'_k^+(\zeta) \hat{a}'_k(\zeta) \hat{a}'_l^+(\zeta) \hat{a}'_l(\zeta) \hat{a}'_m^+(\zeta) \hat{a}'_m(\zeta) \rangle}{N_j(\zeta) N_k(\zeta) N_l(\zeta) N_m(\zeta)} \\ \frac{\langle \hat{a}'_1^+(\zeta) \hat{a}'_1(\zeta) \hat{a}'_2^+(\zeta) \hat{a}'_2(\zeta) \hat{a}'_3^+(\zeta) \hat{a}'_3(\zeta) \hat{a}'_4^+(\zeta) \hat{a}'_4(\zeta) \hat{a}'_5^+(\zeta) \hat{a}'_5(\zeta) \rangle}{N_1(\zeta) N_2(\zeta) N_3(\zeta) N_4(\zeta) N_5(\zeta)} \end{pmatrix}.$$

Здесь нижние индексы при $g(2, 3, 4, 5)$ обозначают номера мод, между которыми вычисляется коэффициент корреляции и $j, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5$

Расчеты проводились для случая $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0.4$, когда моды находились в состоянии $|\psi_0\rangle = |\alpha_{10}\rangle |\alpha_{20}\rangle |n_{30}\rangle |n_{40}\rangle |n_{50}\rangle$ на входе $\zeta = 0$ РДС-кристалла, причем моды 3, 4, 5 полагались в вакуумном состоянии $|0\rangle$, а накачка 1 и 2 — в когерентном состоянии со средним числом фотонов $|\alpha_{\{10,20\}}|^2 = 2$ и фазой $\varphi_{\{10,20\}} = \pi/3$. Правильность вычислений проверялась контролем коммутационных соотношений $[\hat{a}'_j(\zeta), \hat{a}'_j^+(\zeta)] = 1$.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 кривые N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 демонстрируют почти периодические осцилляции среднего числа фотонов. На начальном этапе взаимодействия идет процесс генерации суммарной гармоники $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$ и затем генерации суммарной частоты с $\omega_1 + \omega_3 \rightarrow \omega_4$, $\omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_5$.

В дальнейшем идет обратный процесс, причем они конкурируют между собой, что хорошо видно из осциллирующего характера кривых N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 на больших длинах взаимодействия ζ . На рис. 2–4 корреляционные кривые ведут себя почти как периодические функции. При значениях $g^{(2)} > 1$ преобладают парные, четверные, пятерные коррелированные в 2, 4 и 5 модах фотоны, а при $g^{(2)} < 1$ — одиночные некоррелированные, аналогично тому, как в одиночной моде $g^{(2)} > 1$ соответствует группировке и суперпуассоновской статистике фотонов, а $g^{(2)} < 1$ — антигруппиров-

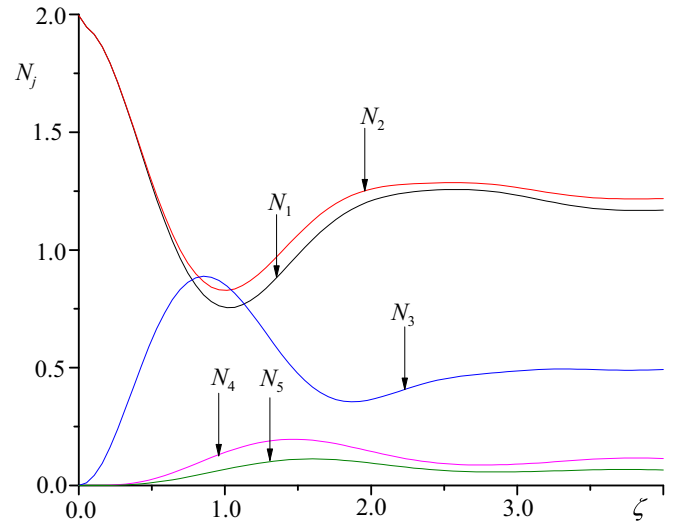


Рис. 1: Эволюция среднего числа фотонов в модах

ке и субпуассоновской статистике [9, 10].

На рис. 2–4 также видно, что сначала реализуется процесс (2), затем (3) и (4). На больших длинах взаимодействия все 3 процесса начинают конкурировать между собой, что следует из почти периодического характера этих кривых. Аналогичную ситуацию описывают другие кривые. Коэффициенты корреляции между 2, 4 модами могут стать хорошими кандидатами для восстановления изображений (когда $g^{(2,4)} > 1$) методами компьютерной обработки информации по алгоритмам, предложенным в [2]. При коэффициенте $g^{(2,3,4,5)} < 1$ проявляется эффект инверсии взаимной корреляции мод.

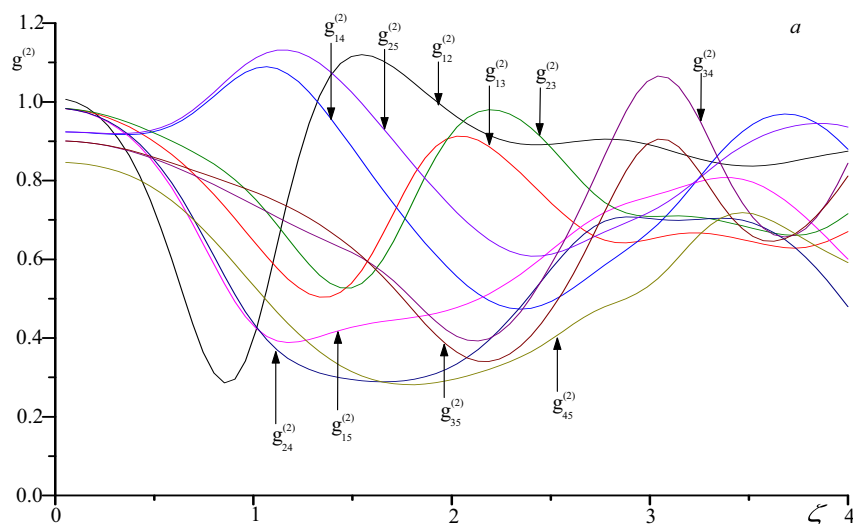


Рис. 2: Коэффициенты корреляции или фактор $g_{jk}^{(2)}$ 2-го порядка

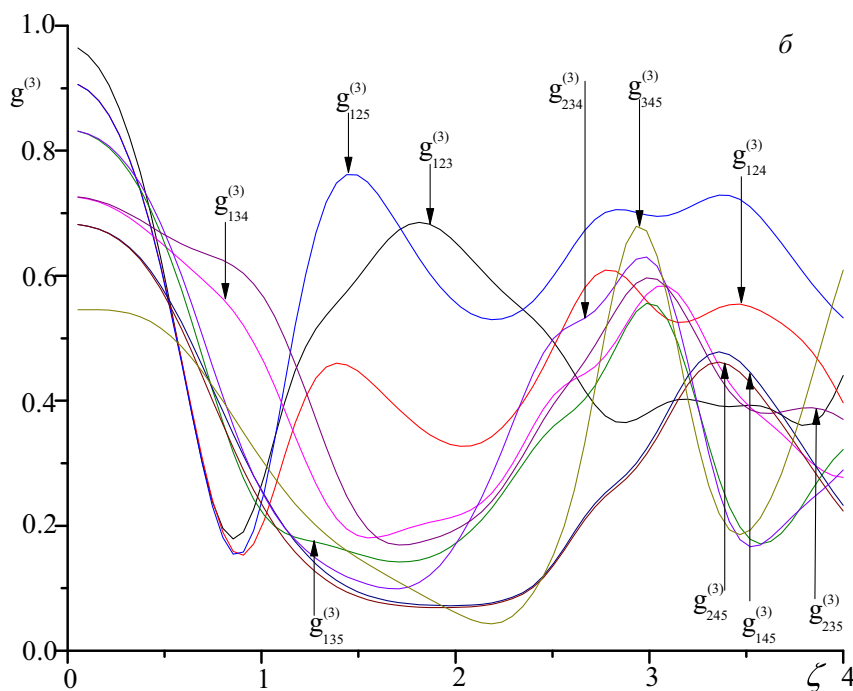


Рис. 3: Коэффициенты корреляции или фактор $g_{jkl}^{(3)}$ 3-го порядка

На рис. 3 и 4 видно, что коэффициенты корреляции принимают значения $g^{(3,5)} < 1$, то есть, проявляется эффект инверсии взаимной корреляции мод для нечетного порядка.

На рис. 4 видно, что коэффициенты корреляции принимают значения $g^{(4)} > 1$, то есть, проявляется сильная корреляция между 4 модами (1,2,4,5 и 1,3,4,5 и 2,3,4,5) по сравнению с 2 модами (1,4 и 2,5 и 1,2 и 3,4) корреляция 2-го порядка.

Для реализации коррелированного и антикоррелированного режимов нужно выбирать соответствующую длину взаимодействия. Этот новый существенный эф-

фект впервые нами выявлен на основании точного квантового расчета взаимодействия всех 5 мод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены результаты строгого квантового описания нелинейного интенсивного энергообмена между плоскими монохроматическими модами в РДС-кристаллах с учетом истощения накачки. Изучено поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их вза-

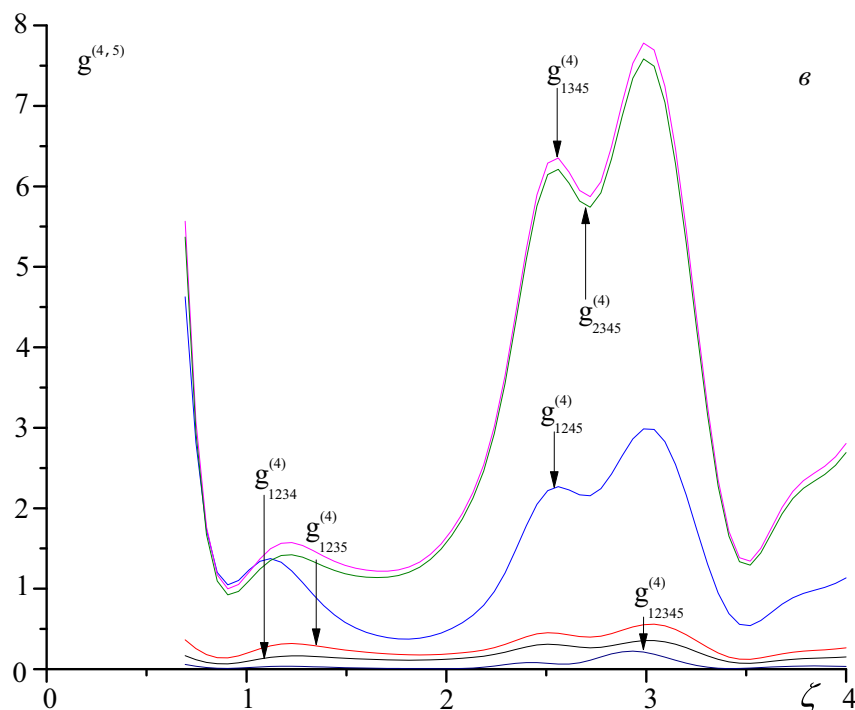


Рис. 4: Коэффициенты корреляции или фактор $g_{jklm}^{(4)}$, $g_{12345}^{(5)}$ 4-го и 5-го порядка

имных корреляций 3, 4 и 5-го порядка. Получен почти осциллирующий характер коэффициентов корреляции мод. Обнаружен новый эффект инверсии вза-

имной корреляции мод генерируемого излучения при превышении определенной длины взаимодействия.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00598.

- [1] Chirkin A. S., Saigin M. Yu., Shutov I. V. J. of Russian Laser Research. 2008. **29**, N 4. P. 336.
- [2] Балакин Д. А., Белинский А. В., Чиркин А. С. ЖЭТФ. 2017. **152**, N 2. С. 252.
- [3] Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S. J. of Russian Laser Research. 2017. **38**, N 2. P. 164.
- [4] Beskrovnyi V. N., Chirkin A. S. In Quantum Communication and Computing, eds. O. Hirota, A. S. Holevo, C. M. Caves (New York: Plenum Press, 1997. P. 483)
- [5] Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972.

- [6] Nikitin S. P., Masalov A. V. Quantum Opt. 1991. **3**, N 2. P. 105.
- [7] Белинский А. В., Сингх Р. Квантовая электроника. 2018. **48**, N 7. С. 611.
- [8] Карасев В. П. Теоретическая и математическая физика. 1993. **95**, N 1. С. 3.
- [9] Смирнов Д. Ф., Трошин А. С. УФН. 1987. **153**, N 10. С. 233.
- [10] Клышко Д. Н., Масалов А. В. УФН, 1995. **165**, N 11. С. 1249.

Quantum theory of successive nonlinear transformations

A. V. Belinsky^a, R. Singh^b

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

E-mail: ^abelinsky@inbox.ru, ^branjit.singh@mail.ru

For the first time, nondegenerate processes are considered: sum harmonic generation and simultaneous generation of sum frequencies in periodically poled nonlinear crystals having quadratic nonlinearity. The results of the quantum description for long interaction lengths are obtained using the numerical method. Almost periodic oscillations of the average number of photons are detected. Strong correlation and anticorrelation between modes are found. Strong correlations can become good candidates for image restoration using computer processing of information. The effects of inversion of the mutual correlation of the modes can be found at certain interaction length.

PACS: 42.65.Ky; 42.79.

Keywords: crystals with a regular domain structure; photonic crystals; quasi-synchronism; total harmonic generation; photon quantum correlation.

Received 26 June 2018.

Сведения об авторах

1. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@inbox.ru.
 2. Сингх Ранджит — канд. физ.-мат. наук; e-mail: ranjit.singh@mail.ru.
-