

## Улучшение редукции измерения при принадлежности интересующей исследователя характеристики объекта исследования априори известному выпуклому замкнутому множеству

Д. А. Балакин,<sup>\*</sup> Ю. П. Пытьев<sup>†</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Статья поступила 19.06.2018; Подписана в печать 13.07.2018)

В статье рассматривается использование в методе редукции измерения информации о принадлежности входного сигнала или значения интересующей исследователя характеристики объекта исследования априори заданному множеству в случае вероятностной модели измерения. Предложена и исследована оценка вероятностной редукции, имеющая меньшую среднеквадратичную погрешность, чем ранее известные оценки редукции.

Также в качестве примера рассмотрена редукция результата квантовооптического измерения — изображения объекта исследования, полученного при формировании изображения обычным светом и светом с подавлением флуктуаций числа фотонов. Исследована зависимость качества редукции от степени подавления флуктуаций и от характеристик (контрастность, средняя яркость) изображения. Показано, что зависимость ковариационного оператора погрешности от оцениваемого сигнала незначительно ухудшает качество редукции измерения.

PACS: 02.50.Le

УДК: 519.25.

Ключевые слова: математическая модель измерения, редукция измерения, оптимальные решения, измерительно-вычислительные системы.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что такие широко распространенные методы «обработки» результатов измерений, как метод наименьших квадратов (МНК) [2–4] и его различными способами регуляризованные варианты [5–13], метод максимальной энтропии [14–17] и др., в которых решение задачи интерпретации данных измерений находится путем минимизации функционала, не имеющего прямого отношения к погрешности интерпретации, не гарантируют максимальную точность интерпретации. Подобные методы не могут служить основой теории измерительно-вычислительных преобразователей (ИВП) как средств измерения, поскольку: при априори заданном измерительном преобразователе (ИП) не позволяют реализовать максимальную точность ИВП как средства измерения, не позволяют определять оптимальные параметры ИП, при которых достигается предельная точность ИВП как средства измерения и т. д. Заметим однако, что в ряде случаев функционал наименьших квадратов возникает естественно и в задачах минимизации ошибки интерпретации данных измерений, как, например, в случае нормального распределения ошибок измерений. Кроме того, априорная информация о возможных значениях сигнала, используемая (явно или неявно) при регуляризации, может оказаться достаточной для того, чтобы оценка метода, не учитывая достоящего все свойства схемы измерения, оказалась близкой к оптимальной.

Рассмотрим типичную схему измерений, в которой в результате взаимодействия измеряемого объекта, среды и ИП на входе ИП формируется (измеряемый) сигнал  $f$ , принадлежащий конечномерному евклидову пространству  $\mathcal{F}$ , несущий информацию об измеряемом объекте и среде, см. [1, 18, 19]. ИП преобразует  $f$  в сигнал

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где  $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$  — оператор, обозначающий моделируемый ИП, взаимодействующий с измеряемым объектом и со средой, определяющий преобразование  $f$  в сигнал  $Af + \nu$ , где  $\nu$  — погрешность, шум ИП,  $\mathcal{X}$  — конечномерное евклидово пространство значений  $\xi$ . Сигнал  $\xi$  поступает на вход вычислительного преобразователя (ВП), который преобразует  $\xi$ , дополнительную и априорную информацию о модели измерения (1) и о модели объекта исследования в выходной сигнал  $R_*(\xi)$  ИВП.

Результат измерения зависит от параметров измеряемого объекта, взаимодействующего с ИП, а исследователя, как правило, интересуют значения параметров исследуемого объекта, не возмущённого измерением. Связь характеристик измеряемого и исследуемого объектов описывается моделью идеального ИП, заданной оператором  $U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ , где  $\mathcal{U}$  — конечномерное евклидово пространство значений интересующих исследователя параметров. На вход идеального ИП поступает тот же сигнал, что и на вход реального ИП, но на его выходе сигнал  $Uf$  равен значениям параметров исследуемого, а не измеряемого, объекта. Задача редукции измерения  $\xi$  к виду, свойственному измерению на идеальном ИП  $U$ , состоит в нахождении оператора редукции  $R_*(\cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , для которого  $R_*\xi$  — в известном смысле наиболее точная версия значения

<sup>\*</sup>E-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru

<sup>†</sup>E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru

$Uf$  и который реализуется оптимальной вычислительной компонентой ИВП.

Если в (1)  $f \in \mathcal{F}$  — априори произвольный вектор,  $\nu \in \mathcal{X}$  — случайный вектор,  $\mathbb{E}\nu = 0$  и известен его невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\nu: \forall x \in \mathcal{X} \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\nu(x, \nu)$ , то линейный оператор  $R_* \in (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U})$  редукции определяется как минимизирующий максимальную по  $f$  среднеквадратичную (с.к.) погрешность интерпретации  $R\xi$  как  $Uf: h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\|R(\xi) - Uf\|^2 \sim \min_{R: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}}$ . Эта погрешность минимальна [1] при  $R$ , равном оператору несмещённой редукции

$$R_* = U(\Sigma_\nu^{-1/2}A)^{-1}\Sigma_\nu^{-1/2}, \quad (2)$$

и равна  $h(R_*, U) = \text{tr}(U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}U^*)$ , где  $^{-1}$  обозначает псевдообращение, если

$$U(I - A^{-1}A) = 0, \quad (3)$$

и равна бесконечности, если это условие не выполнено. Тогда задача неразрешима и при  $U = I$ . Оценка редукции (2) в этом случае формально существует, оценка обычного МНК существует, но не единственна, существование и единственность оценки регуляризованного МНК зависит от способа регуляризации. В этом случае, очевидно, модель измерения неадекватна цели исследования.

Если же оператор  $\Sigma_\nu$  неизвестен, но известно ограничение на среднюю «энергию» шума  $\mathbb{E}\|\nu\|^2 = \text{tr} \Sigma_\nu \leq \delta^2$ , см. [1, §1.7] и [20], то наиболее точная несмещённая версия значения  $Uf$  есть

$$UA^{-1}\xi, \quad (4)$$

и её с.к. погрешность не превосходит  $\delta^2\|U(A^*A)^{-1}U^*\|$ . Условием конечности её с.к. погрешности также является  $U(I - A^{-1}A) = 0$ .

**Пример 1.** В качестве примера применения метода редукции рассмотрим задачу оценивания входного сигнала по данным измерений по схеме (1), где матричные элементы оператора  $A$  выбраны как в [21]:

$$A_{ij} = (1 - c) \frac{1}{\pi w} \frac{1}{1 + (|i - j|/w)^2} + c \frac{1}{\sqrt{2\pi w^2}} \exp(-|i - j|^2/(2w^2)), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (5)$$

где  $c = 0.2$ ,  $w = 3$  — «ширина» аппаратной функции ИП, моделируемого оператором  $A$ . Случайные погрешности измерений имеют нулевое математическое ожидание и корреляционный оператор  $\Sigma_\nu = \sigma^2 I$ .

На рис. 1 при  $M = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{U} = 100$  приведены результаты интерпретации измерений для произвольного  $f$ , см. разд. 1. В этом случае произведено два цикла измерений, причем во втором дисперсии погрешностей измерений в  $10^6$  раз больше, чем в первом. Результат редукции имеет не большую с.к. погрешность

$\chi = \mathbb{E}\|\widehat{Uf} - Uf\|^2$  (по определению, ибо в методе редукции погрешность минимизируется, а ни в обычном, ни в регуляризованном МНК — нет), чем результаты остальных методов, что связано с более полным учетом в методе редукции априорной информации о шуме (в методе редукции используется ковариационный оператор шума, в обычном МНК информация о шуме не используется, в регуляризованном МНК используется информация о математическом ожидании квадрата нормы шума), а в результате применения обычного МНК сигнал неразличим на фоне шума.

Как и в [22], далее рассматривается случай, когда входной сигнал принадлежит априори известному выпуклому замкнутому множеству, то есть если заранее известно, что значение сигнала удовлетворяет заданным ограничениям. В отличие от [22], рассматривается не только принадлежность такому множеству входного сигнала ИП  $f$ , характеризующего измеряемый объект, а также принадлежность заданному множеству интересующей исследователя характеристики  $Uf$  объекта исследования. Кроме того, в предлагаемом в настоящей статье методе редукции используется проецирование при минимизации не «обычного» евклидова расстояния, а расстояния Махаланобиса, ср. оценки (7) и (8).

В связи с рассматриваемой в разделе 2 задачей редукции результата квантовооптического измерения следует упомянуть работы [23–25], в которых метод редукции измерения впервые был использован для получения *сверхразрешения*, т.е. интересующей исследователя характеристикой объекта исследования являлось его изображение, которое было бы получено датчиком с геометрическим разрешением, превышающим геометрическое разрешение фактически использованного подвального датчика или матрицы датчиков, и исследовалась робастность полученной оценки (в частности, по отношению к неточности позиционирования сканирующего датчика). В отличие от рассматриваемой в разделе 2 задачи, в них рассматривалось априорная информация, согласно которой объект исследования не является априори ограниченным, а априори произволен или априори случаен (т.е.  $f$  — реализация случайного вектора  $\varphi$ , имеющего известное математическое ожидание и ковариационный оператор), причём в последнем случае рассматривается также случайный, а не известный, оператор  $A$ , и ковариационный оператор погрешности измерения соответствует белому шуму, а не имеет характерный для естественного освещения вид (10).

### 1. АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ИНТЕРЕСУЮЩЕЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАННОМУ МНОЖЕСТВУ

Рассмотрим задачу редукции измерения в тех же условиях, что выше, но при условии, что априори известно множество  $\mathcal{F}_{\text{пр}} \subset \mathcal{F}$ , которому принадлежит  $f$ ,

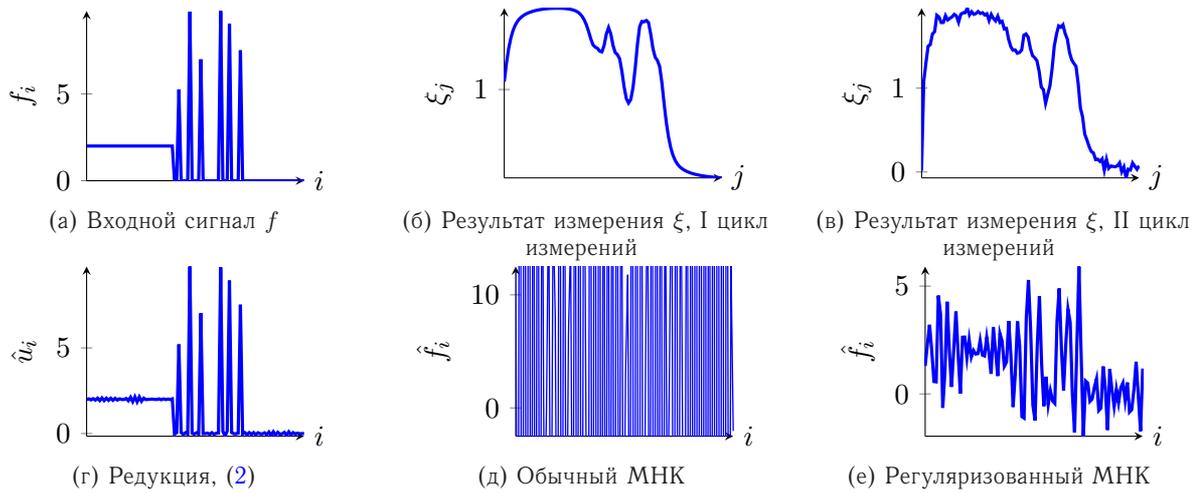


Рис. 1: Результаты обработки измерения  $\xi$  (б, в) входного сигнала  $f$  (а) при отсутствии априорной информации: (г) оценка линейной редукции (2); (д) оценка МНК; (е) оценка регуляризованного МНК, параметр регуляризации определён по невязке, как ограничение на  $\|\nu\|^2$  выбрано  $\mathbb{E}\|\nu\|^2$

$\mathcal{F}_{\text{pr}} \neq \emptyset$ , или что априори известно множество  $\mathcal{U}_{\text{pr}} \subset \mathcal{U}$ , которому принадлежит истинное значение  $Uf$  характеристики объекта исследования, интересующей исследователя.

Задача редукции для вероятностной модели схемы измерений (1) при условии  $f \in \mathcal{F}_{\text{pr}}$  рассмотрена в [1, §7.2], где использован следующий факт: если  $\zeta = \zeta(\xi)$  — какое-либо решение задачи интерпретации измерения  $\xi$ , то проекция  $\zeta$  на  $U\mathcal{F}_{\text{pr}} = \{Uf | f \in \mathcal{F}_{\text{pr}}\}$ , т. е. решение  $\Pi(\zeta)$  задачи на минимум  $\|\zeta - u\|^2 = \inf_{u \in U\mathcal{F}_{\text{pr}}} \|\zeta - u\|^2$ , имеет меньшую с. к. погрешность, чем  $\zeta$ , если  $\zeta \notin U\mathcal{F}_{\text{pr}}$ . Пусть  $U = I$ . Уточнение оценки  $R_*\xi$  при  $U = I$ , см. (2), определим рекуррентным процессом

$$\hat{f}_{i+1} = \Pi(\tilde{R}\xi_i), \xi_i = \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{f}_i \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $i = 0, 1, \dots$ ,  $\hat{f}_0 = \Pi(R_*\xi)$  при  $U = I$ ,  $\tilde{R}$  — оператор редукции к  $U = I$  измерения по схеме  $\xi_i = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}$  при любом шуме  $\tilde{\nu}$ , т. е. для ИП  $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$  при шуме, ковариационный оператор которого  $\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_\nu \end{pmatrix}$ .

Другой вариант уточнения, предложенный в [22] — неподвижная точка процесса (6), т. е. решение уравнения

$$\hat{f} = \Pi\left(\tilde{R}\begin{pmatrix} \xi \\ \hat{f} \end{pmatrix}\right) \quad (7)$$

относительно  $\hat{f}$ . Численный эксперимент, см. ниже, показывает, что выбор ковариационного оператора  $\Sigma_{\tilde{\nu}}$  шума  $\tilde{\nu}$  фиктивного измерения влияет на точность и скорость вычисления результата редукции. Оценка, определённая решением уравнения

$$\hat{u} = \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}\left(\tilde{R}_{\Sigma_{R_*\xi}}(\xi^T, \hat{u}^T)^T\right) \quad (8)$$

относительно  $\hat{u}$ , где  $\Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{U}_{\text{pr}}}(v - u, \Sigma_{R_*\xi}^{-1}(v - u))$ ,  $\tilde{R}_{\Sigma_{R_*\xi}}$  — оператор редукции измерения для ИП  $\begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix}$  при шуме, ковариационный оператор которого  $\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \Sigma_{R_*\xi} \end{pmatrix}$ , т. е. типа (7), но при проецировании, ортогональном не в евклидовой норме, а в  $\Sigma_{R_*\xi}^{-1}$ -энергетической норме (или, что в данном случае то же самое, при минимизации расстояния Махаланобиса), и при использовании в качестве ковариационного оператора  $\Sigma_{\tilde{\nu}}$  погрешности  $\tilde{\nu}$  фиктивного измерения ковариационного оператора  $\Sigma_{R_*\xi} = R_*\Sigma_\nu R_*^*$  оценки линейной несмещённой редукции (2), имеет несколько меньшую с. к. погрешность. Это связано с тем, что за счёт использования  $\Sigma_{R_*\xi}$  как ковариационного оператора погрешности фиктивного измерения результат фиктивного измерения рассматривается как поражённый тем же шумом, что и результат основного измерения, а за счёт использования  $\Sigma_{R_*\xi}$  при проецировании наиболее точная версия интересующей исследователя характеристики, принадлежащая  $U\mathcal{F}_{\text{pr}}$ , выбирается с учётом относительных погрешностей её компонент. Поскольку операторы редукции основного и фиктивного измерений по отдельности и ковариационные операторы полученных при этом оценок совпадают, объём вычислений для получения оценки (8) меньше, чем для оценок (6) и (7) (не требуется вычислять  $\left(\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_\nu \end{pmatrix}^{-1/2} \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_\nu \end{pmatrix}^{-1/2}$ ), если не учитывать вычисление результата проецирования.

Для вычисления оценок (7) и (8) можно использовать метод простой итерации, то есть вычислять с помощью рекуррентного процесса  $f_{i+1} = \Pi\left(\tilde{R}\begin{pmatrix} \xi \\ f_i \end{pmatrix}\right)$  при начальном приближении  $\hat{f}_0 = \Pi(R_*\xi)$  или

$\hat{u}_{i+1} = \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}} \left( \tilde{R}_{\Sigma_{R_*\xi}} \left( \begin{matrix} \xi \\ \hat{u}_i \end{matrix} \right) \right)$  при начальном приближении  $\hat{u}_0 = \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(R_*\xi)$ , соответственно,  $i = 0, 1, \dots$ . Сходимость следует из того, что отображения в правых частях (7) и (8) являются сжимающими.

**Теорема 1.** Пусть измерения производятся по схеме (1)  $\xi = Af + \nu$ , где шум  $\nu$  имеет нулевое математическое ожидание и известный ковариационный оператор  $\Sigma_\nu$ , входной сигнал является априори произвольным элементом множества  $\mathcal{F}_{\text{рг}}$ , значение интересующей исследователя характеристики  $u = Uf$  априори принадлежит множеству  $\mathcal{U}_{\text{рг}}$ , где множества  $\mathcal{F}_{\text{рг}}$  и  $\mathcal{U}_{\text{рг}}$  — выпуклые. Тогда с.к. погрешность оценок (6), (7) и (8) не превышает с.к. погрешность оценки (2) линейной несмещённой редукции.

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из отмеченного в [1, т. 7.2.1] и выше факта, что результат проецирования  $\Pi(\zeta)$  любого решения  $\zeta$  задачи интерпретации измерения на множество априори возможных значений  $\mathcal{U}_{\text{рг}} = U\mathcal{F}_{\text{рг}}$  интересующей исследователя характеристики имеет не большую с.к. погрешность, чем само решение  $\zeta$  (меньшую, если  $\zeta \notin \mathcal{U}_{\text{рг}}$ ), и того, что погрешность результата редукции измерения по схемам  $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}$  и  $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}$  при любом ковариационном операторе шума  $\tilde{\nu}$  фиктивного измерения не превышает погрешность оценки (2) линейной несмещённой редукции, см. [1, т. 5.5.1]. ■

Заметим, что априори в силу произвольности входного сигнала нельзя сказать, будет ли получено улучшение применением оценок (6), (7) или (8) по сравнению с оценкой линейной редукции (2). В частности, улучшение невозможно, если  $\mathcal{U}_{\text{рг}} \supset \{u' \in \mathcal{U} \| \|u' - v\| \leq \|\Sigma_{R_*\xi}\|^{1/2}\}$ . С другой стороны, если  $R_*\xi \notin \mathcal{U}_{\text{рг}}$ , применение этих методов улучшает оценку.

*Замечание 1.* Если выполняется условие (3)  $U(I - A^{-1}A) = 0$ , оценки (6), (7) и (8) имеют конечную с.к. погрешность, но, кроме того, их с.к. погрешность конечна вне зависимости от выполнения этого условия и в случае, если множества  $\mathcal{F}_{\text{рг}}$  или  $\mathcal{U}_{\text{рг}}$ , соответственно, являются ограниченными.

В качестве примера на рис. 2 показано решение задачи редукции спектра, измеренного спектрометром с аппаратной функцией (5), если априори известна неотрицательность спектральной плотности. Видно, что использование информации о неотрицательности спектральной плотности значительно улучшает качество полученной оценки, причём при использовании метода (8) улучшение больше, чем при использовании (6) и (7). В частности, метод (8), в отличие от (6) и (7), не приводит к появлению «ложного сигнала» в области, где спектральная плотность равна нулю. Разумеется, высокое качество оценки метода (8) по сравнению с оценкой линейной несмещённой редукции связано с тем, что для использованного входного сигнала среди ограничений, определяющих множество априори возможных сигналов, большинство активных.

В показанном на рис. 3 случае при той же априорной информации, но другом входном сигнале, содержащем область ненулевой спектральной плотности при малых частотах, даже при более слабом шуме в этой области погрешность оценки метода (8) относительно велика, хотя и меньше, чем погрешность оценки метода (6), оценки метода (7), которая в этом случае практически с ней совпадает, и тем более погрешность оценки линейной редукции. Оценка известного метода также содержит «ложный сигнал» в области нулевой спектральной плотности, хотя и более слабый, чем на рис. 2.

## 2. КВАНТОВЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ СУБПУАССОНОВСКИМ СВЕТОМ, И ИХ РЕДУКЦИЯ

Погрешность редукции к одному и тому же идеальному ИП  $U$  измерений, произведённых на одном и том же ИП  $A$  при одной и той же априорной информации, очевидно, зависит от погрешности измерений. Примером понижения уровня шума физическими средствами является применение для формирования изображений света с подавленными фотонными флуктуациями [26]. Такой свет называется *субпуассоновским*, поскольку дисперсия числа фотонов (например, попадающих в светочувствительный элемент) из пучка такого света меньше, чем математическое ожидание этого числа (в случае естественного света математическое ожидание и дисперсия числа фотонов равны, а само число фотонов имеет распределение Пуассона). Приготовление такого света, однако, тем более трудоёмко, чем в большей степени подавляются флуктуации. Поэтому в этом разделе исследована зависимость качества редукции изображения, сформированного таким светом, от степени подавления флуктуаций и от таких характеристик объекта исследования и его освещения, как контрастность (распределения прозрачности) объекта исследования и средняя яркость освещения.

Для обработки квантовых изображений, как правило, применяются описанные во введении методы обработки результатов измерений или оценивание с помощью метода апостериорного максимума (один из байесовских аналогов метода максимального правдоподобия, в котором оцениваемая величина априори считается реализацией случайной величины с известным распределением, и оценкой является точка максимума вычисленного по правилу Байеса апостериорного распределения), где априорное распределение случайной прозрачности объекта исследования, например, пропорционально экспоненте отрицательной полной вариации изображения [27] или с помощью метода максимального правдоподобия без регуляризации [28] или с регуляризирующими слагаемыми в логарифме функции правдоподобия, зависящими от разностей прозрачностей соседних пикселей (дискретный аналог нормы  $L^1$  лапласиана распределения прозрачности) [29] (присутствие таких слагаемых формально эквивалентно методу апо-

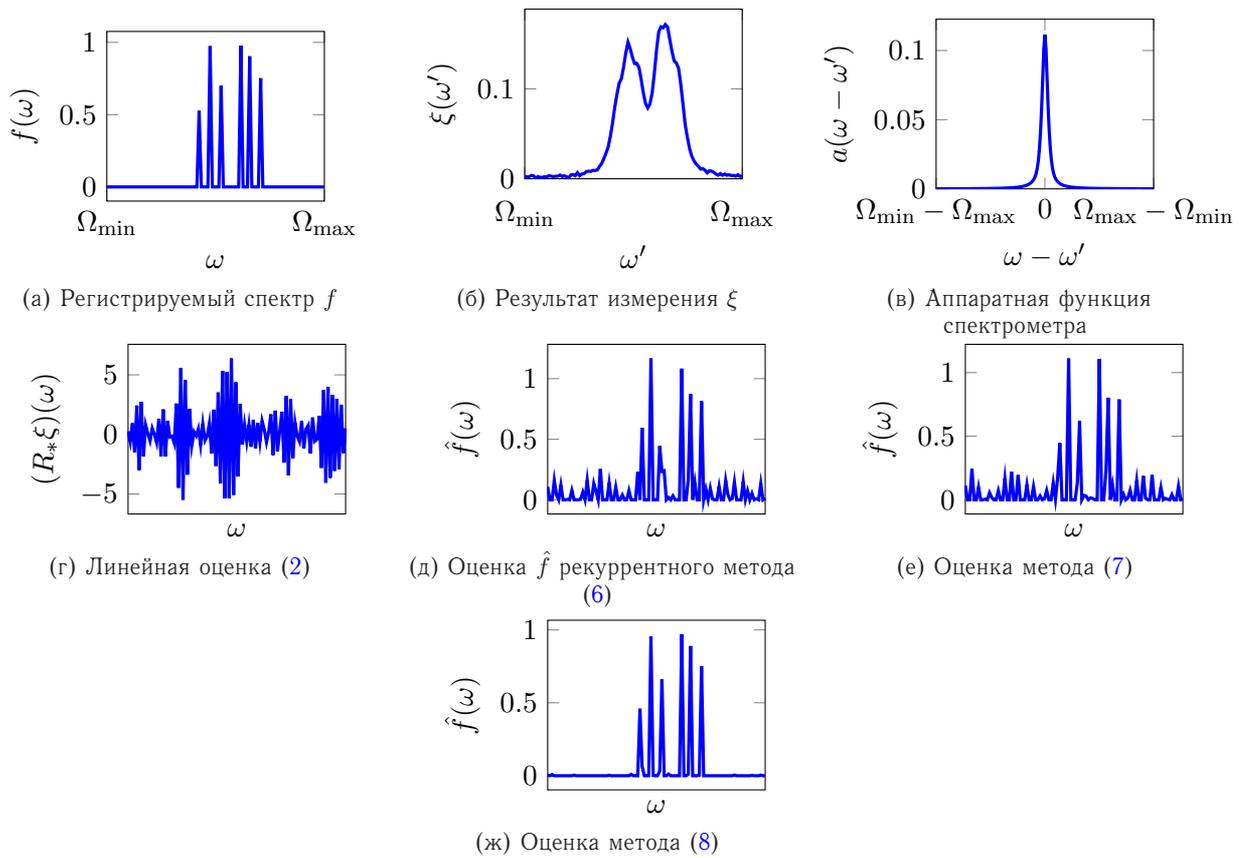


Рис. 2: Результаты редукции измерения  $\xi$  (б) спектра  $f$  (а) при априорной информации о неотрицательности спектральной плотности,  $f \in \mathcal{F}_{\text{pr}} = \{f' \in \mathcal{F} | f' \geq 0\}$ ,  $U = I$ ,  $\mathcal{U}_{\text{pr}} = \mathcal{F}_{\text{pr}}$ : (г) методом линейной несмещённой редукции, в котором не используется неотрицательность спектра; (д) рекуррентным методом (6), 100 отображений  $\hat{f} \mapsto \Pi \left( \tilde{R} \left( \xi^T, \hat{f}^T \right)^T \right)$ ,  $\Pi$  — ортогональный проектор на  $\mathcal{F}_{\text{pr}}$ ; (е) неподвижной точкой (7) этого отображения; (ж) неподвижной точкой (8) отображения  $\hat{u} \mapsto \Pi_{\Sigma_{R_* \xi}} \left( \tilde{R}_{\Sigma_{R_* \xi}} \left( \xi^T, \hat{u}^T \right)^T \right)$ ,  $\Pi_{\Sigma_{R_* \xi}}$  — ортогональный в смысле расстояния Махаланобиса, порожденного ковариационным оператором  $\Sigma_{R_* \xi}$  оценки линейной несмещённой редукции, проектор на  $\mathcal{U}_{\text{pr}}$

стериорного максимума с соответствующим априорным распределением). Поскольку обрабатываются квантовые изображения, при обработке регуляризованным МНК в качестве регуляризирующего функционала часто используется характеристика разрежённости изображения в заранее выбранном базисе, например, базисе дискретного косинусного преобразования.

Пусть изображение объекта исследования (прошедшее через него световое излучение) регистрируется перемещающейся строкой датчиков, причём прозрачность объекта исследования зависит только от одной пространственной координаты и кусочно-постоянна, т. е. прозрачность объекта исследования в пределах каждого пикселя постоянна, а выходной сигнал каждого датчика пропорционален энергии светового излучения, прошедшего через него и, следовательно, пропорционален числу взаимодействующих с датчиком фотонов. Геометрическая разрешающая способность строки датчиков определяется размером датчиков, из которых она состоит. Пусть, как и в [23–25], чтобы синтезировать сигнал с более высоким разрешением, чем у са-

мой строки датчиков, строка датчиков перемещается по полю зрения с шагом, длина которого меньше размера датчика, и при каждом её положении показания датчиков регистрируются. Чтобы синтезировать сигнал размерности  $N$ , т. е. состоящий из  $N$  пикселей, имея строку из  $s$  датчиков, необходимо перемещать ее на длину, равную длине одного пикселя, и провести измерения не менее, чем для  $N/s$  позиций системы датчиков. Это условие является необходимым, но не достаточным (ср. с условием (3)). Пусть измерения проведены для  $n$  положений системы датчиков.

Такие измерения могут рассматриваться, как проводимые по схеме измерения (1), в которой  $f \in \mathcal{F}_{\text{pr}} = [0, 1]^N \subset \mathcal{F} = \mathcal{R}^N$  — априори неизвестный вектор, описывающий пространственное распределение прозрачности объекта исследования, который в силу отсутствия искажений, вносимых процессом измерения, совпадает с измеряемым объектом,  $\nu \in \mathcal{X} = \mathcal{R}^{ns}$  — погрешность измерения, имеющая нулевое математическое ожидание. Оператор  $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$  моделирует воздействие прошедшего через объект исследова-

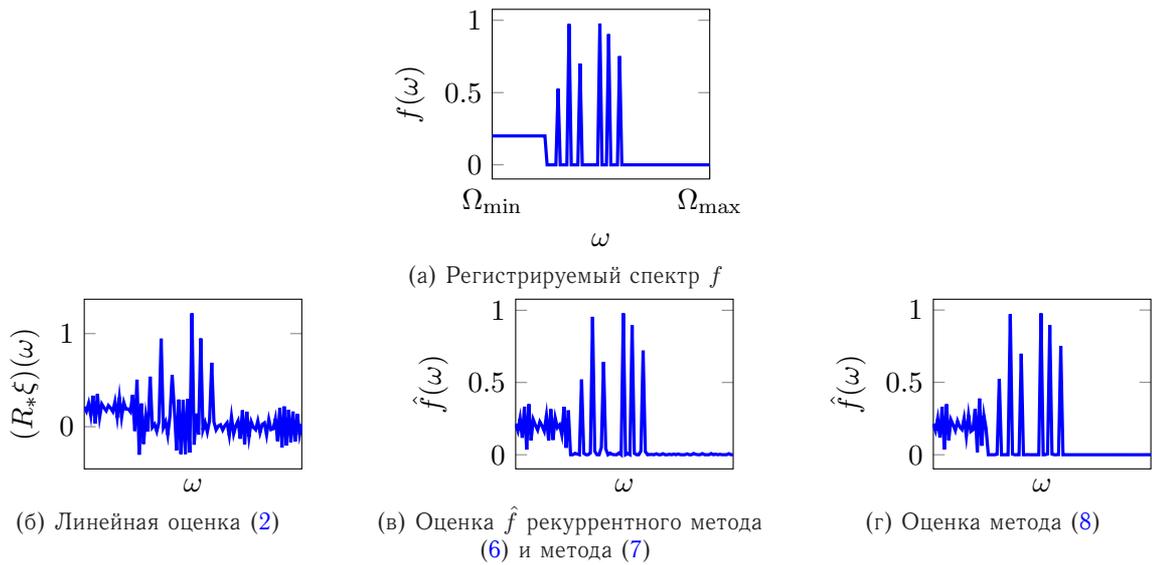


Рис. 3: Результаты редукции измерения  $\xi$  спектра  $f$  (а) при априорной информации о неотрицательности спектральной плотности,  $f \in \mathcal{F}_{\text{pr}} = \{f' \in \mathcal{F} | f' \geq 0\}$ ,  $U = I$ ,  $\mathcal{U}_{\text{pr}} = \mathcal{F}_{\text{pr}}$ : (б) методом линейной несмещённой редукции, в котором не используется неотрицательность спектра; (в) рекуррентным методом (6), 100 отображений  $\hat{f} \mapsto \Pi \left( \tilde{R} \left( \xi^T, \hat{f}^T \right)^T \right)$ , и неподвижной точкой (7) этого отображения; (г) неподвижной точкой (8) отображения  $\hat{u} \mapsto \Pi_{\Sigma_{R_* \xi}} \left( \tilde{R}_{\Sigma_{R_* \xi}} \left( \xi^T, \hat{u}^T \right)^T \right)$

ния светового излучения на строку датчиков. Его матричный элемент  $A_{is+j,k}$  равен отклику  $j$ -го детектора в строке при её  $i$ -м положении на единичную прозрачность  $k$ -го элемента объекта и нулевую прозрачность остальных,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,  $k = 1, \dots, N$ .  $\xi$  — вектор, составленный из показаний  $\xi^{(i)}$  строки датчиков,  $i = 1, \dots, n$ .

Когерентный свет имеет пуассоновское распределение числа фотонов

$$\Pr(\xi_k = m) = \frac{((Af)_k)^m}{m!} \exp(-(Af)_k). \quad (9)$$

При этом  $\mathbb{D}\xi_k = \mathbb{E}\xi_k = (Af)_k$ . Здесь  $\xi_k$  измеряется «в фотонах», в общем же случае  $\mathbb{D}\xi_k$  и  $\mathbb{E}\xi_k$  пропорциональны, коэффициент пропорциональности зависит от выбора единиц измерения. Пусть регистрация проводится всей строкой датчиков одновременно, а флуктуации в различные моменты времени независимы. Тогда матрица ковариационного оператора шума на выходе ИП блочно-диагональна и имеет следующий вид:

$$\Sigma_{\nu}(f) = g \begin{pmatrix} A^{(1)} \text{diag}(f) A^{(1)*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(2)} \text{diag}(f) A^{(2)*} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A^{(n)} \text{diag}(f) A^{(n)*} \end{pmatrix} = g A \text{diag}(f) A^*, \quad (10)$$

где  $A^{(i)}$  — часть матрицы  $A$ , соответствующая измерениям при  $i$ -м положении строки датчиков,  $\text{diag}(f)$  — матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим компонентам вектора  $f$  — прозраčnostям областей постоянной прозрачности объекта исследования, а остальные — нулю,  $g$  — множитель, связывающий единицу измерения с числом фотонов (равный показанию датчика после воздействия

единичного фотона).

Субпуассоновское состояние света характеризуется меньшим значением дисперсии шума. Пусть достигается подавление квантовых флуктуаций в  $\kappa$  раз. В таком случае ковариационная матрица шума имеет вид

$$\Sigma_{\nu}^{(\kappa)}(f) = \frac{1}{\kappa} \Sigma_{\nu}(f), \quad (11)$$

где  $\Sigma_{\nu}(f)$  определяется формулой (10).

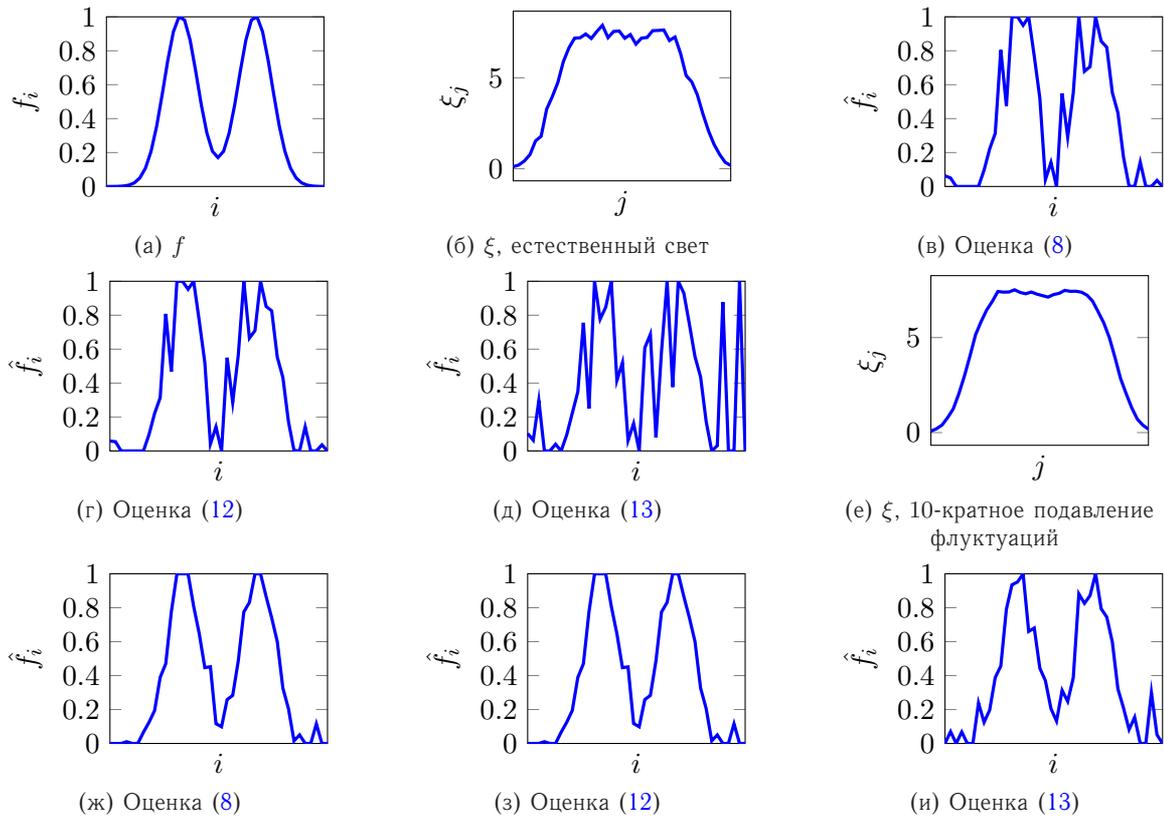


Рис. 4: Редукция квантового изображения, получаемого при освещении объекта с высококонтрастным распределением прозрачности (а) и регистрируемого перемещающейся строкой датчиков размером 13 пикселей: изображение (б), полученное при освещении естественным светом без подавления флуктуаций и результаты его редукции (в) методом (8) (при известном ковариационном операторе погрешности  $\Sigma_\nu$ ), (г) методом (12) (в котором  $\Sigma_\nu$  оценивается) и (д) методом (13) (не использующим  $\Sigma_\nu$ ); изображение (е), полученное при освещении светом с 10-кратным подавлением флуктуаций и результаты его редукции (ж) методом (8), (з) методом (12) и (и) методом (13)

Поскольку в данном случае измерение по предположению не искажает объект, а интерес представляет само распределение прозрачности, то  $U = I$ .

Поскольку ковариационные операторы (10) и (11) сами зависят от входного сигнала, оценка (2) линейной несмещённой редукции и основанная на ней оценка (8) формально неприменимы. Оценка (4) не требует знания ковариационного оператора погрешности и поэтому применима, но она не использует доступную информацию о виде ковариационного оператора (10) и (11). Поэтому с целью определить, в какой степени незнание ковариационного оператора погрешности ухудшает качество редукции, сравниваются следующие оценки редукции:

- оценка (8) с истинным, неизвестным исследователю ковариационным оператором  $\Sigma_\nu^{(\kappa)}(f)$ , показывающая, в известном смысле, предельные возможности редукции;
- оценка типа (8) — решение уравнения

$$\hat{u} = \Pi_{\Sigma_{R^*(\hat{u})\xi}} \left( \tilde{R}_{\Sigma_{R^*(\hat{u})\xi}}(\hat{u}) (\xi^T, \hat{u}^T)^T \right), \hat{u} \in U_{\text{pr}} = \mathcal{F}_{\text{pr}}, \quad (12)$$

в которой операторы редукции  $R_*(\hat{u})$  и  $\tilde{R}_{\Sigma_{R^*(\hat{u})\xi}}(\hat{u})$  вычисляются при подстановке вместо истинного ковариационного оператора погрешности измерения  $\Sigma_\nu^{(\kappa)}(f)$  его оценки  $\Sigma_\nu^{(\kappa)}(\hat{u})$ , а в качестве начального приближения используется оценка  $\Pi(UA^{-1}\xi)$ ;

- оценка типа (7), в которой вместо оператора редукции  $\tilde{R}$  для ИП  $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$  при шуме, ковариационный оператор которого  $\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_\nu \end{pmatrix}$ , используется оператор редукции  $\tilde{R}'$ , определённый формулой (4) для ИП  $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$  при шуме, ковариационный оператор которого неизвестен (в силу ограниченности  $\mathcal{F}_{\text{pr}}$  априорное ограничение следа ковариационного оператора известно), т. е. оценка — решение уравнения

$$\hat{f} = \Pi \left( \tilde{R}' \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{f} \end{pmatrix} \right) \quad (13)$$

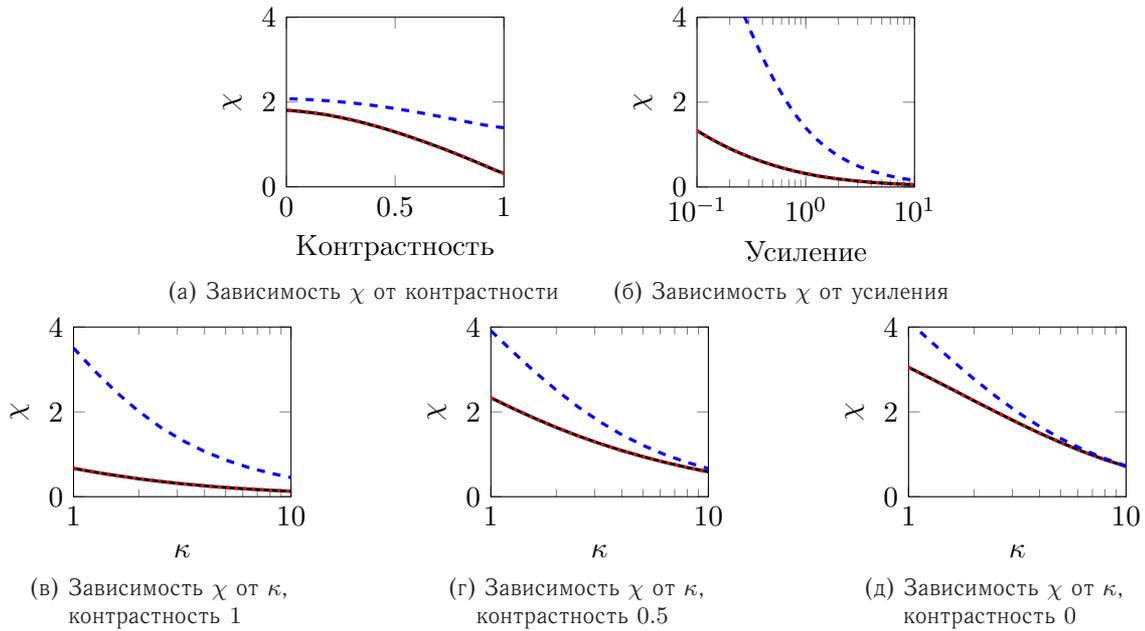


Рис. 5: Зависимость с. к. погрешностей  $\chi$  результатов редукции от (а) контрастности распределения прозрачности объекта исследования (рис. 4 соответствует контрастности 1); (б) усиления освещения (единичное усиление соответствует показанному на рис. 4); (в)–(д) степени подавления флуктуаций  $\kappa$  (точечный пунктир) оценки (8), использующей известный ковариационный оператор погрешности  $\Sigma_\nu$ , (сплошная) оценки (12), в которой  $\Sigma_\nu$  оценивается, и (пунктир) оценки (13), в которой  $\Sigma_\nu$  не используется

относительно  $\hat{f}$ , не зависящая от неизвестного ковариационного оператора  $\Sigma_\nu^{(\kappa)}(f)$ .

Эти оценки сравнивались в компьютерном эксперименте, в котором  $\dim f = \dim \xi = 40$ , оператор  $A$  соответствует перемещающейся (вдоль той пространственной координаты, от которой зависит прозрачность объекта исследования) строке датчиков размером 13 пикселей. В качестве характеристики контрастности использовалась контрастность Майкельсона (видимость), определённая для изображения  $f$  как

$$\frac{\max_{i=1, \dots, \dim f} f_i - \min_{i=1, \dots, \dim f} f_i}{\max_{i=1, \dots, \dim f} f_i + \min_{i=1, \dots, \dim f} f_i}.$$

Поскольку и увеличение времени экспозиции, и увеличение средней яркости освещающего объект исследования светового излучения эквивалентны умножению  $A$  на число, эти параметры модели измерения далее объединяются под названием усиления освещения.

На рис. 4 показаны результаты редукции для высококонтрастного объекта исследования при отсутствии подавления флуктуаций и при их 10-кратном подавлении (компоненты вектора  $\xi$ , соответствующие показаниям отдельных датчиков, переупорядочены в соответствии с положениями центров датчиков). На рис. 5 показана зависимость с. к. погрешности результатов редукции от контрастности распределения прозрачностей объекта исследования (при том же усилении освещения, что и на рис. 4, и 3-кратном подавлении флуктуа-

ций), усиления освещения (при наибольшей контрастности и 3-кратном подавлении флуктуаций) и степени подавления флуктуаций (при контрастностях 1, 0.5, 0 и том же усилении освещения, что и на рис. 4). Как видно из результатов компьютерного эксперимента, оценка (12), в которой ковариационный оператор погрешности  $\Sigma_\nu$  оценивается, почти не отличается от оценки (8), а оценка (13), не использующая  $\Sigma_\nu$ , хуже обоих этих оценок. Кроме того, судя по полученным результатам редукции, подавление квантовых флуктуаций наиболее эффективно при оценивании распределения прозрачности низкоконтрастных, практически прозрачных объектов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в статье, оптимальное использование имеющейся у исследователя априорной информации о модели измерения может значительно повысить точность интерпретации данных измерения. Как видно из рис. 2, 3, качество рекуррентной оценки (6) и оценки (7) хуже, чем оценки (8).

Сложность вычисления результата редукции (количество затрачиваемых на вычисления ресурсов: времени, памяти компьютера и т. д.) существенно зависит от вида априорной информации. Сложность вычисления результата вероятностной редукции зависит от сложности ортогонального проецирования на  $\mathcal{F}_1$ , поскольку вычисление оценок вероятностной редукции (2), (6),

(7), (8), за вычетом проецирования, сводится к решению систем линейных уравнений, причем в случае оценок (6) — с одинаковой матрицей, и системы уравнений с той же матрицей решаются при вычислении (7), а при вычислении оценки (8) — с той же матрицей, что и при вычислении оценки линейной редукции (2).

Полученные в п. 2 результаты иллюстрируют новые применения описанных вариантов метода редукции измерения к задачам интерпретации квантовых изображений. Как показано, метод редукции измерения применим и в том случае, если погрешность измерения не является аддитивной, а её ковариационный оператор зависит от неизвестного исследуемого сигнала и оценивается одновременно с этим сигналом. Кроме того, поскольку метод редукции измерения позволяет получить *априорную* оценку погрешности оценивания,

он позволяет определить оптимальные для наблюдения условия, при которых, например, в п. 2 подавление квантовых флуктуаций наиболее эффективно.

В случае квантовых изображений применение метода редукции измерения позволяет увеличить разрешение и ослабить зашумлённость получаемых изображений. Это особенно важно при наблюдении быстро эволюционирующих или повреждаемых слишком сильным освещением объектов.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-07-00424 и 18-01-000598).

- 
- [1] *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3 изд., перераб. и дополн. М., 2012.
- [2] *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., 1968. (*Rao C. R.* Linear statistical inference and its applications. New York, NY, 1965.)
- [3] *Rao C. R., Toutenburg H., Shalabh, Heumann C.* Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives. 3 edition. Berlin, 2007.
- [4] Total Least Squares and Errors-in-Variables Modeling: Analysis, Algorithms and Applications. Ed. by Sabine Van Huffel, Philippe Lemmerling. 1 ed. Dordrecht, the Netherlands, 2002. doi: 10.1007/978-94-017-3552-0.
- [5] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. 2 изд. М., 1979. (*Tikhonov A. N., Arsenin V. Y.* Solutions of Ill-posed Problems. Washington, D.C., 1977.)
- [6] *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М., 1990. (*Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-posed Problems. Dordrecht, 1995. doi: 10.1007/978-94-015-8480-7)
- [7] *Zhou H., Hastie T. J.* of the *Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*. 2005. **67**, N 2. P. 301.
- [8] *Королев Ю. М., Ягола А. Г.* Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2012. **13**. С. 14.
- [9] *Ягола А. Г.* Некорректные задачи и методы их решения. Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании. Международная школьно-конференция молодых ученых. М., 2016. С. 64.
- [10] *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Mathematics and Its Applications. 1 edition. Dordrecht, the Netherlands, 1996. doi: 10.1007/978-94-009-1740-8.
- [11] *Armagan A.* Variational Bridge Regression. Proceedings of the 12th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS). Vol. 5 of JMLR: W&CP. Clearwater Beach, FL, 2009.
- [12] *Park C., Yoon Y. J.* *J. of Statistical Planning and Inference*. 2011. **141**, N 11. P. 3506.
- [13] *Морозов В. А.* Методы регуляризации неустойчивых задач. М., 1987. (*Morozov V. A.* Regularization Methods for Ill-Posed Problems. Florida, 1993.)
- [14] *Amato U., Hughes W.* *Inverse Problems*. 1991. **7**, N 6. P. 793.
- [15] *Borwein J. M.* *Mathematical Programming*. 1993. **61**. P. 251.
- [16] *Леонов А. С.* Сибирский математический журнал. 2000. **41**, № 4. С. 863. (*Leonov A. S.* *Siberian Math. J.* 2000. **41**, №4. P. 716).
- [17] *Ravon M., Ferrante A.* *SIAM Review*. 2013. **55**, N 3. P. 415.
- [18] *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989. С. 352.
- [19] *Чуличков А. И.* Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения. Линейные стохастические измерительно-вычислительные системы. Тамбов, 2000.
- [20] *Пытьев Ю. П., Сердобольская М. Л.* *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 1988. **29**, № 6. С. 78.
- [21] *Чуличков А. И., Юань Б.* *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 2015. № 5. С. 24. (*Chulichkov A. I., Yuan B.* *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2015. **70**, N 5. P. 353.)
- [22] *Балакин Д. А., Пытьев Ю. П.* *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 2017. № 2. С. 3. (*Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P.* *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2017. **72**, N 2. P. 101).
- [23] *Григорьева А. М., Пытьев Ю. П.* Динамическая модель повышения геометрической разрешающей способности системы регистрации изображений // Доклады 15-й Всероссийской конференции ММРО-15. М., 2011. С. 471.
- [24] *Григорьева А. М., Пытьев Ю. П.* Сверхразрешение и робастность динамических матриц сенсоров // Материалы X Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». М., 2011.
- [25] *Антонюк В. А., Григорьева А. М., Пытьев Ю. П.* Метод математической редукции измерений в «задаче сверх-

- разрешения» // XIII Всероссийская научно-техническая конференция «Состояние и проблемы измерений». Сборник материалов / МГТУ им. Н. Э. Баумана. М., 2015.
- [26] Балакин Д. А., Белинский А. В. *ЖЭТФ*. 2016. **149**, № 5. С. 915.  
(Balakin D. A., Belinsky A. V. *J. Exp. Theor. Phys.* 2016. **122**, N 5. P. 787).
- [27] Chan S.H., Lu Y.M. Efficient image reconstruction for gigapixel quantum image sensors // Signal and Information Processing (GlobalSIP), 2014 IEEE Global Conference on. Atlanta, GA, 2014. P. 312. doi: 10.1109/GlobalSIP.2014.7032129.
- [28] Lvovsky A. I., Raymer M. G. *Rev. Mod. Phys.*. 2009. **81**, N 1. P. 299.
- [29] Mertens L., Sonnleitner M., Leach J. et al. *Sci. Rep.* 2017. **7**. P. 42164.

---

## Improvement of measurement reduction if the feature of interest of the research object belongs to a known convex closed set

D. A. Balakin<sup>a</sup>, Yu. P. Pytyev<sup>b</sup>

*Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>balakin\_d\_a@physics.msu.ru, <sup>b</sup>yuri.pytyev@physics.msu.ru*

The article considers the use of information that the input signal or the characteristic of interest of the research object belongs to a given set in measurement reduction method for probabilistic measurement model. A probabilistic reduction estimate that has lower mean squared error than previously known ones is proposed and researched.

Futhermore, as an example the article considers reduction of a quantum optical measurement — an image of the research object obtained using illumination with natural light and light with suppressed photon count fluctuations. The dependency of reduction result quality on fluctuation suppression and some image features (contrast, average brightness). It is shown that the dependence of noise covariation operator on the estimated signal does not noticeably degrade measurement reduction quality.

PACS: 02.50.Le.

*Keywords:* mathematical measurement model, measurement reduction, optimal decisions, measuring-computing systems.

*Received 19 June 2018.*

### Сведения об авторах

1. Балакин Дмитрий Александрович — физик; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru.
  2. Пытьев Юрий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-13-32, e-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru.
-