

Об одной модели реакция-диффузия-адвекция для нелинейного уравнения тепломассопереноса

М.А. Давыдова*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 2
(Статья поступила 30.06.2018; Подписана в печать 02.07.2018)

Настоящая работа направлена на исследование многомерных тепловых структур в нелинейных несжимаемых диссипативных средах с применением последних научных достижений в области асимптотического анализа. Выделен класс сингулярно возмущенных многомерных задач нелинейной теплопроводности, к исследованию которого применимы асимптотические методы, а именно: модифицированный метод пограничных функций и асимптотический метод дифференциальных неравенств. Предлагаются обоснованные алгоритмы построения асимптотических решений пограничного типа и асимптотических решений типа контрастных структур нулевого порядка. Последние описывают тепловые структуры в нелинейных однородных диссипативных средах. Использование эффективного алгоритма позволяет выделить и описать поверхность перехода, в окрестности которой локализован внутренний слой решения типа контрастной структуры. Этот подход распространяется на более сложный, так называемый, критический случай. Результаты статьи интерпретированы и иллюстрированы примером двумерной краевой задачи. Они могут быть использованы для создания численного алгоритма, который применяет асимптотический анализ с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя решения типа контрастной структуры, а также с целью построения тестовых примеров.

PACS: 02.30.Jr

УДК: 517.9

Ключевые слова: нелинейная теплопроводность, тепловые структуры в нелинейных диссипативных средах, сингулярно возмущенные задачи типа реакция-диффузия-адвекция, решения с пограничными и внутренними переходными слоями.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование решений задач нелинейной теплопроводности ведется более сорока лет. За это время опубликовано большое количество работ, среди которых, в первую очередь, следует отметить работы А.А. Самарского, С.П. Курдюмова и их последователей. Значительная часть работ направлена на поиск автомодельных решений (напр. [1–4]). Изучение этого узкого класса решений обусловлено тем, что на нем легче всего изучать эффекты нелинейности. Постановка задачи, роль автомодельных решений в целом освещена в работе [1].

Отметим также те результаты, которые связаны с численным моделированием в задачах нелинейной теплопроводности, поскольку в исследовании нелинейных процессов численному моделированию отводится ведущая роль. Ряд многомерных задач, изучение которых не всегда допускает аналитическое описание, исследованы с использованием численных методов (напр. [5, 6]).

В настоящей работе рассматривается многомерная стационарная задача нелинейной теплопроводности, для которой выделен случай применимости асимптотического анализа. Если мощность тепловых источников велика, то модельная задача классифицируется как многомерная стационарная сингулярно возмущен-

ная задача типа реакция-диффузия-адвекция. К исследованию этой задачи применимы методы работ [7–9], развивающие классические методы асимптотического анализа [10, 11] на случай многомерных задач. В результате, получены асимптотические решения пограничного типа, соответствующие тепловым полям нелинейных стоков тепла, и асимптотические решения с внутренними переходными слоями, соответствующие тепловым структурам в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры. В частности, такая зависимость имеет место при химических реакциях, экзо- и эндотермических процессах в нагретых нелинейных средах.

Существование тепловых структур обусловлено конкуренцией двух нелинейных процессов. С одной стороны, нелинейные источники тепла порождают неоднородное распределение температуры внутри диссипативной среды. С другой стороны, наличие теплопроводности способствует выравниванию температуры, причем способность среды рассеивать тепло зависит от температуры. Существование упорядоченных структур следует рассматривать, как проявление процесса самоорганизации диссипативной среды в данном конкретном случае.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Стационарное распределение температуры в однородном твердотельном образце с нелинейными характеристиками описывается следующей краевой задачей:

*E-mail: m.davydova@physics.msu.ru

$$\begin{aligned} \nabla(k(u)\nabla u) + f(u, x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3, \\ u(x) = u^0(x), \quad x \in S, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x)$ — значение температуры в точке x , $k(u)$ — коэффициент теплопроводности, $k(u) > \delta_0$, δ_0 — некоторое положительное значение, $f(u, x)$ — объемная плотность источников тепла, $u^0(x)$ — значение температуры на границе S .

Введем безразмерные температуру и координаты, как отношение соответствующих размерных величин к характерным, для данной задачи, величинам. Если мощность тепловых источников велика, то в безразмерных переменных задача (1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (\Delta u - A(u)(\nabla u)^2) = B(u, x), \quad x \in D \subset R^3, \\ u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in S, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta = \sum_{k=1}^3 \partial^2/\partial x_k^2$ — оператор Лапласа, $(\nabla u)^2 = \sum_{k=1}^3 (\partial u/\partial x_k)^2$. Функции $A(u)$, $B(u, x)$,

$g(x)$ и граница S предполагаются достаточно гладкими (степень гладкости определяется порядком асимптотического решения), $\varepsilon > 0$ — малый параметр, наличие которого является следствием учета физических параметров задачи. В задаче (2) обозначения для безразмерных переменных сохранены.

2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПОГРАНСЛОЙНОГО ТИПА

Решение погранслоного типа задачи (2), характеризующееся быстрым изменением в окрестности границы области и относительно медленным внутри области, соответствует тепловому полю нелинейного стока. Формальная асимптотика решения погранслоного типа строится в предположении, согласно которому вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi_3(x)$, причем $B_u(\varphi_3(x), x) > 0$, $x \in D \cup S$. Ограничение на выбор краевого режима в задаче (2) имеет вид [9]:

$$\int_{\varphi_3(0, \eta)}^{g(0, \eta)} B(s, 0, \eta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 (d^k(0, \eta))^2 \int_s^{g(0, \eta)} A(\sigma) d\sigma\right) ds > 0, \quad \eta \in \Sigma. \quad (3)$$

В неравенстве (3) под обозначением $B(u, \bar{r}, \eta)$ понимается выражение для функции $B(u, x)$ в локальных координатах (\bar{r}, η) , введенных с целью описания решения в окрестности границы S , где \bar{r} — расстояние от точки на поверхности S до точки внутри области D вдоль нормали, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ — криволинейные координаты на поверхности S , Σ — область изменения переменной η на поверхности S , $d^k(0, \eta)$ — известные функции (подробнее см. [9]).

Асимптотическое разложение решения погранслоного типа ищется в виде:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \varepsilon) \quad (4)$$

где $\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi_3(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$ — регулярный ряд, описывающий решение внутри области D ; $\Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \eta) + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + \dots$ — погранслоный ряд, описывающий решение в окрестности границы S , $\rho = \bar{r}/\varepsilon$. Подставляя ряд (4) в задачу (2), в соответствии с алгоритмом построения асимптотики

решения погранслоного типа из работы [9], получаем последовательность задач для определения коэффициентов разложения (4). Коэффициенты регулярного разложения определяются как решения конечных уравнений. Коэффициенты погранслоного разложения определяются как решения краевых задач и выписываются в явном виде.

В частности, в нулевом приближении приходим к нелинейной задаче:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} - A(\tilde{u}) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}\right)^2 \sum_{k=1}^3 (d^k(0, \eta))^2 = B(\tilde{u}, 0, \eta), \quad (5)$$

$$\tilde{u}(0, \eta) = g(0, \eta), \quad \tilde{u}(+\infty, \eta) = \varphi_3(0, \eta),$$

где $\tilde{u}(\rho, \eta) = \varphi_3(0, \eta) + \Pi_0 u(\rho, \eta)$. Условие (3) обеспечивает разрешимость задачи (5), причем решение, например при $g(0, \eta) > \varphi_3(0, \eta)$, дается квадратурной формулой:

$$\rho = - \int_{g(0, \eta)}^{\tilde{u}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\int_{\varphi_3(0, \eta)}^{\lambda} 2B(s, 0, \eta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 (d^k(0, \eta))^2 \int_s^{\lambda} A(\sigma) d\sigma\right) ds}}. \quad (6)$$

Формулу (6) легко получить, если воспользоваться выражением для первого интеграла системы уравнений первого порядка, соответствующей уравнению из задачи (5). Под обозначениями $\varphi_3(\bar{r}, \eta)$, $g(\bar{r}, \eta)$ понимаются выражения для функций $\varphi_3(x)$, $g(x)$ в переменных (\bar{r}, η) .

По аналогии с работой [9] получается следующая оценка:

$$|Поu| \leq C \exp[-\chi\rho], \quad \chi > 0, \quad C > 0 \quad .$$

3. КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

При исследовании задачи (2) на наличие решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур) основным требованием является условие существования изолированных решений $u = \varphi_i(x)$, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$ вырожденно-

го уравнения таких, что $B_u(0, \varphi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, $B_u(0, \varphi_2(x), x) < 0$ при $x \in D \cup S$.

Контрастная структура определяется как решение задачи (2), которое по разные стороны от некоторой замкнутой поверхности $\Omega \in D$ (поверхности перехода) близко к разным решениям $u = \varphi_1(x)$ и $u = \varphi_3(x)$ вырожденного уравнения, а в малой окрестности поверхности Ω переходит от функции $u = \varphi_1(x)$ к функции $u = \varphi_3(x)$.

Определим множество $\{\bar{\Omega}\}$ достаточно гладких замкнутых поверхностей в области D с локальными координатами (r, θ) в малой окрестности каждой поверхности (подробнее см. [8]), где r – расстояние от точки на поверхности до точки внутри области D вдоль нормали, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – криволинейные координаты на поверхности.

Определим функцию

$$I(r, \theta) := \int_{\varphi_1(r, \theta)}^{\varphi_3(r, \theta)} B(\xi, r, \theta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 (l^k(r, \theta))^2 \int_{\xi}^{\varphi_2(r, \theta)} A(\eta) d\eta\right) d\xi, \quad (7)$$

где $l^k(r, \theta)$ – известные функции [8]. Используя алгоритмы работ [7, 8] в целях данного конкретного приложения, несложно получить достаточные условия существования контрастных структур в задаче (2) в терминах функции $I(r, \theta)$. В самом деле, достаточные условия существования контрастных структур в задаче (2) имеют вид [8]:

$$H(0, \theta) = \tilde{v}^+(\varphi_2(0, \theta), 0, \theta) - \tilde{v}^-(\varphi_2(0, \theta), 0, \theta) = 0, \quad (8)$$

$$H_r(0, \theta) > 0, \quad \theta \in \Theta_0,$$

где Θ_0 – область изменения координаты θ на некоторой поверхности $\Omega_0 \in \{\bar{\Omega}\}$, $\tilde{v}^{\pm}(\tilde{u}, r, \theta)$ – уравнения сепаратрис двух седел $(\varphi_1(r, \theta), 0)$ и $(\varphi_3(r, \theta), 0)$ на фа-

зовой плоскости присоединенной системы

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = A(\tilde{u}) \tilde{v}^2 \sum_{k=1}^3 (l^k(r, \theta))^2 + B(\tilde{u}, r, \theta), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Если первое уравнение в системе (9) разделить на второе, то полученное таким образом уравнение первого порядка, описывающее фазовые траектории, легко проинтегрировать и получить уравнения сепаратрис, лежащих в полуплоскости $\tilde{v} > 0$:

$$\tilde{v}^{\mp}(\tilde{u}, r, \theta) = \sqrt{\int_{\varphi_i(r, \theta)}^{\tilde{u}} 2B(s, r, \theta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 (l^k(r, \theta))^2 \int_s^{\tilde{u}} A(\sigma) d\sigma\right) ds}, \quad i = 1, 3. \quad (10)$$

С учетом этого, условие (8) принимает вид: существует поверхность $\Omega_0 \in \{\bar{\Omega}\}$ такая, что

$$I(0, \theta) = 0, \quad I_r(0, \theta) < 0, \quad \theta \in \Theta_0. \quad (11)$$

Ограничение на выбор функции $g(x)$ в задаче (2) по-прежнему определяется неравенством (3).

Уравнение из условия (11) определяет положение поверхности перехода в нулевом приближении и устанавливает связь между параметрами источников, характеристиками образца, поскольку $A(u) = -\partial(\ln k(u))/\partial u$, и размерами области скачка температуры. Это может иметь определенное практическое применение, по-

сколько изменяя параметры источников, можно регулировать размеры области охлаждения (или разогрева) и величину температурного скачка внутри этой области. Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры получается путем C^1 -сшивания на поверхности перехода Ω двух асимптотик пограничного типа

$$\begin{aligned} u^-(x, \varepsilon) &= \bar{u}^-(x, \varepsilon) + Qu^-(\xi, \theta, \varepsilon), \\ u^+(x, \varepsilon) &= \bar{u}^+(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) + Qu^+(\xi, \theta, \varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

где $\bar{u}^\pm(x, \varepsilon)$ — регулярные ряды, $\Pi u(\rho, \varepsilon)$ — пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы S (см. п. 2), $Qu^\pm(\xi, \theta, \varepsilon) = Q_0u^\pm(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1u^\pm(\xi, \theta) + \dots$ — ряды, описывающие по-

граничные слои в окрестности поверхности Ω , уравнение которой в локальной системе координат, введенной в окрестности поверхности Ω_0 известным способом [8], ищется в виде

$$r = \lambda^*(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\lambda_1(\theta) + \varepsilon^2\lambda_2(\theta) + \dots \quad (13)$$

Переменная пограничного слоя ξ определяется равенством: $\xi = (r - \lambda^*(\theta, \varepsilon))\varepsilon^{-1}$.

Построение разложений (12) выполняется в соответствии с алгоритмом из п.2.

Коэффициенты ряда (13) являются решениями конечных уравнений, которые следуют из условия C^1 -сшивания асимптотик (12) на поверхности Ω (подробнее см. [7]):

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - \frac{\partial u^-}{\partial r} \right) \Big|_{r=\lambda^*(\theta, \varepsilon)} &= \left(\frac{\partial Q_0u^+}{\partial \xi}(0, r, \theta) - \frac{\partial Q_0u^-}{\partial \xi}(0, r, \theta) \right) \Big|_{r=\lambda^*(\theta, \varepsilon)} + \\ + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial Q_1u^+}{\partial \xi}(0, r, \theta) - \frac{\partial Q_1u^-}{\partial \xi}(0, r, \theta) \right) \Big|_{r=\lambda^*(\theta, \varepsilon)} &+ \dots \equiv \\ \equiv H(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \varepsilon G_1(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая разложение (13) и представляя каждое слагаемое в уравнении (14) в виде разложения по степеням малого параметра, приходим к уравнению:

$$I(0, \theta) + \varepsilon (\lambda_1 I_r(0, \theta) - \Phi_1(\theta)) + \dots = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) при $\theta \in \Theta_0$ выполнено в нулевом приближении в силу условия (11). Здесь $\Phi_1(\theta)$ — известная функция. С учетом этого, при описании внутреннего слоя в нулевом приближении получаем краевые задачи для системы (9) при $r = 0$ и $\theta \in \Theta_0$ с граничными

условиями вида

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\pm(0, \theta) &= \varphi_2(0, \theta), \quad \tilde{u}^+(+\infty, \theta) = \varphi_3(0, \theta), \\ \tilde{u}^-(-\infty, \theta) &= \varphi_1(0, \theta), \end{aligned}$$

где $\tilde{u}^-(\xi, \theta) = \varphi_1(0, \theta) + Q_0u^-(\xi, \theta)$ при $-\infty < \xi \leq 0$, $\tilde{u}^+(\xi, \theta) = \varphi_3(0, \theta) + Q_0u^+(\xi, \theta)$ при $0 \leq \xi < +\infty$. Решения задач нулевого приближения даются квадратурными формулами и следуют из уравнений (10) при $r = 0$ и $\theta \in \Theta_0$:

$$\xi = \int_{\varphi_2(0, \theta)}^{\tilde{u}^\mp} \frac{d\lambda}{\sqrt{\int_{\varphi_i(0, \theta)}^{\lambda} 2B(s, 0, \theta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 l^k(0, \theta)^2 \int_s^\lambda A(\sigma) d\sigma\right) ds}}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad i = 1, 3.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при ε в уравнении (15), при $\theta \in \Theta_0$ получаем однозначно разрешимое, в силу условия (11), уравнение относительно $\lambda_1(\theta)$.

Требование $I(r, \theta) = 0$ для любой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$ выделяет критический случай. Очевидно, что это условие не позволяет определить поверхность Ω_0 , которая теперь определяется посредством другого уравнения, вытекающего из условия

C^1 -сшивания асимптотик (12) на поверхности Ω . Построение асимптотических разложений (12) выполняется по аналогии с ранее рассмотренным случаем. Отличие состоит в том, что для определения членов ряда (13) получается последовательность линейных дифференциальных задач, разрешимость которых устанавливается (подробнее см. [12]).

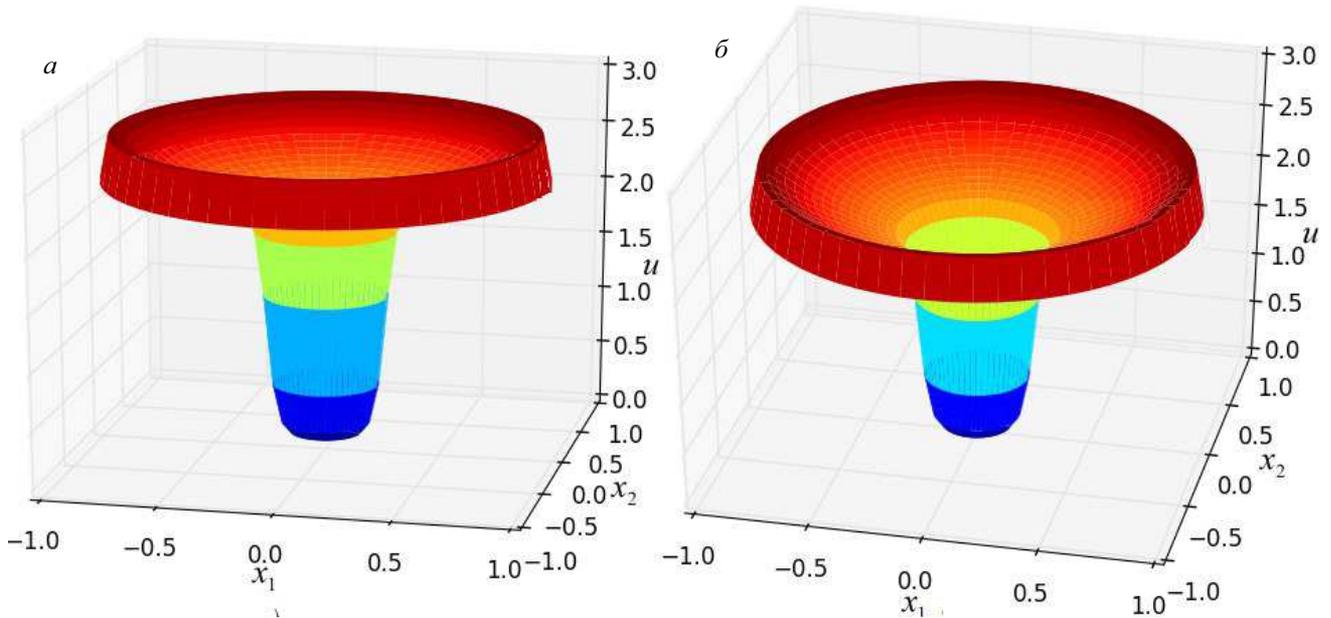


Рис. 1: Численные решения задачи (16) при $a - \varepsilon = 0.1$ и $b - \varepsilon = 0.01$

4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим задачу на плоскости:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (\Delta u - u(\nabla u)^2) &= u(u - 1)(u - x_1^2 - x_2^2 - 2), \\ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 &< 0.81, \\ u(x, \varepsilon) &= 2, \quad (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 0.81. \end{aligned} \tag{16}$$

Вырожденное уравнение

$$u(u - 1)(u - x_1^2 - x_2^2 - 2) = 0$$

имеет три корня $u = 0, u = 1, u = x_1^2 + x_2^2 + 2$. Пусть кривая Ω_0 , в ε - окрестности которой локализован внутренний слой, описывается уравнениями: $x_1 = R \cos \theta, x_2 = R \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, R = \text{const}$. Тогда уравнение относительно R получается с использованием уравнения (11):

$$\int_0^{R^2+2} \eta(\eta - 1)(\eta - R^2 - 2)e^{-\eta^2} d\eta = 0, \quad R > 0.$$

Численное решение этого уравнения дает следующее значение: $R = 0.21$.

Следуя вышеизложенному алгоритму, в нулевом приближении получаем квадратурные формулы, описывающие внутренний слой контрастной структуры

$$\begin{aligned} \int_1^{\tilde{u}^+(\xi)} \frac{d\lambda}{\sqrt{2e^{\lambda^2} \int_0^\lambda \eta(\eta - 1)(\eta - R^2 - 2)e^{-\eta^2} d\eta}} &= \xi, \\ \tilde{u}^-(\xi) &= Q_0 u^-(\xi), \quad \xi \leq 0, \\ \tilde{u}^+(\xi) &= 2.04 + Q_0 u^+(\xi), \quad \xi \geq 0. \end{aligned}$$

и пограничный слой, локализованный в окрестности границы области S

$$\begin{aligned} - \int_2^{\tilde{u}(\rho)} \frac{d\lambda}{\sqrt{2e^{\lambda^2} \int_{2.81}^\lambda \eta(\eta - 1)(\eta - 2.81)e^{-\eta^2} d\eta}} &= \rho, \\ \tilde{u}(\rho) &= 2.81 + \Pi_0 u(\rho), \quad \rho \geq 0. \end{aligned}$$

Численные решения задачи (16) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$ представлены на рис. 1.

На рис. 2 представлены численные решения и соответствующие им асимптотические решения нулевого порядка в сечении некоторой вертикальной плоскостью при различных значениях малого параметра. Рис. 2 демонстрирует улучшение результата, полученного на основе асимптотического анализа, с уменьшением малого параметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существование решений задачи (2) с асимптотиками (4) и (12) обусловлено свойствами нелинейной функции B и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств [11]. В частности, справедлива оценка: $|u(x, \varepsilon) - U(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$, где $U(x, \varepsilon)$ — частичная сумма 0-го порядка ряда (4) или (12), константа C не зависит от ε (подробнее см. [8, 9]).

Если рассмотреть решения с построенными асимптотиками как стационарные решения соответствующих параболических задач, то их устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [11]).

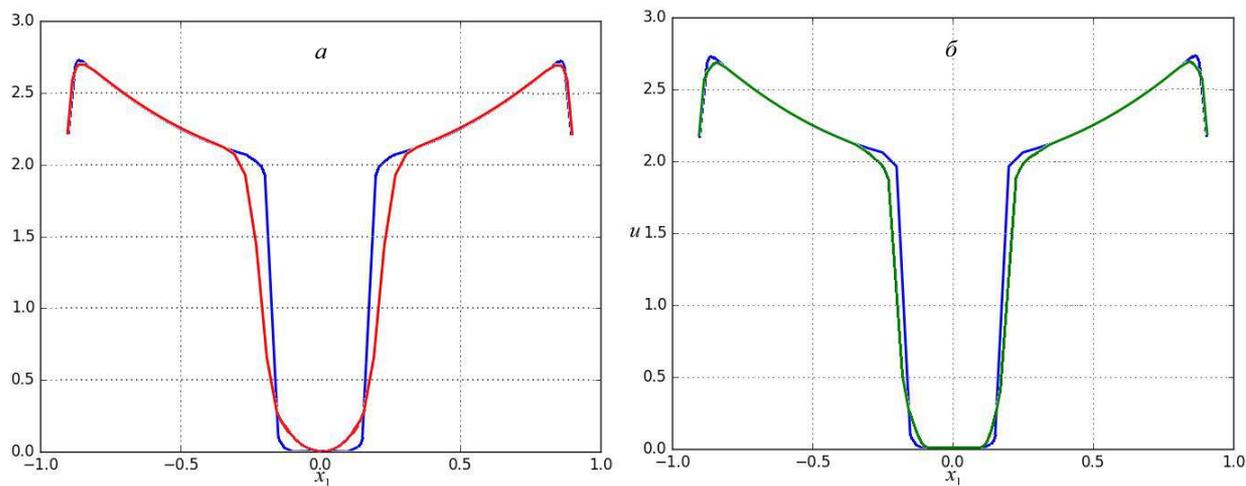


Рис. 2: Численные и асимптотические решения нулевого порядка задачи (16) в сечении вертикальной плоскостью при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$. Синяя линия — численное решение, красная или зеленая линия — асимптотическое решение

Результаты работы могут быть использованы для создания численного алгоритма, который применяет асимптотический анализ с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя решения типа контраст-

ной структуры [13], а также с целью построения тестовых примеров.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10080.

-
- [1] Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. **22**. С. 95.
- [2] Курдюмов С. П. Режимы с обострением. М.: Физматлит, 2006.
- [3] Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007.
- [4] Курдюмов С. П., Гуревич М. И., Тельковская О. В. Дифф. уравн. 1995. **31**, № 10. С. 1722.
- [5] Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. ДАН. 1984. **274**, № 5. С. 1071.
- [6] Куркина Е. С. Прикл. матем. и матем. информат. 2004. № 17. С. 84.
- [7] Davydova M. A., Nefedov N. N. Numerical Analysis and Its Applications, Lecture Notes in Comput. Sci. 2017. **10187**. P. 277.
- [8] Неведов Н. Н., Давыдова М. А. Дифференц. уравнения. 2012. **48**, № 5. С. 738.
- [9] Давыдова М. А. 2015. Мат. заметки. **98**, № 6. С. 853.
- [10] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
- [11] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Неведов Н. Н. Труды Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова, 2010. **268**. С. 268.
- [12] Давыдова М. А., Захарова С. А. Моделирование и анализ информац. систем. 2018. **25**, № 1. С. 83.
- [13] Volkov V. T., Nefedov N. N. Numerical Analysis and Its Applications, Lecture Notes in Comput. Sci. 2013. **8236**. P. 524.

On the one model of the reaction-diffusion-advection type for the nonlinear equation of the heat and mass transfer

M. A. Davydova

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
 E-mail: m.davydova@physics.msu.ru

The present paper is aimed to the investigating of the multidimensional thermal structures in nonlinear incompressible dissipative media with the application of the latest scientific achievements in the asymptotic analysis. The class of the singularly perturbed multidimensional problems of nonlinear heat conduction, to which the asymptotic methods are applicable, has been singled out. We propose the reasonable algorithms for constructing the zero-order asymptotic solutions of the boundary layer type and the zero-order asymptotic solutions of the contrast structures type that describe the thermal structures in nonlinear homogeneous

dissipative media. The use of an effective algorithm allows us to select and describe the transition surface in the neighborhood of which the internal layer of the contrast structure is localized. This approach extends to a more complex, so-called, critical case.

The results of the paper are interpreted and illustrated by the example of a two-dimensional boundary value problem. They can be used to create a numerical algorithm that uses asymptotic analysis to construct spatially inhomogeneous meshes when describing the internal layer of contrast structure, and also for the purpose of constructing the test examples.

PACS: 02.30.Jr

Keywords: nonlinear thermal conductivity, thermal structures in nonlinear dissipative media, singularly perturbed problems of the reaction-diffusion-advection type, solutions with boundary and internal transition layers.

Received 30 June 2018.

Сведения об авторе

Давыдова Марина Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: m.davydova@physics.msu.ru.
