

Об итерационном способе приближённого решения возмущённых уравнений

Е. Е. Букжалёв*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 26.06.2018; Подписана в печать 02.07.2018)

Предложен итерационный подход к исследованию регулярно возмущённых дифференциальных уравнений. С помощью этого подхода построена последовательность, сходящаяся (по норме пространства непрерывных функций) к решению задачи Коши для возмущённого по малому параметру слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (слабая нелинейность означает наличие малого параметра при нелинейном члене). Данная последовательность сходится к решению задачи также и в асимптотическом смысле. Доказательство сходимости (как обычной, так и асимптотической) построенной последовательности и оценка скорости сходимости основаны на теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства.

PACS: 02.30.Nq

УДК: 517.928.1

Ключевые слова: теория возмущений, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье на примере задачи Коши для слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (см. (13)–(14)) иллюстрируется итерационный метод исследования регулярно возмущённых уравнений. Данный метод позволяет построить последовательность $\psi(\varepsilon) = \{\psi_n(\cdot; \varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся (при достаточно малых ε) по норме пространства $C[0, X]$ функций, непрерывных на $[0, X]$, к точному решению $y(\cdot; \varepsilon)$ указанной задачи. Построение и доказательство сходимости последовательности $\psi(\varepsilon)$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [1]). Поскольку при этом коэффициент сжатия $k(\varepsilon)$ отображения оказывается величиной порядка ε , то отклонение $\psi_n(\cdot; \varepsilon)$ от решения $y(\cdot; \varepsilon)$ (под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0, X]$) составляет $O(\varepsilon^{n+1})$, а значит, полученный результат носит также и асимптотический характер.

Каждый следующий элемент последовательности $\psi(\varepsilon)$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае каждая следующая итерация приближается к $y(\cdot; \varepsilon)$ в асимптотически большое (обратно пропорциональное ε) число раз. Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $\psi(\varepsilon)$ относится к классу не только итерационных, но и асимптотических методов исследования возмущённых уравнений. Подобный метод называют асимптотически-итерационным методом или методом асимптотических итераций (см., например, [2] и [3]), а последовательность $\psi(\varepsilon)$ — асимптотической последовательностью решения $y(\cdot; \varepsilon)$ рассматриваемой задачи.

Идея сочетания асимптотического и итерационного подходов не нова. Например, в работах [4, 5] предложен итерационный процесс построения асимптотической последовательности решения задачи Коши для нормальной системы быстрых и медленных уравнений (соответственно с малым параметром при производной и без него). При этом упрощение, достигаемое за счёт применения итерационного асимптотического метода состоит в понижении размерности исследуемой системы. Однако в отличие от данных работ в настоящей статье упрощение связано с линеаризацией исходного дифференциального уравнения. Следует также упомянуть о монографиях [6, 7], в которых асимптотический и итерационный подходы используются для построения сходящихся асимптотических приближений периодических и условно-периодических решений возмущённых уравнений. Отметим, что общим преимуществом итерационных процедур являются сравнительно скромные конечные требования гладкости на входные данные задачи. В случае задачи (13)–(14) для построения всех $\psi_n(\cdot; \varepsilon)$ достаточно выполнения условий (15) на функции a , b и g , в то время как неитерационные подходы, как правило, требуют бесконечной дифференцируемости входных данных.

Настоящая работа продолжает цикл статей, посвящённых применению метода асимптотических итераций к исследованию возмущённых уравнений. Ранее с помощью этого подхода были исследованы задачи Коши для ряда сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений: слабо нелинейного уравнения первого порядка с одним и с двумя малыми параметрами (см. [8] и [9]), линейного и слабо нелинейного уравнений второго порядка (см. [10] и [11]), линейного однородного уравнения произвольного порядка (см. [12]), а также сильно нелинейного уравнения первого порядка (см. [13]). При этом переход от линейных даже к слабо нелинейным уравнениям приводит к возникновению принципиально новых вопросов и проблем и требует значительного роста объёма преобразований.

*E-mail: bukzhalev@mail.ru

1. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Начнём с двух небольших примеров. В качестве первого примера рассмотрим следующую начальную задачу с вещественным параметром ε :

$$y'(x; \varepsilon) = y(x; \varepsilon) + \varepsilon y(x; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

$$y(0; \varepsilon) = 1 \quad (2)$$

(здесь и всюду ниже штрих означает производную по первому аргументу).

Поскольку правая часть уравнения (1) является аналитической функцией y и ε , то по теореме Пуанкаре (см., например, [14]) зависимость решения $y(\cdot; \varepsilon)$ задачи (1), (2) от параметра ε также аналитична, то есть $y(x; \varepsilon)$ может быть представлено в виде сходящегося ряда по степеням ε при каждом $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (3)$$

Впрочем, в данном случае в этом несложно убедиться непосредственно, проинтегрировав задачу (1), (2):

$$y(x; \varepsilon) = e^{(1+\varepsilon)x} = e^x + \varepsilon x e^x + \varepsilon^2 \frac{1}{2} x^2 e^x + \dots \quad (4)$$

Разложение (4) можно получить и без использования точного решения, подставив ряд (3) в уравнения (1) и (2) и приравняв слагаемые с одинаковыми степенями ε в левых и правых частях.

В качестве второго примера рассмотрим ещё одну начальную задачу с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$y'(x; \varepsilon) = y(x; \varepsilon) + \varepsilon e^{-1/\varepsilon^2} y(x; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$y(0; \varepsilon) = 1 \quad (6)$$

(будем считать, что $e^{-1/\varepsilon^2} = 0$ при $\varepsilon = 0$). Поскольку правая часть уравнения (5) неаналитична по ε в точке $\varepsilon = 0$, то и $y(x; \varepsilon)$ не обязано раскладываться в сходящийся (в обычном смысле) ряд по степеням ε при каждом $x \in \mathbb{R}$. И оно на самом деле не раскладывается, в чём несложно убедиться из вида точного решения задачи (5), (6):

$$y(x; \varepsilon) = \exp\{(1 + \varepsilon + \varepsilon e^{-1/\varepsilon^2})x\}.$$

Тем не менее, так как $y(x; \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемо по ε при каждом $x \in \mathbb{R}$ (что, в свою очередь, является следствием бесконечной дифференцируемости по ε правой части уравнения (5)), то при каждом $x \in \mathbb{R}$ можно составить ряд Маклорена для функции $y(x; \cdot)$:

$$y(x; \varepsilon) \sim e^x + \varepsilon x e^x + \varepsilon^2 \frac{1}{2} x^2 e^x + \dots \quad (7)$$

(здесь мы учли, что все производные от e^{-1/ε^2} равны нулю при $\varepsilon = 0$). Ряд (7) сходится в асимптотическом смысле к решению задачи (5), (6) (это значит,

что отклонение n -й частичной суммы ряда от $y(x; \varepsilon)$ составляет $O(\varepsilon^{n+1})$), но при этом не сходится к нему в обычном смысле (за исключением точки $x = 0$), так как последовательности частичных сумм этого ряда стремятся к решению задачи (1), (2) (отличному от решения задачи (5), (6) при всех $x \neq 0$).

Так же как и в случае с задачей (1), (2) разложение (7) можно получить и без использования точного решения путём подстановки ряда (3) в уравнения (5) и (6) с последующим разложением по степеням ε левых и правых частей этих уравнений и приравниванием слагаемых с одинаковыми степенями ε в левых и правых частях.

Теперь применим итерационный подход к построению сходящегося асимптотического разложения решения задачи (5), (6) (под сходящимся асимптотическим разложением функции подразумевается ряд, сходящийся к этой функции как в обычном, так и в асимптотическом смысле). Отбрасывая два последних слагаемых в правой части (5) (то есть полагая $\varepsilon = 0$), приходим к дифференциальному уравнению, общее решение $\bar{y}(\cdot, C)$ которого имеет вид:

$$\bar{y}(x, C) = C e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся методом вариации постоянной, сделав следующую замену переменной в задаче (5), (6):

$$y(x; \varepsilon) = \bar{y}(x, C(x; \varepsilon)) = C(x; \varepsilon) e^x.$$

Для новой функции $C(\cdot; \varepsilon)$ получаем:

$$C'(x; \varepsilon) = \varepsilon C(x; \varepsilon) + \varepsilon e^{-1/\varepsilon^2} C(x; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (8)$$

$$C(0; \varepsilon) = 1. \quad (9)$$

Наша цель — построить ряд по степеням ε (допуская зависимость от ε его коэффициентов), сходящийся к $C(\cdot; \varepsilon)$ как в асимптотическом, так и в обычном смысле, минуя интегрирование задачи (8), (9) (и подразумевая обобщение на случай, когда использование точного решения не представляется возможным). Для реализации этой цели, воспринимая правую часть (8) как известную величину, запишем интегральное уравнение, равносильное задаче (8), (9):

$$C(x; \varepsilon) = 1 + \int_0^x \varepsilon (1 + e^{-1/\varepsilon^2}) C(s; \varepsilon) ds =: \hat{A}(\varepsilon)(C(\cdot; \varepsilon))(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Пусть $C_0(x; \varepsilon) := C(x; 0) \equiv 1$ и для любого натурального n

$$C_n(x; \varepsilon) := \hat{A}(\varepsilon)(C_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) имеем:

$$C_n(x; \varepsilon) = 1 + \varepsilon x (1 + e^{-1/\varepsilon^2}) + \dots + \varepsilon^n \frac{1}{n!} x^n (1 + e^{-1/\varepsilon^2})^n.$$

Несложно видеть, что $C_n(x; \varepsilon)$ представляют собой частичные суммы ряда:

$$1 + \varepsilon x (1 + e^{-1/\varepsilon^2}) + \dots + \varepsilon^n \frac{1}{n!} x^n (1 + e^{-1/\varepsilon^2})^n + \dots, \quad (12)$$

сходящегося к решению

$$C(x; \varepsilon) = \exp\{(\varepsilon + \varepsilon e^{-1/\varepsilon^2})x\}$$

задачи (8), (9) как в обычном, так и в асимптотическом смысле. Умножая члены ряда (12) на e^x , приходим к сходящемуся асимптотическому разложению решения $y(\cdot; \varepsilon)$ задачи (5), (6).

Замечание. Разложение (12) можно получить иначе, определив новый малый параметр $\mu := \varepsilon + \varepsilon e^{-1/\varepsilon^2}$. Однако далеко не для всех неаналитических (и тем более конечно дифференцируемых) правых частей дифференциальных уравнений подобное выделение нового малого параметра возможно, в то время как для применения итерационного подхода достаточно однократной непрерывной дифференцируемости правой части.

2. ПОСТАНОВКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Перейдём к исследованию общего случая — задачи Коши для слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'(x; \varepsilon) = a(x)y(x; \varepsilon) + b(x) + \varepsilon g(y(x; \varepsilon), x; \varepsilon), \quad x \in (0, X]; \quad (13)$$

$$y(0; \varepsilon) = 0, \quad (14)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — параметр возмущения, $X \neq 0$,

$$a, b \in C[0, X], \quad g \in C^{1,0,0}(\mathbb{R} \times [0, X] \times \mathbb{R}). \quad (15)$$

Заметим, что однородность начального условия (14) несколько не ограничивает общности, так как мы всегда можем занулить начальное значение, сделав соответствующую замену переменной (сдвиг на константу).

Отбрасывая последнее слагаемое в правой части (13) (то есть полагая $\varepsilon = 0$), приходим к невозмущённому дифференциальному уравнению:

$$\bar{y}'(x) = a(x)\bar{y}(x) + b(x),$$

общее решение $\bar{y}(\cdot, C)$ которого имеет вид:

$$\bar{y}(x, C) = C \exp \int_0^x a(s) ds + \int_0^x \left[\exp \int_s^x a(t) dt \right] b(s) ds. \quad (16)$$

Воспользуемся методом вариации постоянной, сделав следующую замену переменной в задаче (13), (14):

$$y(x; \varepsilon) = \bar{y}(x, \varepsilon z(x; \varepsilon)). \quad (17)$$

Для новой функции $z(\cdot; \varepsilon)$ получаем:

$$z'(x; \varepsilon) = f(\varepsilon z(x; \varepsilon), x; \varepsilon), \quad x \in [0, X]; \quad (18)$$

$$z(0; \varepsilon) = 0. \quad (19)$$

где

$$f(z, x; \varepsilon) := \left[\exp \int_x^0 a(s) ds \right] g(\bar{y}(x, z), x; \varepsilon). \quad (20)$$

Заметим, что функция f принадлежит тому же классу гладкости, что и функция g .

Задача (18), (19) равносильна интегральному уравнению

$$z(x; \varepsilon) = \int_0^x f(\varepsilon z(s; \varepsilon), s; \varepsilon) ds =: \hat{A}(\varepsilon)(z(\cdot; \varepsilon))(x), \quad x \in [0, X]. \quad (21)$$

Замечание. При каждом фиксированном ε под областью определения оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ подразумевается пространство $C[0, X]$. Очевидно, что $\hat{A}(\varepsilon) : C[0, X] \rightarrow C[0, X]$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Для всякого неотрицательного C обозначим через $O(C)$ замкнутую C -окрестность функции $\vartheta : x \mapsto 0$ в пространстве $C[0, X]$:

$$O(C) := \{z \in C[0, X] \mid \forall x \in [0, X] \ z(x) \in [-C, +C]\},$$

а через $\hat{A}(C, \varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ на $O(C)$ (определение $\hat{A}(\varepsilon)$ см. в (21)).

Утверждение 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geq 0$, что $\hat{A}(C_0, \varepsilon) : O(C_0) \rightarrow O(C_0)$ при каждом $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $C_0 \geq 0$, подействуем оператором $\hat{A}(\varepsilon)$ на произвольную функцию $z \in O(C_0)$ и, учитывая (21), оценим в точке $x \in [0, X]$ получившийся результат (здесь и в доказательстве утверждения 2 для определённости считаем, что $X > 0$):

$$\begin{aligned} \left| \hat{A}(\varepsilon)(z)(x) \right| &\leq \int_0^x |f(\varepsilon z(s), s; \varepsilon)| ds \leq \\ &\leq \{ \|f\|(0, |\varepsilon|) + C_0 |\varepsilon| \|f_z\|(C_0 |\varepsilon|, |\varepsilon|) \} X =: l(C_0, |\varepsilon|), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\|\cdot\|(\delta_1, \delta_2)$ — норма пространства $C([-\delta_1, +\delta_1] \times [0, X] \times [-\delta_2, +\delta_2])$, а индекс z означает производную по первому аргументу.

Из (22) следует, что если

$$l(C_0, |\varepsilon|) \leq C_0, \quad (23)$$

то $\hat{A}(C_0, \varepsilon)(z)(x) := \hat{A}(\varepsilon)(z)(x) \in O(C_0)$, а значит, $\hat{A}(C_0, \varepsilon) : O(C_0) \rightarrow O(C_0)$.

В качестве искомого C_0 можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$C_0 > \|f\|(0, 0) X. \quad (24)$$

Тогда поскольку $l(C_0, \cdot)$ есть неубывающая функция и $l(C_0, 0) < C_0$, то, во-первых, уравнение

$$l(C_0, \varepsilon_0) = C_0 \quad (25)$$

имеет не более одного корня ε_0 , причём ε_0 заведомо больше нуля (в случае отсутствия корней считаем, что $\varepsilon_0 = +\infty$), и, во-вторых, неравенство (23) справедливо при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$. Утверждение доказано.

Далее нам понадобится оценка, являющаяся прямым следствием определения ε_0 :

$$\begin{aligned} \rho(\hat{A}(C_0, \varepsilon)(z_1), \hat{A}(C_0, \varepsilon)(z_2)) &= \max_{x \in [0, X]} |\hat{A}(\varepsilon)(z_2)(x) - \hat{A}(\varepsilon)(z_1)(x)| = \\ &= \max_{x \in [0, X]} \int_0^x |f(\varepsilon z_2(s), s; \varepsilon) - f(\varepsilon z_1(s), s; \varepsilon)| ds \leq \rho(z_1, z_2) |\varepsilon| \|f_z\|(C_0|\varepsilon|, |\varepsilon|) X. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) и (26) вытекает, что при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ для коэффициента сжатия $k(C_0, \varepsilon)$ оператора $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ справедливо:

$$\begin{aligned} k(C_0, \varepsilon) &\leq |\varepsilon| \|f_z\|(C_0|\varepsilon|, |\varepsilon|) X \leq \\ &\leq |\varepsilon| \|f_z\|(C_0|\varepsilon_0|, |\varepsilon_0|) X \leq |\varepsilon|/\varepsilon_0 < 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Утверждение доказано.

Таким образом, к оператору $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ в $O(C_0)$ существует единственное решение $z(\cdot; \varepsilon)$ уравнения (21), равносильного задаче (18), (19). Отметим, что единственность решения $z(\cdot; \varepsilon)$ (при всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$), причём глобальная (то есть единственность в классе $C[0, X]$), на самом деле сразу вытекает из условий гладкости на функции a , b и g (см. (15)), так что содержательным результатом являются лишь существование решения и его принадлежность $O(C_0)$.

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ

Свойство сжимаемости оператора $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $\varphi(\varepsilon) = \{z_n(\cdot; \varepsilon)\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся по норме пространства $C[0, X]$ к точному решению $z(\cdot; \varepsilon)$ задачи (18), (19) при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$:

$$\|z(\cdot; \varepsilon) - z(\cdot; \varepsilon)\| := \max_{x \in [0, X]} |z(x; \varepsilon) - z_n(x; \varepsilon)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon_0 \|f_z\|(C_0\varepsilon_0, \varepsilon_0) X \leq 1. \quad (26)$$

Пусть ρ — стандартная метрика пространства $C[0, X]$:

$$\rho(z_1, z_2) := \|z_2 - z_1\|_{C[0, X]} := \max_{x \in [0, X]} |z_2(x) - z_1(x)|$$

для любых $z_1, z_2 \in C[0, X]$. Заметим, что $C[0, X]$ и $O(C_0)$ с так определённым расстоянием ρ представляют собой полные метрические пространства.

Утверждение 2. $\hat{A}(C_0, \varepsilon)$ — сжимающий оператор при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$.

Доказательство. Возьмём две произвольные функции z_1 и z_2 из $O(C_0)$ и, учитывая (21), оценим расстояние между $\hat{A}(C_0, \varepsilon)(z_1)$ и $\hat{A}(C_0, \varepsilon)(z_2)$:

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0, X]$ (заметим, что для всякого ε'_0 из интервала $(0, \varepsilon_0)$ сходимость будет равномерной по ε на множестве $[-\varepsilon'_0, +\varepsilon'_0]$).

Положим $z_0(x; \varepsilon) \equiv 0$. Поскольку $z(\cdot; \varepsilon) \in O(C_0)$, то

$$\|z(\cdot; \varepsilon) - z_0(\cdot; \varepsilon)\| = \|z(\cdot; \varepsilon)\| \leq C_0. \quad (29)$$

Далее, для любого натурального n положим

$$z_n(x; \varepsilon) := \hat{A}(C_0, \varepsilon)(z_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(x) = \hat{A}(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(x), \quad x \in [0, X]. \quad (30)$$

Тогда, учитывая (28) и (29), для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ имеем:

$$\|z(\cdot; \varepsilon) - z_n(\cdot; \varepsilon)\| \leq k(C_0, \varepsilon)^n \|z(\cdot; \varepsilon) - z_0(\cdot; \varepsilon)\| \leq C_0 (|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n. \quad (31)$$

Вернёмся к задаче (13)–(14) для $y(\cdot; \varepsilon)$. Опираясь на (17) и (16), определим последовательность $\psi(\varepsilon) = \{y_n(\cdot; \varepsilon)\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к решению $y(\cdot; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y_n(x; \varepsilon) &= \bar{y}(x, \varepsilon z_n(x; \varepsilon)) = \\ &= \varepsilon z_n(x; \varepsilon) \exp \int_0^x a(s) ds + \int_0^x \left[\exp \int_s^x a(t) dt \right] b(s) ds, \end{aligned} \quad (32)$$

где $x \in [0, X]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

При $n \geq 1$ элементы $y_n(\cdot; \varepsilon)$ с помощью (32), (30), (21) и (20) могут быть выражены непосредственно через $y_{n-1}(\cdot; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
y_n(x; \varepsilon) &= \bar{y}(x, \varepsilon \hat{A}(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(x)) = \\
&= \varepsilon \int_0^x \left[\exp \int_s^0 a(t) dt \right] g(\bar{y}(s, \varepsilon z_{n-1}(s; \varepsilon)), s; \varepsilon) ds \left[\exp \int_0^x a(s) ds \right] + \int_0^x \left[\exp \int_s^x a(t) dt \right] b(s) ds = \\
&= \int_0^x \left[\exp \int_s^x a(t) dt \right] [b(s) + \varepsilon g(y_{n-1}(s; \varepsilon), s; \varepsilon)] ds =: \hat{B}(\varepsilon)(y_{n-1}(\cdot; \varepsilon))(x).
\end{aligned}$$

Отметим, что $\hat{B}(C_0, \varepsilon) : \tilde{O}(C_0, \varepsilon) \rightarrow \tilde{O}(C_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$ (то есть при тех же ε , что и в утверждении 1), где

$$\begin{aligned}
\tilde{O}(C_0, \varepsilon) &:= \{y \in C[0, X] \mid \forall x \in [0, X] \ y(x) \in \\
&\in [\bar{y}(x, 0) - |\varepsilon| C_0, \bar{y}(x, 0) + |\varepsilon| C_0]\}
\end{aligned}$$

— замкнутая $(|\varepsilon| C_0)$ -окрестность функции

$$\bar{y}(\cdot; 0) : x \mapsto \int_0^x \left[\exp \int_s^x a(t) dt \right] b(s) ds$$

(см. (16)) в пространстве $C[0, X]$, $\hat{B}(C_0, \varepsilon)$ — сужение оператора $\hat{B}(\varepsilon)$ на $\tilde{O}(C_0, \varepsilon)$. Кроме того, оператор $\hat{B}(C_0, \varepsilon)$ является сжимающим при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ (то есть при тех же ε , что и в утверждении 2).

Теорема. Пусть выполнены условия (15) и пусть ε_0 и C_0 удовлетворяют соотношениям (25) и (24). Тогда, во-первых, при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ существует единственное решение $y(\cdot; \varepsilon)$ задачи (13), (14) и,

во-вторых, при любых $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ и $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\|y(\cdot; \varepsilon) - y_n(\cdot; \varepsilon)\| \leq C_0 e^{\|a\|X} |\varepsilon| (|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n.$$

Доказательство. Поскольку существование и единственность решения $y(\cdot; \varepsilon)$ задачи (13)–(14) являются непосредственными следствиями существования и единственности решения $z(\cdot; \varepsilon)$ задачи (18)–(19) (установленных в предыдущем разделе), то нам остаётся только оценить точность, с которой $y_n(\cdot; \varepsilon)$ приближает $y(\cdot; \varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ и $x \in [0, X]$ имеем (см. (17), (16), (32) и (31)):

$$\begin{aligned}
|y(x; \varepsilon) - y_n(x; \varepsilon)| &= |\bar{y}(x, \varepsilon z(x; \varepsilon)) - \bar{y}(x, \varepsilon z_n(x; \varepsilon))| = \\
&= |\varepsilon| |z(x; \varepsilon) - z_n(x; \varepsilon)| \exp \int_0^x a(s) ds \leq \\
&\leq |\varepsilon| \|z(\cdot; \varepsilon) - z_n(\cdot; \varepsilon)\| e^{\|a\|X} \leq C_0 e^{\|a\|X} |\varepsilon| (|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

- [1] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. М., 1998.
- [2] Барашков А. С., Борхаленко В. А. Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 141.
- [3] Копачевский Н. Д., Смолич В. П. Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. Симферополь, 2009.
- [4] Боглаев Ю. П. Докл. АН СССР. 1976. **227**, № 5. С. 1009.
- [5] Боглаев Ю. П., Жданов А. В., Стельмах В. Г. Дифференц. уравнения. 1978. **14**, № 3. С. 395.
- [6] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. Нелинейный анализ и его приложения. М., 1979.
- [7] Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А. Введение в резонансную аналитическую динамику. М.,

1999.

- [8] Букжалёв Е. Е. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2018. № 1. С. 53. (Bukzhalev E. E. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2018. **37**, N 1. P. 53).
- [9] Букжалёв Е. Е. Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2017. № 4.
- [10] Букжалёв Е. Е. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. **57**, № 10. С. 1661.
- [11] Букжалёв Е. Е. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017. № 3. С. 10.
- [12] Букжалёв Е. Е. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2018. **73**, № 2. С. 3.
- [13] Букжалёв Е. Е. Дифференц. уравнения. 2018. **54**, № 2. С. 155.
- [14] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969.

An iterative way for the approximate solution of perturbed equations

E. E. Bukzhalev

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: bukzhalev@mail.ru*

We propose an iterative approach to regularly perturbed differential equations. With this approach we construct a sequence that converges (with respect to the norm of the space of continuous functions) to the solution to the Cauchy problem for a perturbed by a small parameter first-order weakly nonlinear differential equation (weakly nonlinearity means the presence of a small factor in front of the nonlinear term). This sequence also converges to the solution to the problem in the asymptotic sense. The proof of convergence (both the ordinary and the asymptotic) of the sequence constructed and the estimate of the rate of convergence are based on the Banach fixed-point theorem for a contraction mapping of a complete metric space.

PACS: 02.30.Hq

Keywords: perturbation theory, Banach fixed-point theorem, method of asymptotic iterations.

Received 26 June 2018.

Сведения об авторах

Букжалёв Евгений Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bukzhalev@mail.ru.
