Волновые функции нейтрино в веществе

А. Е. Лобанов,* А. В. Чухнова†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 08.07.2018; Подписана в печать 20.08.2018)

Исследованы решения уравнения, описывающего в рамках квантовой теории поля эволюцию нейтрино, взаимодействующего с однородной плотной средой. В модели двух флейворов получен явный вид функции Грина и, как следствие, закон дисперсии нейтрино в среде. Найдены решения, описывающие как стационарные состояния, так и спин–флейворные когерентные состояния нейтрино. Показано, что стационарные состояния нейтрино в веществе отличны от массовых, а волновую функцию состояния с определенным флейвором можно построить как суперпозицию волновых функций стационарных состояний, коэффициенты которой определяются углом смешивания в веществе.

PACS: 12.15.-y, 13.15.+g, 14.60.Pq. УДК: 530.22, 539.120.7.
Ключевые слова: стандартная модель, спин–флейворные осцилляции нейтрино.

ВВЕДЕНИЕ

Феноменологическая теория, основанная на идеях Б. Понтекорво [1] и З. Маки и др. [2], хорошо описывает основные закономерности осцилляций нейтрино, наблюдаемые экспериментально. Так как эта теория изначально разработана для описания только нейтрино высоких энергий, для низкоэнергетических нейтрино (например, реликтовых, которые играют важную роль во многих космологических моделях) она не работает. Для наиболее полного описания поведения нейтрино необходима теория, которая, во-первых, будет применима для нейтрино низких энергий, а, во-вторых, в пределе высоких энергий дает те же результаты, что и феноменологический подход.

Такое описание нейтрино можно произвести на основе модификации Стандартной модели, предложенной в работах [3, 4], в которой фермионы разных поколений объединены в $SU(3)$–мультиплеты и рассматриваются как различные квантовые состояния одной частицы. Указанная модификация позволяет построить пространство Фока для нейтрино математически корректным образом, что в свою очередь позволяет на основе разложения Дайсона находить вероятности процессов с участием нейтрино в рамках теории возмущений в представлении взаимодействия. Смешивание нейтрино в этой модели возникает автоматически, а осцилляционные формулы являются следствием зависимости вероятностей обнаружения нейтрино различных флейворов от расстояния до источника, вычисленных с помощью методов квантовой теории поля.

Как хорошо известно [5], при распространении в веществе нейтрино испытывает упругое рассеяние вперед на фермионах среды. Это взаимодействие меняет картину флейворных осцилляций. В частности, оно приводит к эффекту Михеева–Смирнова–Вольфенштейна [6], который может быть использован для объяснения дефицита солнечных нейтрино [7]. Если среда движется относительно наблюдателя или поляризована, то возникают так называемые спиновые осцилляции — изменение спиральности нейтрино [8].

В работе [9] предложен способ описания взаимодействия нейтрино со средой на основе упомянутой выше модификации Стандартной модели. Полученное в данной работе эффективное уравнение, описывающее эволюцию нейтрино в среде, состоящей из протонов, нейтронов и электронов, выглядит следующим образом:

$$\Big(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbb{M} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu} f^{(e)}_{\mu}(1+\gamma^{5})\mathbb{P}^{(e)} - \\ - \frac{1}{2}\gamma^{\mu} f_{\mathrm{N}\mu}(1+\gamma^{5})\,\mathbb{I}\Big)\,\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица 3×3, $\mathbb{M}$ — эрмитова массовая матрица нейтринного мультиплета, которую можно представить как

$$\mathbb{M} = \sum_{l=1}^{3} m_l \mathbb{P}^{(l)}. \quad (2)$$

Здесь m_l — собственные значения массовой матрицы, имеющие смысл масс компонентов мультиплета, а матрицы $\mathbb{P}^{(l)}$ — ортогональные проекторы на подпространства с этими массами. Матрица $\mathbb{P}^{(e)}$ — проектор на состояние нейтрино с электронным флейвором. В уравнении (1) произведение матриц Дирака и матриц $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}^{(e)}$ определено как тензорное произведение указанных матриц.

В низшем порядке теории возмущений эффективные потенциалы взаимодействия с веществом через заряженные $(f^{\mu}_{(e)})$ и нейтральные (f^{μ}_{N}) токи выражаются через 4-векторы тока $j^{\mu}_{(i)}$ и поляризации $\lambda^{\mu}_{(i)}$

*E-mail: lobanov@phys.msu.ru
†E-mail: av.chukhnova@physics.msu.ru

компонент среды $(i) = (e, p, n)$ следующим образом:

$$f^{\mu}_{(e)} = \sqrt{2}G_F(j^{\mu}_{(e)} - \lambda^{\mu}_{(e)}), \tag{3}$$

$$f^{\mu}_N = \sqrt{2}G_F \sum_{i=e,p,n} (j^{\mu}_{(i)}(T^{(i)} - 2Q^{(i)}\sin^2\theta_W) - \lambda_{(i)}T^{(i)}). \tag{4}$$

В этих формулах G_F — постоянная Ферми, $T^{(i)}$ и $Q^{(i)}$ — проекция слабого изоспина и заряд фермионов среды, соответственно, θ_W — угол Вайнберга. Необходимо отметить, что уравнение (1) возникает как следствие редукции массового оператора нейтрино в среде, поэтому существует ограничение на область его применимости по энергиям сверху [9]. Однако это уравнение адекватно описывает поведение нейтрино произвольно низких энергий.

В модели трех флейворов волновая функция $\Psi(x)$ представляет собой 12-компонентный объект. При этом удобно ввести блочную структуру, определяя этот объект как тройку дираковских биспиноров $\psi_i(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В этом случае γ–матрицы действуют на компоненты дираковских биспиноров, а действие матриц $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}^{(e)}$ на $\Psi(x)$ сводится к перестановке биспиноров $\psi_i(x)$.

Как и в случае γ–матриц в обычном уравнении Дирака, матрицы $\mathbb{M}$ и $\mathbb{P}^{(e)}$, действующие на векторы в пространстве флейворов, могут быть записаны в различных представлениях, связанных унитарным преобразованием. Мы будем называть массовым представлением такое представление, в котором массовая матрица диагональна.

В модели двух флейворов матрицы $\mathbb{M}$ и $\mathbb{P}^{(e)}$ имеют размерность 2×2 и выражаются через матрицы Паули. Соответственно волновая функция $\Psi(x)$ представляет собой 8-компонентный объект. В этом случае массовую матрицу и проектор на электронное состояние в массовом представлении можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_0(m_1 + m_2) - \sigma_3(m_2 - m_1)), \\ \mathbb{P}^{(e)}_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_1 \sin 2\theta + \sigma_3 \cos 2\theta), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ — матрицы Паули, σ_0 — единичная матрица 2×2, θ — вакуумный угол смешивания.

Флейворным представлением будем называть такое представление, в котором проекторы на флейворные состояния диагональны. Переход от массового представления к флейворному осуществляется с помощью преобразования

$$\mathbb{M} = U\mathbb{M}_0U^{\dagger}, \qquad \mathbb{P}^{(e)} = U\mathbb{P}^{(e)}_0U^{\dagger}, \tag{7}$$

где U — матрица смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты, которая в модели двух флейворов записывается следующим образом

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тогда в флейворном представлении массовая матрица и проектор на электронное состояние имеют вид:

$$\begin{gathered} \mathbb{M} = \frac{1}{2}(\sigma_0(m_1 + m_2) - (\sigma_3 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta)(m_2 - m_1)), \\ \mathbb{P}^{(e)} = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3). \end{gathered} \tag{9}$$

Любое решение уравнения (1) является волновой функцией, описывающей некоторое состояние нейтрино. Будем называть массовыми состояниями нейтрино такие состояния, волновые функции которых $\Psi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ в любой пространственно-временной точке в массовом представлении имеют вид

$$\begin{gathered} \Psi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{10}$$

Будем называть состояниями с определенным флейвором в данной пространственно-временной точке такие состояния, волновые функции которых $\tilde{\Psi}_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ в этой точке во флейворном представлении принимают вид

$$\begin{gathered} \tilde{\Psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Psi}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Psi}_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi}_3(x) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{11}$$

Следует подчеркнуть, что при нетривиальном эффективном потенциале (3) массовая матрица не коммутирует с оператором уравнения (1). Поэтому, в отличие от вакуумного случая, решения этого уравнения не могут иметь вид (10). Следовательно, при наличии взаимодействия со средой через заряженные токи нейтрино не может находиться в массовом состоянии.

1. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Исследуем поведение нейтрино в однородной среде. Будем считать, что среда неполяризована и скорости всех ее компонент одинаковы. Тогда эффективные потенциалы взаимодействия с веществом через заряженные и нейтральные токи пропорциональны

$$f^{\mu}_{(e)} = f^{\mu} = \text{const}, \qquad f^{\mu}_N = af^{\mu} = \text{const}. \tag{12}$$

Коэффициент пропорциональности a зависит от плотностей $n^{(i)}$ компонентов среды следующим образом

$$a = \sum_{i=e,p,n} \frac{n^{(i)}}{n^{(e)}} (T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_{\mathrm{W}}). \qquad (13)$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu (1+\gamma^5)(a\mathbb{I} + \mathbb{P}^{(e)}) - \mathbb{M} \right) \Psi(x) = 0. \qquad (14)$$

В импульсном представлении

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu (1+\gamma^5)(a\mathbb{I} + \mathbb{P}^{(e)}) - \mathbb{M} \right) \Psi(p) = 0, \qquad (15)$$

где p^μ — канонический импульс нейтрино. Найдем функцию Грина этого уравнения. Введем операторы

$$H_\mp(p) = \left(\gamma^\mu p_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu (1+\gamma^5)(a\mathbb{I} + \mathbb{P}^{(e)}) \mp \mathbb{M} \right), \qquad (16)$$

которые отличаются знаком перед массовой матрицей. Так как функция Грина представляет собой обратный оператор к оператору уравненения (15), она может быть записана в виде

$$G(p) = (H_-(p))^{-1}. \qquad (17)$$

Чтобы устранить матрицы в знаменателе этого выражения, используем процедуру квадрирования.

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что

$$H_-(p)H_+(p) = p^2 - ((pf) - R\mathcal{S})(a\mathbb{I} + \mathbb{P}^{(e)}) - \\ - \mathbb{M}^2 - \frac{1}{2}\gamma^\mu f_\mu (1+\gamma^5)[\mathbb{P}^{(e)}, \mathbb{M}], \qquad (18)$$

где $R = \sqrt{(fp)^2 - f^2 p^2}$. В соотношение (18) входит оператор

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2R}\gamma^5 (\gamma^\mu f_\mu \gamma^\nu p_\nu - \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu f_\mu), \qquad (19)$$

который определяет проекцию спина нейтрино на его канонический импульс в системе отсчета, в которой среда покоится. Так как $\mathcal{S}^2 = 1$, оператор $\mathcal{S}$ имеет собственные значения $\zeta = \pm 1$. Поскольку оператор (19) коммутирует с оператором, определяющим вид уравнения (15)

$$[\mathcal{S}, H_\mp(p)] = 0, \qquad (20)$$

то выражение для функции Грина можно записать следующим образом:

$$G(p) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta=\pm 1} H_+(p) \left(H_-(p) H_+(p) \right)^{-1} (1 + \zeta\mathcal{S}). \qquad (21)$$

Дальнейшие преобразования для случая трех флейворов крайне громоздки, поэтому мы ограничимся моделью двух флейворов. Тогда во флейворном представлении для $\mathbb{M}$ и $\mathbb{P}^{(e)}$ имеем (для упрощения записи опускаем единичную матрицу σ_0)

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2}((m_1 + m_2) - (m_2 - m_1)(\sigma_3 \cos 2\theta - \\ - \sigma_1 \sin 2\theta)), \qquad (22)$$

$$\mathbb{P}^{(e)} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3), \qquad (23)$$

$$[\mathbb{P}^{(e)}, \mathbb{M}] = \frac{\mathrm{i}}{2}(m_2 - m_1)\sigma_2 \sin 2\theta, \qquad (24)$$

$$\mathbb{M}^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \\ - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2}(\sigma_3 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta). \qquad (25)$$

Введем операторы (см. (18))

$$F_\pm(p,\zeta) = p^2 - ((pf) - R\zeta)\left(a + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sigma_3 \right) - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \pm \\ \pm \frac{m_2^2 - m_1^2}{2}(\sigma_3 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta) \mp \frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^\mu f_\mu (1+\gamma^5)(m_2 - m_1)\sigma_2 \sin 2\theta, \qquad (26)$$

которые отличаются только знаками перед всеми матрицами Паули. Легко убедиться, что произведение этих операторов

$$D(p,\zeta) = F_+(p,\zeta)F_-(p,\zeta) = \left(p^2 - ((pf) - R\zeta)\left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \right)^2 - \\ - \left(\frac{((pf) - R\zeta)}{2} - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2}\cos 2\theta \right)^2 - \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \sin 2\theta \right)^2 \qquad (27)$$

пропорционально единичной матрице.

Используя соотношение (27), можно убрать матрицы в знаменателе выражения для функции Грина. В результате получаем

$$G(p) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}\frac{H_+(p)F_-(p,\zeta)}{D(p,\zeta)}(1+\zeta\mathcal{S}), \tag{28}$$

где выражение для $H_+(p)$ записано во флейворном представлении матриц $\mathbb{M}$ и $\mathbb{P}^{(e)}$, то есть с учетом (22), (23).

Соответственно в координатном представлении мы имеем

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-\mathrm{i}((p(x-y))}\times \\ \times\frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}\frac{H_+(p)F_-(p,\zeta)}{D(p,\zeta)}(1+\zeta\mathcal{S}). \tag{29}$$

Полюсы функции Грина в импульсном представлении, то есть решения уравнения

$$D(p,\zeta) = 0, \tag{30}$$

отвечают собственным значениям оператора Гамильтона, описывающего нейтрино в однородной движущейся среде. То есть уравнение (30) определяет закон дисперсии нейтрино. Это уравнение представляет собой уравнение четвертой степени. Его решения можно явно найти в радикалах, однако вполне можно ограничиться приближенными выражениями, так как, во-первых, решения этого уравнения имеют весьма громоздкий вид, а во-вторых, для более реалистичного случая трех флейворов получается уравнение шестой степени, которое в радикалах уже не разрешимо.

Очевидно, что уравнение (30) сохраняет свой вид при замене $p^\mu \to -p^\mu, f^\mu \to -f^\mu$, что соответствует переходу от нейтрино к антинейтрино. Таким образом, два его решения задают законы дисперсии для нейтрино, а два других — для антинейтрино. Следовательно, можно записать

$$D(p,\zeta) = (p^0-\varepsilon_+(\mathbf{p},\zeta))(p^0-\varepsilon_-(\mathbf{p},\zeta))\times \\ \times(p^0+\bar\varepsilon_+(\mathbf{p},\zeta))(p^0+\bar\varepsilon_-(\mathbf{p},\zeta)), \tag{31}$$

где $\varepsilon_\pm$ определяют энергии нейтрино, а $\bar\varepsilon_\pm$ — энергии антинейтрино. При этом энергии нейтрино и антинейтрино связаны следующим образом $\bar\varepsilon_\pm(\mathbf{p},\zeta,f) = \varepsilon_\pm(-\mathbf{p},\zeta,-f)$.

Следует обратить внимание на то, что корни уравнения (30) нетривиально зависят от параметра a, поэтому не только выражения для энергий нейтрино или антинейтрино, но и выражение для их разности зависят от вклада взаимодействия со средой через нейтральные токи.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Используя выражение для функции Грина, можно получить стационарный базис пространства решений уравнения (30). Элементы этого базиса для положительночастотных решений имеют вид (мы используем нормировку на одну частицу в единице объема)

$$\Psi^\pm_{\mathbf{p},\zeta}(x) = \int dp^0 e^{-\mathrm{i}(px)}\delta(p^0-\varepsilon_\pm(\mathbf{p},\zeta))\times \\ \times\frac{(p^0-\varepsilon_\pm(\mathbf{p},\zeta))H_+(p)F_-(p,\zeta}{D(p,\zeta)}\Psi_0(\zeta). \tag{32}$$

Здесь

$$\Psi_0(\zeta) = \psi(\zeta)\otimes e_\pm, \quad \bar\Psi_0(\zeta)\Psi_0(\zeta) = 1, \tag{33}$$

где $\psi(\zeta)$ — биспинор, являющийся собственным вектором оператора проекции спина $\mathcal{S}$ с собственным значением ζ, а $e_\pm$ — произвольные ортогональные единичные векторы в двумерном векторном пространстве над полем комплексных чисел. Аналогично можно выписать и элементы базиса для решений с отрицательной частотой.

К сожалению, выражение (32) весьма громоздко. Чтобы получить представление о явном виде решений, рассмотрим поведение нейтрино в неподвижной неполяризованной среде, когда $f^\mu = \{f_0,0,0,0\}$. В этом случае оператор проекции спина $\mathcal{S}$ не зависит от эффективных потенциалов и совпадает с оператором спиральности

$$\mathcal{S} = \gamma^5\frac{\gamma^\mu f_\mu\gamma^\nu p_\nu - \gamma^\nu p_\nu\gamma^\mu f_\mu}{2R} \to \frac{(\mathbf{\Sigma p})}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{\Sigma} = \gamma^5\boldsymbol{\gamma}\gamma^0. \tag{34}$$

То есть при распространении нейтрино в неподвижной неполяризованной среде сохраняется его спиральность, вследствие чего вид решений значительно упрощается.

Не обращаясь к формуле (32), будем искать стационарные решения уравнения (14) в виде

$$\Psi(x) = e^{-\mathrm{i}(px)}\Psi_0(p), \tag{35}$$

где компонента 4-импульса p^0 представляет собой энергию, а $\mathbf{p}$ — канонический импульс нейтрино. Поскольку спиральность нейтрино сохраняется, то не зависящий от координат пространства событий 8-компонентный объект $\Psi_0(p)$ представляет собой собственный вектор оператора спиральности, отвечающий одному из собственных значений $\zeta = \pm1$ ($\zeta = -1$ для левополяризованного нейтрино, $\zeta = 1$ для правополяризованного).

Алгебраическое уравнение для $\Psi_0(p)$ следует из уравнения (15) и в массовом представлении выглядит так:

$$\left(\gamma^0 p_0 - \gamma^0\gamma^5\zeta|\mathbf{p}| - \frac{1}{2}f_0\gamma^0(1+\gamma^5)\left(a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_3\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sigma_1\sin 2\theta\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{m_1+m_2}{2} + \frac{m_2-m_1}{2}\sigma_3\right)\Psi_0(p) = 0. \quad (36)$$

При этом 8-компонентные волновые функции имеют вид:

$$\Psi_0(p) = \begin{pmatrix} A_1^\zeta\chi_\zeta \\ A_2^\zeta\chi_\zeta \\ B_1^\zeta\chi_\zeta \\ B_2^\zeta\chi_\zeta \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Здесь χ_ζ — трехмерный спинор, описывающий частицу со спином, направленным вдоль канонического импульса

$$\chi_\zeta = \begin{pmatrix} \chi_\zeta^1 \\ \chi_\zeta^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{(\sigma\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}\chi_\zeta = \zeta\chi_\zeta. \quad (38)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в стандартном представлении γ–матриц. Из уравнения (36) следует система алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_1^\zeta, A_2^\zeta, B_1^\zeta, B_2^\zeta$

$$\begin{pmatrix} p^0 - m_1 - f_{c+} & -\zeta|\mathbf{p}| + f_{c+} & -f_s & f_s \\ \zeta|\mathbf{p}| - f_{c+} & -(p^0+m_1) + f_{c+} & -f_s & f_s \\ -f_s & f_s & p^0 - m_2 - f_{c-} & -\zeta|\mathbf{p}| + f_{c-} \\ -f_s & f_s & \zeta|\mathbf{p}| - f_{c-} & -(p^0+m_2) + f_{c-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^\zeta \\ A_2^\zeta \\ B_1^\zeta \\ B_2^\zeta \end{pmatrix} = 0, \quad (39)$$

где

$$f_{c\pm} = \frac{f_0}{2}\left(a + \frac{1}{2} \pm \frac{\cos 2\theta}{2}\right), \qquad f_s = \frac{f_0}{4}\sin 2\theta. \quad (40)$$

Система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|)^2 + 2\left(\zeta|\mathbf{p}| - \frac{f_0}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)\right)(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|) - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} = \frac{\xi}{2}\Delta, \quad (41)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(f_0(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|) - (m_2^2 - m_1^2)\cos 2\theta)^2 + (m_2^2 - m_1^2)^2\sin^2 2\theta}, \quad (42)$$

а ξ принимает значения либо 1, либо -1.

Коэффициенты $A_1^\zeta, A_2^\zeta, B_1^\zeta, B_2^\zeta$ определяются системой (39) с точностью до множителя N

$$\begin{gathered} Np^0A_1^\zeta = f_s(p^0 - \zeta|\mathbf{p}| + m_1)(p^0 - \zeta|\mathbf{p}| - m_2), \\ Np^0A_2^\zeta = -f_s(p^0 - \zeta|\mathbf{p}| - m_1)(p^0 - \zeta|\mathbf{p}| - m_2), \\ Np^0B_1^\zeta = 2f_s^2(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|) + \frac{1}{2}(\zeta|\mathbf{p}| - f_{c-})\big(m_1^2 - m_2^2 - \xi\Delta + f_0\cos 2\theta(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|)\big), \\ Np^0B_2^\zeta = 2f_s^2(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|) + \frac{1}{2}(p^0 - m_2 - f_{c-})\big(m_1^2 - m_2^2 - \xi\Delta + f_0\cos 2\theta(p^0 - \zeta|\mathbf{p}|)\big), \end{gathered} \quad (43)$$

который выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие нормировки

$$(A_1^\zeta)^2 + (A_2^\zeta)^2 + (B_1^\zeta)^2 + (B_2^\zeta)^2 = 1. \quad (44)$$

Для нейтрино ультрарелятивистских энергий $p^0 \gg m_i$ и сред не слишком высокой плотности, когда $f_0 \ll p^0$, формулы (43) существенно упрощаются. В случае левополяризованных нейтрино ($\zeta = -1$) имеем

$$\begin{aligned} NA_1^\zeta &= \quad f_0 p^0 \sin 2\theta, \\ NB_1^\zeta &= -\frac{1}{2}(-\xi\Delta + m_1^2 - m_2^2 + 2f_0p^0\cos 2\theta), \\ NA_2^\zeta &= -f_0 p^0 \sin 2\theta, \\ NB_2^\zeta &= \quad \frac{1}{2}(-\xi\Delta + m_1^2 - m_2^2 + 2f_0p^0\cos 2\theta). \end{aligned} \tag{45}$$

Используя условие (44), для левополяризованных нейтрино получаем решения, нормированные на одну частицу в единицу объема, вида

$$\begin{aligned} \Psi_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_- \sin\phi_+ \\ -\chi_- \sin\phi_+ \\ \chi_- \cos\phi_+ \\ -\chi_- \cos\phi_+ \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_+ t - \mathbf{px})}, \\ \Psi_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_- \cos\phi_- \\ -\chi_- \cos\phi_- \\ -\chi_- \sin\phi_- \\ \chi_- \sin\phi_- \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_- t - \mathbf{px})}, \end{aligned} \tag{46}$$

где $\varepsilon_\pm$ — энергии нейтрино, определяемые решениями уравнения (41) при $\xi = \pm 1$. В формулах (46) углы $\phi_\pm$ введены следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin 2\phi_\pm &= \frac{2f_0p^0\sin 2\theta}{\sqrt{(2f_0p^0\sin 2\theta)^2 + (2f_0p^0\cos 2\theta - (m_2^2 - m_1^2))^2}}, \\ \cos 2\phi_\pm &= \frac{(m_2^2 - m_1^2) - 2f_0p^0\cos 2\theta}{\sqrt{(2f_0p^0\sin 2\theta)^2 + (2f_0p^0\cos 2\theta - (m_2^2 - m_1^2))^2}}, \end{aligned} \tag{47}$$

где $p^0 = \varepsilon_\pm$. Чтобы удовлетворить требованию ортогональности при расчетах с выбранной точностью, необходимо считать $\phi_+ = \phi_- = \phi$, положив в (47) $p^0 = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$.

Из выражения (46) видно, что, как указывалось ранее, стационарные состояния нейтрино в веществе в модели двух флейворов не являются массовыми, и становятся таковыми в пределе малой плотности среды $f_0 \to 0$. В этом случае волновые функции определяются формулами

$$\begin{aligned} \Psi_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_+ t - \mathbf{px})}, \\ \Psi_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_- t - \mathbf{px})}, \end{aligned} \tag{48}$$

которые описывают массовые состояния в вакууме.

Переход к флейворному представлению задается с помощью матрицы смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты U (см. (8)) следующим образом: $\tilde{\Psi}(x) = U\Psi(x)$. В этом представлении стационарные решения имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_- \sin\theta_m \\ -\chi_- \sin\theta_m \\ \chi_- \cos\theta_m \\ -\chi_- \cos\theta_m \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_+ t - \mathbf{px})}, \\ \tilde{\Psi}_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_- \cos\theta_m \\ -\chi_- \cos\theta_m \\ -\chi_- \sin\theta_m \\ \chi_- \sin\theta_m \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon_- t - \mathbf{px})}, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\theta_m = \theta + \phi$ — эффективный угол смешивания в веществе, который, как известно (см. [5]), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_m &= \frac{(m_2^2 - m_1^2)\sin 2\theta}{\sqrt{(2f_0p^0\sin 2\theta)^2 + (2f_0p^0\cos 2\theta - (m_2^2 - m_1^2))^2}}, \\ \cos 2\theta_m &= \frac{(m_2^2 - m_1^2)\cos 2\theta - 2f_0p^0}{\sqrt{(2f_0p^0\sin 2\theta)^2 + (2f_0p^0\cos 2\theta - (m_2^2 - m_1^2))^2}}. \end{aligned} \tag{50}$$

Очевидно, что волновую функцию состояния с определенным флейвором следует строить как линейную комбинацию стационарных состояний (49) с коэффициентами, которые определяются эффективным углом смешивания в веществе.

Правополяризованные нейтрино в ультрарелятивистском пределе описываются вакуумными волновыми функциями, то есть их вид в массовом представлении определяется формулой (48), в которой надо произвести замену $\chi_- \to \chi_+$.

Полученный закон дисперсии (см. (27), (28)) обобщает результаты работ [10–13] на случай двух флейворов. Однако следует отметить, что закон дисперсии (41) для нейтрино, распространяющегося в неподвижной неполяризованной среде в модели двух флейворов, был найден еще в работе [14] из эвристических соображений.

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ СПИН–ФЛЕЙВОРНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как показано в [3, 4], полный интеграл уравнения, описывающего фермионный мультиплет, зависит от пяти квантовых чисел. Поэтому, когда в качестве трех квантовых чисел выбираются собственные значения операторов с непрерывным спектром, даже в том случае, когда 4–векторы тока и поляризации не зависят от координат пространства событий, уравнение (14) может иметь решения различных типов.

Так, наряду с решениями, характеризующимися определенным значением канонического импульса, можно найти и решения, характеризующиеся определенными значениями кинетического импульса и описывающие состояния, в которых все компоненты нейтринного мультиплета распространяются с одинаковыми постоянными скоростями. Эти решения мы будем называть волновыми функциями спин–флейворных когерентных состояний.

Используя метод, который был развит в работах [15, 16], резольвенту уравнения (14) можно записать в виде матричной экспоненты. С помощью резольвенты $U(x)$ решение, характеризующееся кинетическим импульсом нейтрино q^μ, записывается так:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}}\,U(x)\Psi_0, \tag{51}$$

где постоянный 12-ти компонентный объект имеет вид

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}(1-\gamma^5\gamma_\mu s_0^\mu)(\gamma_\mu q^\mu + m)\left(\psi^0\otimes e_j\right), \quad \bar\Psi_0\Psi_0 = 2m. \tag{52}$$

Здесь ψ^0 — постоянный биспинор, e_j — произвольный единичный вектор в трехмерном векторном пространстве над полем комплексных чисел, а s_0^μ — 4-вектор поляризации нейтрино, удовлетворяющий условию $(qs_0) = 0$. Кинетический импульс нейтрино связан с его 4-скоростью u^μ следующим образом $q^\mu = mu^\mu$, где m — величина, имеющая размерность массы, которая определяется вакуумным ожиданием поля Хиггса. Поэтому квадрат кинетического импульса определяется выражением $q^2 = m^2$.

Опуская вычисления, идею которых можно найти в [16], сразу приведем выражение для резольвенты в случае неполяризованной среды:

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}\exp\left\{-\mathrm{i}\left(\frac{(qx)}{m}\mathbb{M} + \frac{1}{2}\big((fx)-\zeta\mathcal{R}\big)\left(a\mathbb{I}+\mathbb{P}^{(e)}\right)\right)\right\}(1-\gamma^5\gamma_\mu s^\mu). \tag{53}$$

В выражении (53) использованы обозначения

$$\mathcal{R} = \frac{(fx)(fq)-(qx)f^2}{\sqrt{(fq)^2-f^2q^2}}, \qquad s^\mu = \frac{q^\mu(fq)-f^\mu q^2}{m\sqrt{(fq)^2-f^2q^2}}. \tag{54}$$

В модели двух флейворов можно записать явный вид матричной экспоненты. Тогда в массовом представлении резольвента выглядит следующим образом:

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}\exp\left\{-\mathrm{i}\left(\frac{(qx)}{2m}(m_1+m_2) + \frac{1}{2}\big((fx)-\zeta\mathcal{R}\big)\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{Z_\zeta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{Z_\zeta}{2}\,(X_\zeta\sigma_1 + Y_\zeta\sigma_3)\right)(1-\gamma^5\gamma_\mu s^\mu), \tag{55}$$

где

$$
\begin{aligned}
X_\zeta &= \frac{1}{Z_\zeta}\left(\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\sin\theta\right),\\
Y_\zeta &= \frac{1}{Z_\zeta}\left(\frac{(qx)}{m}(m_2-m_1)-\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\cos\theta\right),\\
Z_\zeta &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\sin\theta\right)^2+\left(\frac{(qx)}{m}(m_2-m_1)-\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\cos\theta\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Во флейворном представлении резольвента принимает вид

$$
\tilde{U}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}\exp\left\{-\mathrm{i}\left(\frac{(qx)}{2m}(m_1+m_2)+\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\times
\times\left(\cos\frac{Z_\zeta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{Z_\zeta}{2}\left(\tilde{X}_\zeta\sigma_1-\tilde{Y}_\zeta\sigma_3\right)\right)(1-\gamma^5\gamma_\mu s^\mu), \tag{57}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_\zeta &= \frac{1}{Z_\zeta}\left(\frac{(qx)}{m}(m_2-m_1)\sin 2\theta\right),\\
\tilde{Y}_\zeta &= \frac{1}{Z_\zeta}\left(\frac{(qx)}{m}(m_2-m_1)\cos 2\theta-\frac{1}{2}((fx)-\zeta\mathcal{R})\right).
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Существенно, что решения, определяемые резольвентами (56), (57), не являются плосковолновыми.

Рассмотрим ультрарелятивистский предел полученных решений. Так как для ультрарелятивистских частиц длина волны де Бройля мала, можно использовать квазиклассическое описание, если трактовать x^μ не как координаты пространства событий, а как координаты нейтрино. Это позволяет произвести замену $x^\mu = \tau q^\mu/m$, то есть считать, что нейтринный мультиплет движется с постоянной скоростью, и эволюция нейтрино характеризуется единственным параметром — его собственным временем τ, которое связано с длиной пробега L соотношением $\tau = mL/|\mathbf{q}|$. При этом решение, определяемое резольвентой (57), переходит в решение квазиклассического уравнения, полученного в работе [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе результаты могут служить основой для последовательного квантовополевого описания процессов флейворных осцилляций нейтрино и поворота его спина в веществе.

Авторы выражает благодарность А. В. Борисову, И. П. Волобуеву и В. Ч. Жуковскому за полезные обсуждения.

А. В. Чухнова также выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС», стипендиантом которого является.

[1] *Понтекорво Б.* ЖЭТФ. 1957. **33**, № 2. С. 549. (*Pontecorvo B.* Sov. Phys. JETP 1958. **6**, N 2. P. 429).
[2] *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* Prog. Theor. Phys. 1962. **28**, N 5. P. 870.
[3] *Лобанов А. Е.* ТМФ. 2017. **192**, N 1. С. 70. (*Lobanov A. E.* Theor. Math. Phys. 2017 **192**, N 1. P. 1000).
[4] *Lobanov A. E.* arXiv:1507.01256[hep-ph].
[5] *Wolfenstein L.* Phys. Rev. D. 1978. **17**, N 9. P. 2369.
[6] *Михеев С. П., Смирнов А. Ю.* ЯФ. 1985. **42**, № 6. С. 1441. (*Mikheyev S. P., Smirnov A. Yu.* Sov. J. Nucl. Phys. 1985. **42**. P. 913).
[7] *Bethe H. A.* Phys. Rev. Lett. 1986. **59**. P. 1305.
[8] *Lobanov A. E., Studenikin A. I.* Phys. Lett. B. 2001. **515**, N 1–2. P. 94.
[9] *Лобанов А. Е.* Изв. Вузов. Физика. 2016. **59**, N 11. С. 141. (*Lobanov A. E.* Russian Physics Journal. 2017. **59**, No 11. P. 1891).
[10] *Notzold D., Raffelt G.* Nuclear Physics B. 1988. **307**, N 4. P 924.
[11] *Pal, Palash B., Pham T. N.* Phys. Rev. D. 1989 **40**, N 1. P. 259.
[12] *Nieves, José F.* Phys. Rev. D. 1989. **40**, N 3. P. 866.
[13] *Pantaleone J.* Phys. Lett. B. 1992. **287**, N 1. P. 128.
[14] *Kiers K., Weiss N.* Phys. Rev. D. 1997. **56**, N 9. P. 6776.
[15] *Lobanov A. E.* Phys. Lett. B. 2005. **619**, N 1-2. P. 136.
[16] *Arbuzova E. V., Lobanov A. E., Murchikova E. M.* Phys. Rev. D. 2010. **81**, N 4. 045001.
[17] *Лобанов А. Е., Чухнова А. В.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2017. N 5, с. 22. (*Lobanov A. E., Chukhnova A. V.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 5. P. 454).

Wave functions of neutrino in matter

A. E. Lobanov[a], A. V. Chukhnova[b]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a] lobanov@phys.msu.ru, [b] av.chukhnova@physics.msu.ru

We study the solutions of the equation which describes the evolution of a neutrino propagating in dense homogeneous medium in the framework of the quantum field theory. In the 2–flavor model, the explicit form of the Green's function is obtained, and as a consequence the dispersion law for a neutrino in matter is derived. Both the solutions describing the stationary states and the spin-flavor coherent states of the neutrino are found. It is shown that the stationary states of the neutrino are different from the mass states, and the wave function of a state with a definite flavor should be constructed as a linear combination of the wave functions of the stationary states with coefficients, which depend on the mixing angle in matter.

PACS: 12.15.-y, 13.15.+g, 14.60.Pq.
Keywords: standard model, neutrino spin-flavor oscillations.
Received 08 July 2018.

Сведения об авторах

1. Лобанов Андрей Евгеньевич — доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: lobanov@phys.msu.ru.
2. Чухнова Александра Владимировна — студентка, e-mail: av.chukhnova@physics.msu.ru.