

Фазовые явления в трехмерной калибровочной модели Изинга

С. Д. Мостовой,* О. В. Павловский†

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²НИЦ «Курчатовский институт» — ИТЭФ
Россия, 117218, Москва,

ул. Большая Черемушкинская, д. 25

(Статья поступила 07.05.2018; Подписана в печать 02.08.2018)

В работе были исследованы фазовые явления в трехмерной калибровочной модели Изинга. С помощью метода Монте-Карло моделирования было показано, что модель обладает фазовым переходом. Для обнаружения критической температуры модели были рассмотрены несколько параметров порядка: плакетная магнетизация, петли Вильсона и собственная масса дефекта решетки (вакансия). Рассматривая петли Вильсона площади 2, но разной пространственной формы, мы обнаружили энергетическое различие между ними в окрестности фазового перехода. Также было показано, что собственная масса дефекта имеет пик в окрестности фазового перехода, и что с увеличением объема решетки положение пика стремится к точке фазового перехода.

PACS: 05.50.+q, 75.10.Nk, 02.70.-c, 02.70.Uu

УДК: 538.9.

Ключевые слова: модель Изинга, калибровочная симметрия, фазовый переход, дефекты решетки, Монте-Карло вычисления.

ВВЕДЕНИЕ

В современной теоретической физике модели (как классические, так и квантовые), описывающие фундаментальные взаимодействия между элементарными частицами, строятся на основе калибровочных теорий поля. Это означает, что математическая запись уравнений, описывающих поля, остается инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований. Эти преобразования так изменяют поля материи и взаимодействия, что вид уравнений Эйлера–Лагранжа не меняется. Локальность заключается в зависимости параметров преобразования от точки пространства–времени. Как известно, локализация глобальной симметрии является естественным и удобным способом введения полей, обеспечивающих взаимодействие частиц материи. Именно таким образом математически сформулированы теории электрослабого и сильного взаимодействий элементарных частиц.

В наши дни широкое применение нашел решеточный подход к изучению явлений физики высоких энергий, в частности квантовой теории поля. Решеточные модели также находят применение и в статистической физике, в физике конденсированного состояния. Появляются работы, применяющие вычисления на решетке в биофизике. Важнейшей чертой многих решеточных моделей является изменение характера поведения избранных наблюдаемых в разных областях изменения параметра. Традиционно таким параметром является обратная температура или же константа связи. Из аналогии со статистической физикой такие

явления называют «фазовыми переходами», а значение (обратной) температуры, химического потенциала, константы связи или другой величины, при которой происходит изменение свойств *параметра порядка*, — критической точкой. Известны два типа фазовых переходов: по спонтанному нарушению симметрии и БКТ–переход (топологический фазовый переход Березинского–Костерлица–Таулеса). Примером может служить переход конфайнмент–деконфайнмент, являющийся краеугольным камнем в теории сильного взаимодействия. Так, в работе [1] подробно обсуждается этот фазовый переход между фазами, существующими в пределах сильной и слабой связи в решеточной неабелевой теории поля.

В настоящей работе рассматривается простейшая калибровочная решеточная теория – калибровочная модель Изинга. Калибровочное обобщение модели Изинга было дано Вегнером [2] в 1971 г. Подробнее о модели Изинга и ее связи с теорией поля рассказано в монографии [3]. Мы продемонстрируем, что эта модель проявляет интересные фазовые свойства, а затем применим ряд подходов, уточняющих поведение системы в окрестности критической точки.

1. БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ

1.1. Определения

Мы рассматриваем трехмерную кубическую решетку, имеющую L узлов в каждом направлении. Ребро, соединяющее соседние узлы, называют *линком*. Привяжем к линкам дискретные целочисленные переменные, принимающие одно из двух значений: 1 и -1 . Для перехода к калибровочной теории зададимся преобразованием полученных линковых переменных при помощи поля η_x :

*E-mail: sd.mostovoy@physics.msu.ru

†E-mail: ovp@goa.bog.msu.ru

$$\varphi_{x,\mu} \rightarrow \eta_x \varphi_{x,\mu} \eta_{x+\mu}, \quad (1)$$

где x перебирает узлы трехмерной решетки, $\mu = 1, 2, 3$ имеет смысл направления линка, а поле η_x тоже принимает значения ± 1 . Легко видеть, что простейшей комбинацией переменных поля $\varphi_{x,\mu}$, инвариантной относительно такого преобразования, является замкнутый контур из четырех линков:

$$\varphi_{pl} = \varphi_{x,\mu} \varphi_{x+\mu,\nu} \varphi_{x+\mu+\nu,-\mu} \varphi_{x+\nu,-\nu}, \quad (2)$$

где $-1, -2, -3$ во втором аргументе линка понимаются как движение против положительного направления соответствующей оси. Эта комбинация называется **плакетом**. Каждый плакет характеризуется вершиной (в (2) это x) и плоскостью расположения, задаваемой парой $\{\mu, \nu\}$. Из этих калибровочно инвариантных величин составляется действие, входящее в распределение Больцмана для равновесной системы:

$$E(Conf) = -J \sum_{x,\mu<\nu} \varphi_{pl}(x, \mu, \nu). \quad (3)$$

$$P(Conf) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(Conf)}. \quad (4)$$

Условие $\mu < \nu$ наложено для избежания повторного счета плакетов в решетке. Мы используем систему единиц, в которой $J = 1, k_B = 1$.

Работа выполнена при помощи метода Монте-Карло, состоящего в генерации последовательности равновесных конфигураций, удовлетворяющих условию марковости. По набору конфигураций вычисляются средние значения наблюдаемых, которые и используются во всех рассуждениях ниже. Процесс перебора состояний реализован алгоритмом тепловой бани.

1.2. Простейшие фазовые свойства

Прежде всего убедимся в наличии фазового перехода в модели. Почему, в самом деле, мы выбрали именно трехмерную калибровочную модель Изинга? Известно [4], что глобальная модель Изинга размерности 3 обладает фазовым переходом при конечной обратной температуре $1/T_c^{\text{glob}} \approx 0.221654$. В обзоре [5] показано, что калибровочная модель Изинга является *дуальной* к глобальной модели Изинга в трех измерениях, что позволяет связать критические температуры в этих двух случаях. Это обстоятельство привлекло наше внимание и на дуальность мы будем ссылаться в дальнейшем. Из преобразования дуальности для калибровочной модели получаем $1/T_c^{\text{gauge}} \approx 0.761414$. Для непосредственного наблюдения перехода следует выбрать параметр порядка, меняющий свое поведение при переходе через критическую точку. Поскольку в глобальной модели Изинга реализуется фазовый переход по спонтанному нарушению, то и здесь, в силу дуальности, мы выберем *плакетную намагниченность* $M = \langle \varphi_{pl} \rangle$ (2) в качестве тестовой наблюдаемой. Расчет (рис. 1) подтверждает нашу правоту.

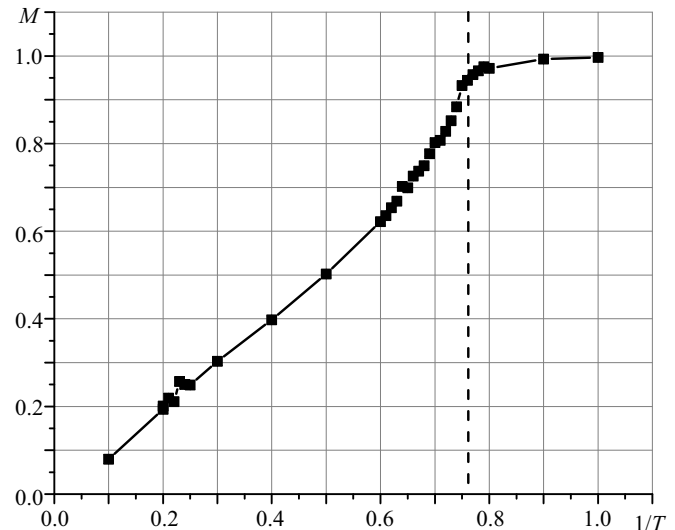


Рис. 1: Плакетная намагниченность (2) как функция от обратной температуры. Показана критическая температура $1/T_c$. Изменение поведения кривой свидетельствует о наличии фазового перехода

Рассуждения, приведенные выше, не запрещают введения более сложных наблюдаемых, чем плакет. В калибровочных моделях нашли широкое применение объекты, называемые **петлями Вильсона** [6, 7]. Они тоже калибровочно инвариантны, как и все замкнутые пути вдоль линков. На прямоугольной решетке петли Вильсона определяются как произведения линков, взятых вдоль периметра прямоугольника размера $X \times Y$. Будем говорить, что площадь такой петли равна XY , а периметр $X + Y$ (без множителя 2, что принято в геометрии). Среднее от петли Вильсона может быть получено аналитически в пределе малых β . Разлагая выражение

$$\langle W(X, Y) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\text{Conf}} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{2(X+Y)} e^{\beta \sum_{pl} \varphi_{pl}} \quad (5)$$

в ряд по $\beta \rightarrow 0$, получаем

$$\langle W(X, Y) \rangle \approx \beta^{XY}. \quad (6)$$

Это соотношение называется законом площадей Вильсона, а режим, в котором находится система в пределе малых β — конфайнментом по аналогии с решеточной КХД. Простое преобразование позволяет объяснить сложившуюся терминологию. В самом деле,

$$\beta^{XY} = e^{XY \ln \beta} = e^{-XY \ln \frac{1}{\beta}} = e^{-\sigma XY}, \quad (7)$$

где $\sigma = Y \ln \frac{1}{\beta}$ есть натяжение струны. Мы получили, что величина W экспоненциально падает с расстоянием. Это имеет аналогию со струной феноменологической моделью адронов. Результат вычислений вместе с высокотемпературной аппроксимацией приведены на рис. 2. Следует заметить, что по изучению поведения σ в зависимости от температуры легко увидеть переход

от фазы конфайнмента к деконфайнменту (во втором случае работает «параметрический» закон, а величину натяжения σ ввести не получается). Для этого следует построить величину $\sigma = -\ln W(1, 1)$ как функцию от температуры, что и сделано на рис. 3. В достаточно широкой области $\beta < 0.5$ результаты вычислений совпадают с предсказанием (7) с высокой точностью, а σ обращается в ноль в точности на фазовом переходе при $1/T_c$.

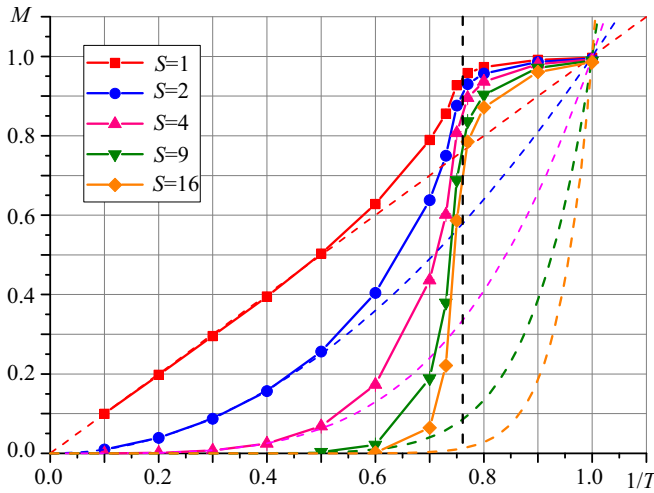


Рис. 2: Серия петель Вильсона различной площади в зависимости от обратной температуры. Штриховые линии показывают аналитическое поведение в пределе сильной связи ($\langle W \rangle = \beta^S$). Также отмечена критическая температура

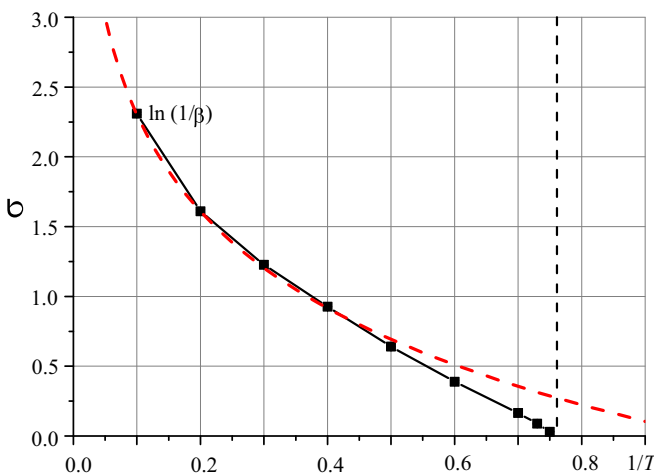


Рис. 3: Натяжение струны, обращаясь в ноль, показывает точку фазового перехода по W . Такой эксперимент отличается существенной точностью определения $1/T_c$

2. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Поведение модели в окрестности фазового перехода, описанное в Разделе 1, не является чем-то новым

и служит, главным образом, для введения читателя в калибровочную модель Изинга и проверки вычислительных свойств компьютерной программы. Теперь же перейдем к оригинальным результатам, полученным в рамках настоящего исследования. Выводы, представленные ниже, позволяют расширить существующие понятия о фазовом переходе в данной модели.

2.1. Пространственная картина фазового перехода

Возвращаясь к определению петли Вильсона (5), уточним, что в Разделе 1 все линки выбирались лежащими в одной плоскости. Это традиционное соглашение в данном контексте. Вместе с тем очевидно, что петли площади $S > 1$ могут быть расположены сразу в нескольких плоскостях с перегибами по внутренним линкам, не включаемым в петлю. Для $S = 2$ это проиллюстрировано на рис. 4.

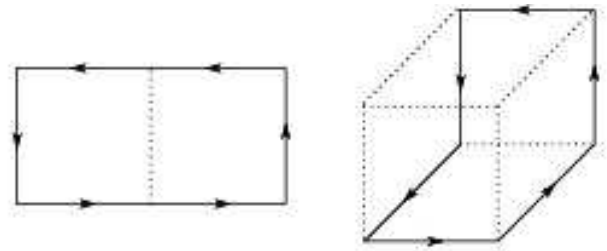


Рис. 4: «Традиционная» петля Вильсона площади $S = 2$ и модифицированная (laptop-loop)

Рассматриваемые петли имеют одинаковую площадь, а значит, в силу (6) и одинаковый первый член в разложении $\beta \rightarrow 0$. Следует найти поправку к β^2 , для чего нужно подсчитать количество плакетов, «покрывающих» линки выбранных петель. В 3D это возможно сделать визуально, изучая рис. 4. Непосредственное достраивание плакетов, входящих в конфигурацию Conf , дает добавку β^6 в обоих случаях. Равенство показателей степеней позволяет попытаться численно сравнить $\langle W \rangle$. Разность между обсуждаемыми петлями Вильсона показана на рис. 5.

Как можно было ожидать, вдали от фазового перехода система не обнаруживает различия между плоской вильсоновской петлей и laptop-loop (предлагаемое нами название). В области малых β это видно непосредственно из разложения в режиме сильной связи. При больших обратных температурах обе фигуры, скорее всего попадают в один «домен» (основанный на линковых переменных) и произведение $\varphi_{x,\mu}$ вдоль контуров тоже не различаются. Но вблизи фазового перехода длина корреляции между линками растет, охватывая всю фигуру в целом. Именно тут проявляется разница, обусловленная геометрией. С физической точки зрения мы считаем, что наблюдаем свидетельство *многостадийного* перехода одной фазы в другую. Используя, для удобства, терминологию физики агрегатных

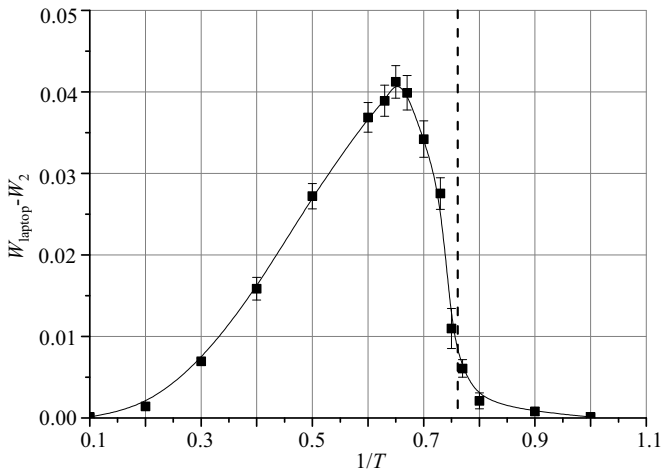


Рис. 5: Разность между средними произведениями линков, показанных на рис. 4. Видно различие величин вблизи точки фазового перехода. Смещение от критической температуры вызвано эффектом конечного объема решетки

состояний, можно сказать, что затвердевание происходит в две стадии: сначала кристаллизуются отдельные слои, а потом эти слои слипаются друг с другом, образуя трехмерную решетку твердого тела. Это же в равной степени применимо и к магнитным доменам, что ближе к рассматриваемой области. Можно предположить, что различие между плоской петлей и laptop -петлей, наблюдаемое на рис. 5, связано именно с анизотропией перехода из хаотической фазы в доменную. В пользу этого свидетельствует и расположение ненулевой разности $W_{\text{laptop}} - W_2$ в области $\beta < \beta_c$.

2.2. Масса дефекта

В работах [8, 9] авторами предлагается использовать энергетические свойства дефектов типа вакансий для изучения фазовых свойств решеточных систем. Работа этого метода была испытана и в случае трехмерной калибровочной трехмерной модели Изинга. Введем дефекты в калибровочной модели путем обнуления соответствующих линковых переменных (в модели с глобальной симметрией были использованы узловые переменные). С математической точки зрения из действия (3) выпадают все плакетты, содержащие данный линк. Физически, это означает отсутствие взаимодействия между частью линков. Нас интересует *энергетический вклад* внесенного дефекта в систему, т.е. величина

$$m_{\text{def}}(\beta) = E_{\text{def}}(\beta) - E_0(\beta). \quad (8)$$

Интуитивно понятно, что в хаотической фазе этот вклад будет стремиться к нулю, поскольку соседние линки все меньше влияют друг на друга по мере роста температуры. С другой стороны, в доменной фазе,

когда все линки окажутся в одном направлении, энергии бездефектной системы и системы с одним дефектом будут различаться ровно на количество выпавших плакеттов (т.к. $\varphi = \pm 1$ и $J = 1$), что равно 4. Нас интересует переход между этими двумя состояниями. Заранее не очевидно, будет ли он плавным, резким или даже сингулярным (прямое вычисление свидетельствует в пользу последней возможности). Результаты вычислений для решетки размером $10 \times 10 \times 10$ представлены на рис. 6. В пределах больших и малых β находим подтверждение высказанных выше предположений, в то время как масса дефекта обладает интересным поведением в окрестности фазового перехода.

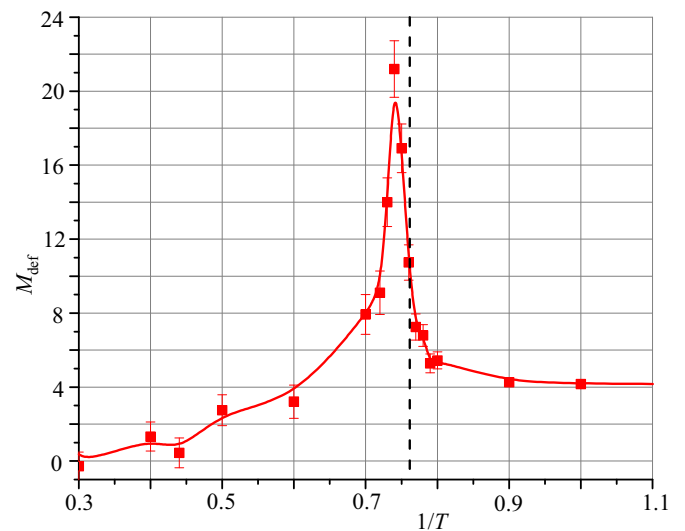


Рис. 6: Разность (8) является непосредственным указанием на существование фазового перехода в силу масштабной инвариантности

Следует заметить, что масштабная инвариантность, имеющая место в критической точке $1/T_c \approx 0.761414$, действительно объясняет получившуюся сингулярность массы, поскольку нарушение однородности решетки «распространяется» на все большие расстояния по мере приближения к фазовому переходу. Обратим внимание на узкий характер пика кривой, что способствует лучшему численному определению температуры фазового перехода, чем методы, использующие параметры порядка: намагниченность и петли Вильсона (см. рис. 1 и 2). Конечно, получаемая точность сравнима с методом натяжения струны (см. рис. 3, но ее расчет (7) опирается на найденный *параметр порядка*). В противоположность этому, метод массы дефекта не требует предварительного изучения системы для определения параметра, изменяющего свое поведение при переходе в другую фазу. В случае моделей Изинга и XY-модели (см. ниже) это не кажется существенным преимуществом, но стоит помнить о существовании более сложных моделей, при изучении которых данный подход может оказать значительную пользу.

Безусловно, нельзя забывать про *эффект конечного объема*, являющийся типичным ограничением на применимость решеточного моделирования Монте-Карло. Авторы провели исследование, направленное на выявление искажений, вызванных вычислениями при конечном размере решетки L . Так, на рис. 7 продемонстрировано, что при увеличении L величина максимума растет, а его положение смещается вправо, к критической точке. Вычисление также было проведено для $L = 20$, правда с большей статистической погрешностью результата в связи с возрастающей вычислительной сложностью.

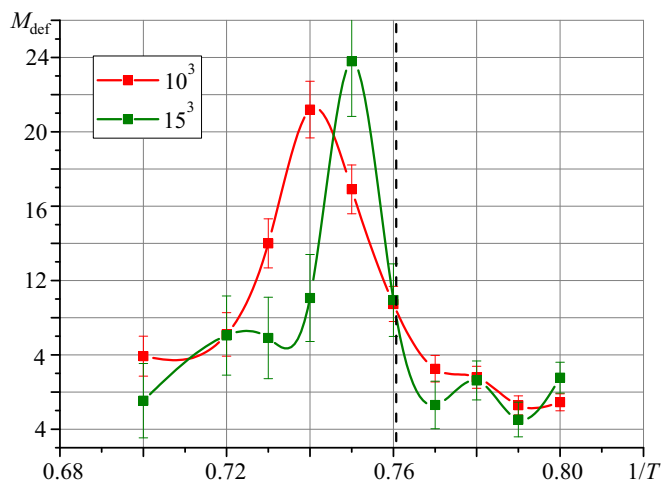


Рис. 7: Объемный эффект, связанный с вычислением (8)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены свойства калибровочной модели Изинга в окрестности фазового перехода, дуального к фазовому переходу по намагничен-

ности в модели Изинга с глобальной \mathbb{Z}_2 симметрией. Рассматриваются две базовые методики определения критической точки по намагниченности и петли вильсона, при этом сравниваются результаты аналитического разложения в пределе сильной связи и результатов вычисления методом Монте-Карло на решетке.

Затем исследуется различие между петлей Вильсона площади $S = 2$ и латор-петлей, расположенной в двух плоскостях, что позволяет проинтерпретировать влияние третьего измерения модели как образование пространственных «доменных» структур при температуре, отличной от температуры начала формирования двумерных (плоских) структур.

Наконец, путем введения дефекта типа вакансии предпринимается попытка определения критической точки методом, качественно отличным от традиционных подходов. Обсуждается достоинство этого метода по сравнению с общепринятыми.

Метод исследования с использованием дефекта оказался универсальным. Рассматриваемая модель Изинга является калибровочной моделью с локальной \mathbb{Z}_2 симметрией. Это дискретная симметрия. Авторы применили аналогичный рецепт добавления дефекта и в случае непрерывной $U(1)$ симметрии в рамках калибровочной XY-модели [1, 10]. Известно, что в трехмерном случае в такой модели отсутствует фазовый переход, в то время как в 4D он существует. Непосредственные вычисления алгоритмом Метрополиса демонстрируют данное различие и с достаточной степенью точности определяют критическую точку. Таким образом, метод массы дефекта является универсальным.

Благодарности

Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова [11].

- [1] Wilson K. Phys. Rev. D 1974. **10**. P. 2445.
- [2] Wegner J. Journal of Mathematical Physics. 1971. **12**. P. 2259.
- [3] Поляков А. М., Калибровочные поля и струны. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский ун-т», 1999.
- [4] Hasenbusch M. Phys. Rev. B. 2010. **82**. 174433.
- [5] Kogut J. Rev. Mod. Phys. 1979. **51**. P. 659.
- [6] Симонов Ю. А. «Конфайнмент». УФН. 1996. **166**. N 4. P. 337.
- [7] Makeenko Y. M. Phys. Atom. Nuclei. 2010. **73**. 878.

- [8] Мостовой С. Д., Павловский О. В. Ядерная физика и инжиниринг. 2018. **8**.
- [9] Mostovoy S. D., Pavlovsky O. V. Physics Letters A. 2018. **382**. N 5. P. 276.
- [10] R. Balian et al. Phys. Rev. D 1974. **10**. 3376.
- [11] Воеводин В., Жуматий С., Соболев С., Антонов А., Брызгалов П., Никитенко Д., Стефанов К., Воеводин В. Открытые системы. 2012. **7**. С. 36.

Phase phenomena in the 3D Ising gauge model

S. D. Mostovoy^{1,a}, O. V. Pavlovsky^{1,2,b}

¹*Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

²*NRC «Kurchatov Institute»-ITEP, Moscow 117218, Russia
E-mail: ^asd.mostovoy@phys.msu.ru, ^bovp@goa.bog.msu.ru*

In this paper phase phenomena in the three-dimensional Ising gauge model were studied. Using the Monte Carlo simulation method, it was shown that the model possesses a phase transition. To determine the critical temperature of the model several order parameters were considered: plaque magnetization, Wilson loops and the mass of the lattice defect (vacancy). Considering the Wilson loops of area 2 of different spatial forms, we have found the energy difference between them in the vicinity of the phase transition. It was also shown that the mass of the defect has a peak near the phase transition and that this peak's position tends to the critical point with increasing lattice volume.

PACS: 05.50.+q, 75.10.Hk, 02.70.-c, 02.70.Uu

Keywords: Ising model, gauge symmetry, phase transition, lattice defects, Monte Carlo simulation.

Received 07 May 2018.

Сведения об авторах

1. Мостовой Сергей Дмитриевич — студент; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: sd.mostovoy@phys.msu.ru.

Павловский Олег Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: ovp@goa.bog.msu.ru.