Неминимальные скалярные теории в формализме Палатини

С. М. Жидкова*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 13.05.2018; Подписана в печать 31.05.2018)

В работе показано, что для неминимально–связанной теории, содержащей производные от скалярного поля (действие Сушкова), в формализме Палатини связность оказывается метрически ассоциированной со «второй» метрикой, которая неконформно выражается через физическую метрику. Получено, что в первом порядке разложения по слабому скалярному полю эффективные ТЭИ совпадают в формализмах первого и второго порядков, но в общем случае они могут отличаться, и в уравнениях движения появляются высшие производные. Также доказано, что в этой теории, как и в неминимально–связанной теории $R\phi^2$, а также в теориях $f(R)$, кручение можно свести к калибровочному преобразованию, относительно которого действие инвариантно. Мы также исследовали действие Эйнштейна–Черна–Саймонса и установили, что при отсутствии неметричности оно переходит в действие Эйнштейна–Гильберта с минимально–связанным скалярным полем.

PACS: 04.20.Jb, 04.50.+h, 04.65.+e УДК: 53.01
Ключевые слова: формализм Палатини, неминимальная связь, вторая метрика, кручение.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время многочисленные космологические наблюдения свидетельствуют о том, что Вселенная находится в фазе ускоренного расширения. Для объяснения этого расширения вводится так называемая темная энергия — особый вид материи с отрицательным давлением. Простейшим кандидатом на роль темной энергии является космологическая постоянная, однако для такой модели возникает проблема подбора параметров. Для того чтобы избежать этого вводятся модели со скалярным полем [1, 2]. В большинстве работ рассматривалось минимально–связанное скалярное поле, но не меньший интерес представляют теории, в которых присутствуют слагаемые с неминимально–связанным скалярным полем. Такие слагаемые могут быть рассмотрены как квантовые поправки к ОТО [3], и поэтому их исследование становится немаловажным. В литературе подробно изучалась модель $\phi^2 R$, и было показано, что в ней можно легко получить инфляционный режим [4]. В общем случае в действии могут появляться члены, содержащие неминимально связанные с кривизной производные скалярного поля, такие как $R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ и $R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$. В метрическом формализме такие модели проявляют интересные космологические свойства [5–10]. Например, для члена $R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ были получены некоторые аналитические инфляционные решения [11]. А для более общего случая, включающего как $R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ так и $R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$, было найдено, что пространство–время де-Ситтера является аттракторным решением [12, 13].

Однако, помимо метрического формализма (второго порядка), существует также другой подход для получения уравнений движения, в котором метрика и связность являются независимыми переменными. Этот метод известен как формализм первого порядка (формализм Палатини) [14], т. к. при вариации по независимым метрике и связности в общем случае получается система дифференциальных уравнений первого порядка вместо системы уравнений второго порядка в метрическом формализме. Это, в каком-то смысле, облегчает нахождение решений уравнений движения, однако, как будет показано, при исследовании некоторых неминимально–связанных моделей в формализме Палатини могут возникать производные выше второго порядка от метрики и скалярного поля после прямой подстановки связности в уравнения движения. Из дифференциальной геометрии, вообще говоря, не следует, что связность должна выражаться через метрику каким-то конкретным образом. А тот факт, что в ОТО связность совпадает со связностью Леви–Чивиты, может объясняться тем, что эта связь следует из решения уравнений в формализме первого порядка [15]. Кроме того, формализм Палатини привлекателен тем, что с его помощью теории $f(R)$ гравитации путем конформных преобразований могут быть переведены в теории с минимально связанным скалярным полем, и тем самым служить источником инфляции [16]. В таких теориях связность не всегда выражается в качестве символов Кристоффеля от метрики, однако помимо физической метрики g может возникать «вторая» метрика h, через которую связность и выражается в качестве символов Кристоффеля [17].

Для ряда лагранжианов, объединенных теорией Лавлока [18] было обнаружено, что уравнение на связность, полученное в формализме первого порядка, имеет единственное решение, в котором связность является связностью Леви–Чивиты, то есть для теории Лавлока оба формализма приводят к одинаковому результату, однако, этот результат основывается на предполо-

*E-mail: kfizik@yandex.ru

жении об асимптотически плоском пространстве [19]. Затем, в [20] было обнаружено, что оба формализма дают одинаковый результат для более широкого класса лагранжианов $L(g_{\mu\nu}, R^{\lambda}_{\mu\nu\rho})$, выходящих за рамки теории Лавлока. Там же было показано, что в общем случае оба формализма не эквивалентны и приводят к разным уравнениям движения, и в этом случае формализм Палатини заключает в себе метрический формализм для всех лагранжианов $L(g_{\mu\nu}, R^{\lambda}_{\mu\nu\rho})$, но обратное не верно. То есть решения уравнений в формализме Палатини всегда будут являться решениями метрических уравнений, однако, решения метрических уравнений подходят в качестве решения уравнений в формализме Палатини, только если они обладают достаточной симметрией. В [20] были найдены условия, которым должны удовлетворять метрические решения для того, чтобы выполнялись уравнения, полученные в формализме Палатини.

Ситуация кардинально меняется при добавлении в действие неминимально связанного с гравитацией скалярного поля. Такая модификация может возникать в рамках дальнейшего расширения ОТО и попытки объединения гравитации с другими типами взаимодействия. Одним из наиболее ярких примеров неминимальной теории является теория Хорндески [21]. Действие Хорндески представляет собой наиболее общую скалярно–тензорную теорию, содержащую в уравнениях движения производные не выше второго порядка. Эта теория также может быть получена из теории Лавлока размерной редукцией. В работе исследуется частный случай скалярной теории Хорндески, и, как будет показано ниже, в первом приближении при разложении по скалярному полю, которое считается малой величиной, оба формализма приводят к одному и тому же эффективному ТЭИ. Это свойство является остаточной симметрией из теории Лавлока.

В неминимально-связанных теориях также может возникать «вторая» метрика, в этом случае, связность оказывается согласованной с этой метрикой. В [22] показано, что при исследовании каждой из теорий содержащих в действии слагаемые $\kappa_1 R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ и $\kappa_2 R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ по отдельности вторая метрика оказывается конформно связанной с физической метрикой в первом случае (для любого анзаца метрики), а во втором — для частного случая FLRW космологии. В настоящей работе показано, что при включении в действие обоих слагаемых одновременно с выбором $\kappa \equiv \kappa_2 = -2\kappa_1$, так чтобы образовался тензор Эйнштейна, конформная связь нарушается и появляется дисформный член. Конформный множитель сохраняет глобальную форму, изменяя лишь локальные единицы длины между двумя точками при растяжении и сжатии одинаково во всех пространственно–временных направлениях, в то время как дисформный множитель меняет единицы длины вдоль направления градиента скалярного поля, изменяя тем самым глобальную форму [23]. Вследствие присутствия дисформного фактора уравнения движения сильно усложняются в общем случае, и это делает теорию сложной для анализирования. Но в приближении слабого поля часть слагаемых опускается и уравнения приобретают достаточно простой вид.

В большинстве работ при использовании формализма Палатини подразумевается симметричность связности по последним двум индексам. Однако в самом общем случае может присутствовать и кручение $T^{\lambda}_{\mu\nu} = 2\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{[\mu\nu]}$, появление которого нарушает правило параллелограмма при параллельном переносе. Но оказывается, что в некоторых случаях его можно убрать с помощью калибровочных преобразований. В работе [24] было отмечено, что действие Эйнштейна-Гильберта инвариантно относительно преобразований $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \to \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + A_\mu \delta^{\lambda}_{\nu}$. А в [25] показано, что при взятии вариации действия Эйнштейна–Гильберта в формализме первого порядка по связности приводит к тому, что добавление кручения эквивалентно вышеуказанному калибровочному преобразованию. Легко заметить, что действие с неминимальным членом $\kappa G_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$, исследуемое в данной работе, также будет инвариантно относительно упомянутых калибровочных преобразований. Ниже будет показано, что подобно случаю рассмотренному в [25] добавление кручения к такому действию будет эквивалентно этому калибровочному преобразованию. Это позволяет нам отбросить тензор кручения при дальнейшем исследовании модели, включив его в тензор кривизны выбором калибровки.

В работе рассматривается специальный случай неминимальных теорий $\kappa_1 R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ и $\kappa_2 R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ с подобранными следующим образом константами связи $\kappa \equiv \kappa_2 = -2\kappa_1$, что дает теорию с неминимально связанным членом $\kappa G_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$. Такой выбор констант связи обеспечивает отсутствие производных выше второго порядка (духов) от скалярного поля в уравнениях движения, полученных в формализме второго порядка [5], это делает теорию более удобной для исследования. В [5] также была рассмотрена плоская FRW метрика с масштабным фактором $a(t)$ и были найдены новые точные космологические решения. Установлено, что свойства модели сильно зависят от знака константы связи κ на ранних стадиях (для $\kappa < 0$ $a(t) \sim (t - t_i)^{2/3}$ и содержится начальная сингулярность, а для $\kappa > 0$ $a(t) \sim e^{Ht}$ при $t \to -\infty$). На поздних стадиях эволюция Вселенной оказывается независящей от знака κ и $a(t) \sim t^{1/3}$ при $t \to \infty$. В этой работе найдено, что в приближении слабого скалярного поля получаются точно такие же результаты. В статье также была исследована плоская FRW модель в режиме медленного скатывания: получено условие при котором происходит расширение Вселенной, посчитано число e-фолдингов и обнаружено, что при $\kappa < 0$ возможно избежать «суперпланковский» режим. Все эти оценки в режиме медленного скатывания отличаются от полученных в [28], так как там не был учтен дисформный фактор во второй метрике и были допущены прочие ошибки в расчетах.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В МЕТРИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Рассмотрим сначала действие с неминимально-связанным скалярным полем в обычном метрическом формализме:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\times \times \left\{R - \Big[\varepsilon g_{\mu\nu} + \kappa_1 g_{\mu\nu}R + \kappa_2 R_{\mu\nu}\Big]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - 2V(\phi)\right\}. \quad (1)$$

При взятии вариации по метрике будет полезна формула для вариации тензора Риччи:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla^\lambda\nabla_{(\mu}\delta g_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{\lambda\rho}. \quad (2)$$

После варьирования получаем уравнение:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \kappa_1\Theta^{(1)}_{\mu\nu} + \kappa_2\Theta^{(2)}_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon(\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2) - g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (4)$$

$$\Theta^{(1)}_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + (\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2 + g_{\mu\nu}\Box(\nabla\phi)^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\Theta^{(2)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta} + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} + \frac{1}{2}\Box(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) - \nabla_\alpha\nabla_{(\mu}(\nabla_{\nu)}\phi\nabla^\alpha\phi)+ \\ +\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi).\end{aligned} \quad (6)$$

Раскрывая ковариантные производные от произведения по правилу Лейбница и учитывая равенство:

$$\nabla_\mu\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi - \nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta}, \quad (7)$$

где в наших обозначениях тензор Римана: $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma_{\nu\alpha}$ можно записать выражения для $\Theta^{(1)}_{\mu\nu}$ и $\Theta^{(2)}_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Theta^{(1)}_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + (\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} - 2\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} - 2\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi- \\ - 2\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2g_{\mu\nu}(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta} + \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\Box\phi),\end{aligned} \quad (8)$$

$$\Theta^{(2)}_{\mu\nu} = 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi - \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + (\Box\phi)^2 + 2\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\Box\phi). \quad (9)$$

Уравнение Клейна–Гордона (вариация по полю ϕ) запишется следующим образом:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\Big[\nabla_\nu\phi(\kappa_1 g^{\mu\nu}R + \kappa_2 R^{\mu\nu})\Big] = 0, \quad (10)$$

и при произвольных константах связи κ_1 и κ_2 содержит производные третьего порядка от метрики.

При подходящем выборе констант связи $-2\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ слагаемые содержащие третьи производные поля $\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ и $g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\Box\phi$ взаимно сокращаются в $\Theta^{(1)}_{\mu\nu}$ и $\Theta^{(2)}_{\mu\nu}$. И остается уравнение движения в виде:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \kappa\Theta_{\mu\nu}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta}+ \\ + \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu}(-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta}).\end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая тот факт, что в метрическом формализме справедливо тождество Бьянки [27]: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, уравнение Клейна–Гордона упрощается (и уже не содержит духов):

$$\Big[g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu}\Big]\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0. \tag{13}$$

Этот результат был получен в [5], мы будем рассматривать действие (1) в формализме первого порядка.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ ПАЛАТИНИ. ВТОРАЯ МЕТРИКА

Рассмотрим действие Сушкова в формализме Палатини

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\tilde{R} - \Big[\varepsilon g_{\mu\nu} + \kappa\tilde{G}_{\mu\nu}\Big]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - 2V(\phi)\Big\} + \\ + S_m[g_{\mu\nu},\psi], \tag{14}$$

где все величины с тильдами зависят от неизвестной пока связности, ψ обозначает поля материи, а $\tilde{G}_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R}. \tag{15}$$

В формализме Палатини считаем тензор Риччи $\tilde{R}_{\mu\nu}$, который уже не является симметричным в общем случае, не зависящим от метрики. Заметим, что в действии (14) при свертке тензора Риччи с симметричным тензором $\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$, а также в скалярной кривизне при свертке с $g^{\mu\nu}$ ненулевой вклад дает только его симметричная часть, и именно она будеть далее фигурировать в уравнениях движения. Производя вариацию действия (14) по метрике приходим к следующему уравнению движения:

$$T_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} + \Big[\frac{\kappa}{2}\tilde{G}_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} + \\ + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \kappa\tilde{R}_{(\mu\lambda}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} - \\ - \kappa\tilde{R}_{\lambda(\mu}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi)\Big], \tag{16}$$

где тензор энергии-импульса полей материи

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m[g,\psi]}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{17}$$

Заметим, что ТЭИ (16) отличается от полученного в [28], тем, что он симметризован по индексам μ и ν в силу симметричности метрики.

Будем теперь варьироать действие по независимой связности (несимметричной с присутствием кручения $T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$). Тогда получим уравнение:

$$-\nabla_\lambda A^{\mu\nu} - A^{\mu\nu}(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} - T^\rho_{\rho\lambda}) + \delta^\nu_\lambda(\nabla_\rho A^{\mu\rho} + \\ + \frac{1}{2}A^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}\nabla_\rho g_{\alpha\beta} - A^{\mu\rho}T^\sigma_{\sigma\rho}) + A^{\mu\rho}T^\nu_{\lambda\rho} = 0, \tag{18}$$

где введено обозначение

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(1 + \frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}) - \kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}. \tag{19}$$

Сворачивая (18) с $(A^{-1})_{\mu\nu}$, можно найти:

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = \frac{4}{3}T^\rho_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}(A^{-1})_{\alpha\beta}\nabla_\lambda A^{\alpha\beta}, \tag{20}$$

подставляя это выражение обратно в (18), домножая его на $\frac{1}{\sqrt{-g}\sqrt{detA}}$ и вводя обозначение (вторая метрика) $h^{\mu\nu} = \frac{A^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}\sqrt{detA}}$, где под $detA$ понимается определитель матрицы $A^{\mu\nu}$, приходим к уравнению:

$$-\nabla_\lambda h^{\mu\nu} - \frac{1}{3}h^{\mu\nu}T^\rho_{\rho\lambda} - \frac{1}{3}\delta^\nu_\lambda h^{\mu\rho}T^\sigma_{\sigma\rho} + h^{\mu\rho}T^\nu_{\lambda\rho} = 0, \tag{21}$$

или опуская индексы:

$$\nabla_\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}T^\rho_{\rho\lambda} - \frac{1}{3}\delta^\rho_\mu h_{\nu\lambda}T^\sigma_{\sigma\rho} + \delta^\rho_\mu h_{\nu\beta}T^\beta_{\lambda\rho} = 0. \tag{22}$$

Выполняя в последнем равенстве перестановку индексов получим систему:

$$\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}h_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}h_{\nu\rho} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}T^\rho_{\rho\lambda} - \frac{1}{3}h_{\nu\lambda}T^\rho_{\rho\mu} = 0, \tag{23}$$

$$\partial_\mu h_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}h_{\nu\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}h_{\lambda\rho} - \frac{1}{3}h_{\nu\lambda}T^\rho_{\rho\mu} - \frac{1}{3}h_{\lambda\mu}T^\rho_{\rho\nu} = 0, \tag{24}$$

$$\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}h_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}h_{\mu\rho} - \frac{1}{3}h_{\lambda\mu}T^\rho_{\rho\nu} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}T^\rho_{\rho\lambda} = 0. \tag{25}$$

Складывая (24) и (25) и вычитая (23) находим связность:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) - \frac{1}{3}\delta^\lambda_\mu T^\rho_{\rho\nu}. \tag{26}$$

Обратим внимание, что в формулах (23), (24), (25) мы не совершили ошибки записывая ковариантную производную от $h_{\mu\nu}$ как от ковариантного тензора второго ранга, поскольку $\det A^{\mu\nu} = \det A^\mu_\nu\frac{1}{-g}$ и в определении $h_{\mu\nu}$ взаимно сокращаются $\sqrt{-g}$, а $\nabla_\lambda \det A^\mu_\nu = \partial_\lambda \det A^\mu_\nu$, т. е. $h_{\mu\nu}$ действительно является ковариантным тензором 2-го ранга.

След кручения можно выразить через некий 4-вектор: $T^\rho_{\nu\rho} = -3B_\nu$. Следовательно, связность может быть выражена как символы Кристоффеля от новой метрики $h_{\mu\nu}$ (обозначим их $\widetilde{\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}}$) с точностью до калибровочного преобразования:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \widetilde{\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}} + B_\nu\delta^\lambda_\mu. \tag{27}$$

Тензор Риччи для такой связности будет равен: $\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(B)$, где $F_{\mu\nu}(B) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, что похоже на тензор электромагнитного поля. Симметричная связность получается выбором калибровки $B_\nu = 0$, в дальнейших вычислениях ограничимся этим случаем.

Можно также заметить, что в теории, где скалярное поле связано с гравитацией без ковариантных производных:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\tilde{R}+\xi\tilde{R}\phi^2+\kappa\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi+V(\phi)\Big\} \quad (28)$$

тоже получается, что кручение сводится к калибровочному преобразованию (27). Действительно, в этом случае вариация по несимметричной связности дает то же уравнение (18), где теперь матрица $A^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}(1+\xi\phi^2)$. Дальнейшие вычисления проводятся точно так же, как и для теории с ковариантными производными. Отличие будет в том, что "вторая"метрика для действия (28) будет конформно связанной с физической: $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(1+\xi\phi^2)$. Свойство этой теории в формализме Палатини хорошо изучены в [29], где был проведен сравнительный анализ с метрическим формализмом, и найдено, что в формализме первого порядка эта теория более естественна для описания инфляции. Кроме того, кручение сводится к вышеуказанному калибровочному преобразованию во всех теориях $f(R)$ гравитации, в этом случае во второй метрике $A^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}f'(R)$. В общем случае можно сделать утверждение, что во всех теориях где тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ свернут с симметричным тензором (например $g^{\mu\nu}$ или $\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ и т.д.) кручение можно свести к калибровочному преобразованию (27), относительно которого эти действия инвариантны. Таким образом, кручение в таких теориях можно не рассматривать по физически обоснованным причинам. Однако, в более сложных теориях типа Черна–Саймонса и тензорной теории Хорндески, включающих в действие тензор Римана и дуальный тензор Римана такой результат в общем случае несправедлив.

Отличие связности (27) от симметричной может проявиться в геодезических пробных частиц. Особенности связности (27), помимо того, что симметричная часть тензора Риччи (именно она фигурирует в действиях (14) и (28)а также в $f(R)$ теориях) совпадает с тензором Риччи по связности Леви–Чивиты от второй метрики, заключаются в том, что она является единственно возможной связностью при которой заданная метрика $h_{\mu\nu}$ будет иметь такие же прегеодезические как и при связности Леви–Чивиты от нее, а параллельный перенос любого вектора при такой связности вдоль кривой будет являтся гомотетией к параллельному переносу при связности Леви–Чивиты [25].

Перейдем теперь к рассмотрению симметричной связности в теории (14). Учитывая вариацию тензора Риччи по симметричной связности

$$\delta\tilde{R}_{\mu\nu}=\nabla_\lambda(\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})-\nabla_\nu(\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\lambda}), \quad (29)$$

получаем следующее уравнение при вариации S по связности:

$$\tilde{\nabla}_\lambda\Big\{\sqrt{-g}\Big[g^{\mu\nu}\Big(1+\frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\Big)-\kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\Big]\Big\}=0, \quad (30)$$

оно отличается от полученного в [28] в последнем члене, который не был учтен в [28].

Введем симметричную матрицу

$$(A)^\mu_\nu=\delta^\mu_\nu(1+\frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha})-\kappa\phi^{,\mu}\phi_{,\nu}, \quad (31)$$

тогда приходим к уравнению:

$$\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}A^{\mu\nu})=0. \quad (32)$$

Будем искать вторую метрику $h^{\mu\nu}$, такую что $\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-h}h^{\mu\nu})=0$, тогда из предыдущего уравнения следует, что:

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu}=\sqrt{-g}A^{\mu\nu}=\sqrt{-g}A^\mu_\lambda g^{\lambda\nu}. \quad (33)$$

Беря детерминант от правой и левой частей этого уравнения, находим:

$$\sqrt{-h}=\sqrt{-g}\sqrt{detA}. \quad (34)$$

Подставляя найденное значение $\sqrt{-h}$ обратно в (33) находим вторую метрику, с которой будет согласована связность:

$$h^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{detA}}g^{\nu\lambda}A^\mu_\lambda, \quad (35)$$

$$h_{\mu\nu}=\sqrt{detA}g_{\lambda\mu}(A^{-1})^\lambda_\nu. \quad (36)$$

где A^{-1} — обратная к A матрица, которая существует в общем случае, так как $detA\neq 0$ тождественно. Обратную матрицу $(A^{-1})_{\mu\nu}$ можно явно вычислить с помощью формулы Шермана-Моррисона:

$$(A^{-1})_{\mu\nu}=\frac{g_{\mu\nu}}{1+\frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}}+\frac{\kappa\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}}{1-\frac{1}{4}\kappa^2\Big(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\Big)^2}. \quad (37)$$

Уравнение Клейна-Гордона в формализме Палатини уже может содержать третьи производные от метрики, поскольку для тензора Эйнштейна уже не будет выполняться тождество Бьянки и $\nabla_\mu\tilde{G}^{\mu\nu}\neq 0$, так как в выражение для $\tilde{G}^{\mu\nu}$ входят как новая метрика $h_{\mu\nu}$, так и исходная $g_{\mu\nu}$. Таким образом, находим:

$$\tilde{\nabla}_\mu\Big(\sqrt{-g}(\kappa G^{\mu\nu}\phi_{,\nu}+\varepsilon\phi^{,\mu})\Big)-\sqrt{-g}V'(\phi)=0. \quad (38)$$

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОГО ПОЛЯ

Для второй метрики

$$h^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{detA}}g^{\nu\lambda}A^\mu_\lambda, \quad (39)$$

$$h_{\mu\nu}=\sqrt{detA}g_{\lambda\mu}(A^{-1})^\lambda_\nu, \quad (40)$$

где обратная матрица:

$$(A^{-1})_{\mu\nu}=\frac{g_{\mu\nu}}{1+\frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}}+\frac{\kappa\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}}{1-\frac{1}{4}\kappa^2\Big(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\Big)^2}, \quad (41)$$

коэффициенты связности в приближении слабого скалярного поля примут вид:

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\nabla_{\nu}\ln\sqrt{F} + \delta^{\lambda}_{\nu}\nabla_{\mu}\ln\sqrt{F} - g^{\lambda\rho}g_{\mu\nu}\nabla_{\rho}\ln\sqrt{F} + \kappa\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi\nabla^{\lambda}\phi, \tag{42}$$

где было введено обозначение $F = \frac{\sqrt{detA}}{1+\frac{1}{2}\kappa\nabla^{\rho}\phi\nabla_{\rho}\phi}$. Тензор Риччи в таком случае запишется следующим образом:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F}{F} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}F}{F} + \kappa\Big[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi - \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}\phi + \nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi R^{\beta}_{\mu\nu\alpha}\Big], \tag{43}$$

а скалярная кривизна:

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{F}\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}F + \kappa\Big[(\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi)^2 - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\phi + \nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi R^{\beta\gamma}_{\gamma\alpha}\Big]. \tag{44}$$

Модифицированный тензор Эйнштейна $\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R}$ будет равен:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F}{F} + g_{\mu\nu}\frac{\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}F}{F} + \kappa\Big[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi - \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}\phi + \nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi R^{\beta}_{\mu\nu\alpha} - \\ - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Big((\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\phi)^2 - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\phi - \nabla^{\alpha}\phi\nabla^{\beta}\phi R_{\beta\alpha}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{45}$$

А значит, в общем случае уравнения движения для действия Сушкова будет содержать третьи производные скалярного поля из-за наличия в $\tilde{G}_{\mu\nu}$ слагаемых $-\frac{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F}{F} + g_{\mu\nu}\frac{\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}F}{F}$, которые, однако, исчезают в приближении слабого поля (т.к. в этом случае $\nabla_{\alpha}F = 0$). Остальные слагаемые при подстановке в уравнение движения:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} + \Big[\frac{\kappa}{2}\tilde{G}_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \kappa\tilde{R}_{(\mu\lambda}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} - \\ - \kappa\tilde{R}_{\lambda(\mu}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\Big] = 0,\end{aligned} \tag{46}$$

дают в приближении слабого поля те же уравнения, что и в метрическом формализме:

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} + \kappa\Big[\frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi R - 2\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{(\mu}\phi R^{\alpha}_{\nu)} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \nabla^{\alpha}\phi\nabla^{\beta}\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} - \nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\phi + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi\Box\phi + \\ + g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\phi\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi - \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 + \nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi R^{\alpha\beta})\Big] + \frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}.\end{aligned} \tag{47}$$

То есть в первом приближении при разложении по скалярному полю уравнения движения в обоих формализмах совпадают.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ СИЛЬНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь предел сильного поля, когда $|\phi| \gg 1$. В этом случае связность примет вид:

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Big(\delta^{\lambda}_{(\mu} - 2\frac{\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{(\mu}\phi}{G}\Big)\partial_{\nu)}\ln G - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Big(g^{\lambda\rho} - 2\frac{\nabla^{\lambda}\phi\nabla^{\rho}\phi}{G}\Big)\partial_{\rho}\ln G + 2\frac{\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi}{G}, \tag{48}$$

где мы ввели обозначение $G = \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi$. Уравнения движения в таком случае будут содержать дополнительные слагаемые помимо тех, что входят в метрические уравнения движения:

$$
\begin{gathered}
\kappa\Big[\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R - 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} - \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi + \\
+\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi - \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 + \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta}\Big) + \frac{3}{4}\frac{\nabla_\mu G\nabla_\nu G}{G} - 2\frac{\Box\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}G}{G} + \\
+2\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi}{G} - 4\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha G\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}G}{G^2} + \frac{7}{4}\frac{\nabla_\alpha G\nabla^\alpha G\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2} - \frac{5}{8}\frac{g_{\mu\nu}\nabla^\alpha G\nabla_\alpha G}{G} - \\
-g_{\mu\nu}\frac{\Box\phi\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha G}{G} - g_{\mu\nu}\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi}{G} + 4\frac{\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\nabla_\beta\phi}{G} - \\
-4\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_{(\mu}\phi R_{\nu)\alpha\beta\gamma}}{G} + 2\frac{\Box\phi\nabla_\alpha G\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2} + 2\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2} + \\
+\frac{5}{4}\frac{g_{\mu\nu}\nabla^\alpha G\nabla^\beta G\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi}{G^2} - g_{\mu\nu}\frac{\nabla_\alpha\nabla^\gamma\phi\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi}{G} + g_{\mu\nu}\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\delta\phi R_{\alpha\beta\gamma\delta}}{G} + \\
+g_{\mu\nu}\frac{\Box\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi}{G} - \frac{\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G} - \frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\alpha\beta}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G} - \\
-\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha G\nabla_\beta G\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^3} + \frac{(\Box\phi)^2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G}\Big] + \frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} = 0.
\end{gathered} \tag{49}
$$

Таким образом, для случая, когда доминирует скалярное поле, уравнения движения в двух формализмах существенно отличаются. Кроме того, можно заметить, что уравнения движения в общем случае содержат третьи производные скалярного поля. Высшие производные также могут появляться в уравнении Клейна–Гордона: третьи производные от метрики и вплоть до четвертых производных от скалярного поля. Они будут возникать в модели черной дыры с метрикой $ds^2 = -F(r)dt^2 + P(r)dr^2 + \rho(r)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ для поля $\phi(r)$, а также для плоской FRW модели с полем $\phi(t)$. Кроме того, в формализме Палатини дифференциальное тождество Бьянки примет вид $\nabla_{[\alpha|}R^\mu_{\beta|\gamma\nu]} = 0$, и при свертке его по μ и γ, а затем с $g^{\beta\nu}$ зависит от сверток тензора Римана, не сводящихся к тензору Риччи и скалярной кривизне, то есть уравнения Эйнштейна уже могут быть линейно независимыми, и для определения метрики потребуется большее число неизвестных функций, чем в метрическом формализме.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ВТОРОЙ МЕТРИКИ

Запишем явный вид второй метрики $h_{\mu\nu}$, для этого вычислим $detA = \left(1 + \frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)^3\left(1 - \frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)$, т.е. вторая метрика $h_{\mu\nu}$ будет сингулярна только в одной точке при $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = \frac{2}{\kappa}$ и эта сингулярность зависит от знака константы связи. Однако обратная к ней метрика $h^{\mu\nu}$, будет иметь две сингулярных точки $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = \pm\frac{2}{\kappa}$ и сингулярность не исчезает при любом знаке константы связи:

$$
h_{\mu\nu} = \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{4}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha})^2}g_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}}{1 - \frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}}}\kappa\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}, \tag{50}
$$

$$
h^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{4}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha})^2}} - \frac{\kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{4}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha})^2}\left(1 + \frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)}. \tag{51}
$$

Заметим, что в точке $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = -\frac{2}{\kappa}$ уравнение на связность принимает вид:

$$
\tilde{\nabla}_\lambda\left(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\right) = 0. \tag{52}
$$

Матрица $\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ вырождена, поэтому в точке $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = -\frac{2}{\kappa}$ связность оказывается рассогласованной с метрикой. Представляя связность как символы Кристоффеля + добавок $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + C^\lambda_{\mu\nu}$, перепишем уравнение (52):

$$
-C^\alpha_{\lambda\alpha}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} + 2C^{(\mu}_{\lambda\alpha}\phi^{,\nu)}\phi^{,\alpha} + \nabla_\lambda(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}) = 0. \tag{53}
$$

Решением этого уравнения, как несложно заметить, будут коэффициенты:

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = -2\frac{\nabla^{\lambda}\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\phi}{G} + \frac{1}{2}\frac{\nabla^{\lambda}G\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi}{G^2} - \left(\frac{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi}{G} + \frac{\Box\phi\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi}{G^2} - \frac{1}{2}\frac{\nabla_{\alpha}G\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi}{G^3}\right)\nabla^{\lambda}\phi. \quad (54)$$

Поскольку в нашем случае $G = \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = -\frac{2}{\kappa} = \text{const}$, то формула (54) упростится:

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = \kappa\nabla^{\lambda}\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\phi + \left(\frac{\kappa}{2}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - \frac{\kappa^2}{4}\Box\phi\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi\right)\nabla^{\lambda}\phi. \quad (55)$$

Таким образом, для особой точки $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = -\frac{2}{\kappa}$ связность не сингулярна, но неметрическая. Для второй особой точки $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = \frac{2}{\kappa}$ уравнение на связность принимает вид:

$$\tilde{\nabla}_{\lambda}\left(2g^{\mu\nu} - \kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\right) = 0, \quad (56)$$

и связность остается согласованной с метрикой, поскольку матрица $2g^{\mu\nu} - \kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ в общем случае не вырождена, но по-прежнему имеет особенность в точке $\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = \frac{2}{\kappa}$, а значит связность оказывается сингулярной в этой точке.

6. ПЛОСКАЯ FRW МОДЕЛЬ В РЕЖИМЕ МЕДЛЕННОГО СКАТЫВАНИЯ

Если теперь рассмотреть однородное поле $\phi(t)$ на фоне плоской FLRW геометрии, т.е. с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

то вводя замену

$$f = 1 - \frac{1}{2}\kappa\dot{\phi}^2, \qquad q = 1 + \frac{1}{2}\kappa\dot{\phi}^2, \quad (58)$$

после некоторых вычислений находим, что модифицированная метрика примет вид

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -q^{-1/2}f^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Для того, чтобы новая метрика оставалась действительной, константа связи κ должна удовлетворять условиям

$$-\frac{2}{\dot{\phi}^2} < \kappa < \frac{2}{\dot{\phi}^2}. \quad (60)$$

Таким образом, в режиме быстрого скатывания $|\dot{\phi}| \gg 1$ константа κ по модулю близка к нулю, а в случае медленного скатывания $0 < |\dot{\phi}| \ll 1$, $|\kappa|$ может принимать довольно большие значения.

ТЭИ принимает вид:

$$T_{00} = \tilde{G}_{00} + \frac{\kappa}{4}\tilde{R}\dot{\phi}^2 + \kappa\tilde{R}_{00}\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (61)$$

$$T_{ii} = \tilde{G}_{ii} - \frac{\kappa}{2}\tilde{G}_{ii}\dot{\phi}^2 + \frac{\kappa}{2}a^2\tilde{R}_{00}\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}a^2\dot{\phi}^2 - a^2V(\phi)\right). \quad (62)$$

Построим далее уравнение состояния для новой метрики и сравним его с предельным случаем плоской метрики FLRW. Для компоненты T_{00} ТЭИ материи находим

$$T_{00} = \rho_m = E\dot{H} + FH + GH^2 + I - \rho_{\phi}, \quad (63)$$

а для пространственной компоненты:

$$\frac{T_{ii}}{a^2} = p_m = A\dot{H} + BH + CH^2 + D - p_{\phi}, \quad (64)$$

где коэффициенты A, B, C, D, E, F, G и I выражаются через первые, вторые и третьи производные скалярного поля ϕ и в силу громоздкости мы здесь не будем приводить их значения в общем случае. Также введены обозначения для плотности и давления скалярного поля:

$$\rho_{\phi} = \frac{\varepsilon}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (65)$$

$$p_{\phi} = \frac{\varepsilon}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (66)$$

а $H = \frac{\dot{a}}{a}$ — параметр Хаббла.

Вводим полную плотность и полное давление:

$$\rho_{tot} = \rho_m + \rho_{\phi}, \quad (67)$$

$$p_{tot} = p_m + p_{\phi}, \quad (68)$$

получаем уравнение состояния

$$w_{eff} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}} = \frac{A\dot{H} + BH + CH^2 + D}{E\dot{H} + FH + GH^2 + I}. \qquad (69)$$

Модифицированные уравнения Фридмана:

$$\dot{H} = \frac{(CF - BG)H + Gw_{eff}\rho_{tot} - C\rho_{tot} + CI - DG}{AG - CE}, \qquad (70)$$

$$H = -\frac{1}{2}\frac{AF - BE \pm \sqrt{4(CE^2 - AEG)\rho_{tot}w_{eff} + 4(A^2G - ACE)\rho_{tot} + K}}{AG - CE}, \qquad (71)$$

где введено обозначение

$$K = AF^2 - 4A^2GI - 2ABEF + 4ACEI + \\ + 4ADEG + B^2E^2 - 4CDE^2. \qquad (72)$$

Для предельного случая когда $f = 1$, $q = 1$ имеем:

$$A = -2, \quad C = -3, \quad B = D = 0, \qquad (73)$$

$$G = 3, \quad E = F = I = 0. \qquad (74)$$

В таком случае наши уравнения сводятся к случаю ОТО плоской FLRW метрики:

$$H^2 = \frac{\rho_{tot}}{3}, \qquad (75)$$

$$p_{tot} = -2\dot{H} - 3H^2, \qquad (76)$$

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad (77)$$

и уравнение Эйнштейна

$$\frac{\dot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6}(\rho_{tot} + 3p_{tot}), \qquad (78)$$

как и в случае ОТО, что является проверкой проделанных вычислений.

Запишем уравнение Клейна–Гордона для скалярного поля сначала в случае ОТО ($\kappa = 0$):

$$(\kappa G_{00} - \varepsilon)\dot{\phi} - 3(\kappa\frac{G_{ii}}{a^2}H + \varepsilon H)\dot{\phi} - V' = 0, \qquad (79)$$

где для ОТО:

$$G_{00} = 3H^2, \qquad (80)$$

$$\frac{G_{ii}}{a^2} = -3H^2 - 2\dot{H}. \qquad (81)$$

В формализме Палатини со второй метрикой Уравнение Клейна–Гордона примет вид:

$$(\kappa\tilde{G}_{00} - \varepsilon)\dot{\phi} - 3H(\kappa\frac{\tilde{G}_{ii}}{a^2} + \varepsilon)\dot{\phi} + \kappa g^{\mu\alpha}\dot{\phi}\nabla_\mu\tilde{G}_{\alpha 0} - V' = 0, \qquad (82)$$

где величины с тильдами посчитаны для второй метрики $h_{\mu\nu}$, а знак ∇ обозначает ковариантную производную для исходной метрики $g_{\mu\nu}$.

Рассмотрим теперь подробнее режим медленного скатывания. В этом случае $0 < |\dot{\phi}| \ll 1$, а также будем считать, что $|\ddot{\phi}| \ll |\dot{\phi}|$. В этом приближении

$$A \approx -2 - \kappa\dot{\phi}^2,\ B \approx 0,\ C \approx -3 - \frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2,\ D \approx 0, \qquad (83)$$

$$E \approx 0,\ F \approx 0,\ G \approx 3 + \frac{9}{2}\kappa\dot{\phi}^2,\ I \approx 0. \qquad (84)$$

Тогда находим

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\rho_{tot}\Big[1 - \frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2 + 3w_{eff}(1 - \frac{1}{2}\kappa\dot{\phi}^2)\Big]. \qquad (85)$$

Для того, чтобы происходило расширение необходимо

$$w_{eff} \leq -\frac{1}{3}(1 - \kappa\dot{\phi}^2). \qquad (86)$$

Как было сказано ранее, в режиме медленного скатывания $|\kappa|$ может принимать большие значения и w_{eff} будет слегка отличаться от $-\frac{1}{3}$.

Модифицированное уравнение Фридмана в режиме медленного скатывания имеет вид:

$$H^2 = \frac{\rho_{tot}}{3}\Big[1 - \frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2\Big]. \qquad (87)$$

В уравнении Клейна–Гордона фигурирует вторая производная скалярного поля, а значит в режиме медленного скатывания в этом уравнении мы не можем ограничиться поправками порядка $\kappa\dot{\phi}^2$ к тензору Эйнштейна, а должны будем учитывать уже все степени $\dot{\phi}$ возникающие в этом уравнении. В силу громоздкости не будем приводить явный вид уравнения Клейна-Гордона, а выпишем лишь значения компонент тензора Эйнштейна, учитывающих все порядки по $\dot{\phi}$:

$$\tilde{G}_{00} \simeq 3H^2+\frac{3}{2}(3H^2+\dot{H})\kappa\dot{\phi}^2-\frac{3}{8}(11H^2+3\dot{H})\kappa^2\dot{\phi}^4-\frac{3}{8}(3H^2+\dot{H})\kappa^3\dot{\phi}^6+\frac{3}{16}(5H^2+2\dot{H})\kappa^4\dot{\phi}^8-\frac{3}{128}(H^2+\dot{H})\kappa^6\dot{\phi}^{12}, \quad (88)$$

$$\frac{\tilde{G}_{ii}}{a^2} \simeq -3H^2-2\dot{H}-\frac{1}{2}(3H^2+\dot{H})\kappa\dot{\phi}^2+\frac{1}{8}(15H^2+7\dot{H})\kappa^2\dot{\phi}^4+\frac{1}{8}(3H^2+\dot{H})\kappa^3\dot{\phi}^6-\frac{3}{16}H^2\kappa^4\dot{\phi}^8-\frac{3}{128}(H^2+\dot{H})\kappa^6\dot{\phi}^{12}. \quad (89)$$

Теперь остановимся на рассмотрении ранней Вселенной, когда скалярное поле управляет динамикой инфляции. В этом случае во Вселенной преобладает плотность скалярного поля, для описания подходит режим медленного скатывания и уравнение Фридмана приобретает форму:

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_p^2}\Big[1-\frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2\Big] \approx \frac{1}{3}\frac{V(\phi)}{M_p^2}, \quad (90)$$

где предполагается выполнение условия $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Здесь в уравнение была введена константа связи $8\pi G_N = M_p^2$. Из него следует, что

$$\dot{H} \simeq \frac{V'(\phi)\dot{\phi}}{6M_p^2 H} \simeq \frac{\sqrt{3}V'(\phi)\dot{\phi}}{6\sqrt{V(\phi)}M_p}. \quad (91)$$

Из уравнения Клейна-Гордона, полагая, что в режиме медленного скатывания $\ddot{\phi} \simeq 0$ и $|\ddot{H}| \ll |H\dot{H}| \ll |H^3|$, и учитывая значение $\tilde{G}_{ii}$, получаем:

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H\Big[\varepsilon-\kappa(2\dot{H}+3H^2)\Big]}. \quad (92)$$

Теперь, учитывая значение $\dot{\phi}$, можно записать:

$$\dot{H} \simeq -\frac{\Big(V'(\phi)\Big)^2}{18H^2M_p^2\Big[\varepsilon-\kappa(2\dot{H}+3H^2)\Big]}. \quad (93)$$

Число е-фолдингов в эпоху инфляции определяется по формуле $N = \ln(a_f/a_i) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$, где индексы i и f означают начало и конец инфляционной фазы. Из уравнений (92) и (90) можно заметить, что $Hdt = -\frac{V(\phi)}{V'(\phi)M_p^2}\Big[\varepsilon - \kappa(2\dot{H} + V(\phi)/M_p^2)\Big]d\phi$. Так как в течение инфляции значение $\dot{H}$ в режиме медленного скатывания, как это видно из (91) практически остается константой, то его можно вынести за знак интегрирования. Следовательно:

$$N \simeq -\frac{(\varepsilon-2\kappa\dot{H})}{M_p^2}\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}d\phi+\frac{\kappa}{M_p^4}\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{V^2(\phi)}{V'(\phi)}d\phi. \quad (94)$$

На самом деле, в силу того, что $V(\phi)/M_p^2 \simeq 3H^2$, и замечая, что в условиях ускоренного расширения $2\dot{H}+3H^2 = 2\frac{\ddot{a}}{a}+H^2 \gg H^2$, получаем, что коэффициент перед κ в формуле для Hdt больше нуля в течение почти всей эпохи инфляции. Можно приближенно записать:

$$N \simeq \frac{(\varepsilon-2\kappa\ddot{a}/a)}{M_p^2}\int_{\phi_f}^{\phi_i}\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}d\phi. \quad (95)$$

Если теперь ограничиться рассмотрением полей, для которых $\varepsilon = 1$, то из последнего уравнения можно заметить, что условие $\kappa > 0$ уменьшает количество инфляции по сравнению с классическим случаем ($\kappa = 0$), а условие $\kappa < 0$ наоборот увеличивает количество инфляции по сравнению с классическим пределом (ОТО).

В случае потенциалов со степенной зависимостью от поля $V(\phi) = V_0\phi^n$ число е-фолдингов в предположении $\phi_f = 0$ будет

$$N \simeq \frac{1-2\kappa\dot{H}}{2nM_p^2}\phi_i^2 - \frac{\kappa V_0}{M_p^4 n(n+2)}\phi_i^{n+2}. \quad (96)$$

Для классического случая ОТО $N^{cl} = \frac{\phi_i^2}{2nM_p^2}$, таким образом, мы можем выразить N через N^{cl} следующим образом:

$$N \simeq \Big(1-2\kappa\dot{H}\frac{2\kappa V(\phi_i)}{M_p^2(n+2)}\Big)N^{cl}, \quad (97)$$

откуда, учитывая (90), несложно заметить, что $N > N^{cl}$ при $\kappa < 0$ и $N < N^{cl}$ при $\kappa > 0$.

Введем один из параметров медленного скатывания ϵ_v

$$\epsilon_v = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (98)$$

который в режиме медленного скатывания должен удовлетворять условию $\epsilon_v \ll 1$. В классическом случае ОТО ($\kappa = 0$) этот параметр равен $\epsilon_v^{cl} = \frac{M_p^2 n^2}{2\phi^2}$, а значит в случае ОТО поле ϕ должно удовлетворять условию $\phi \gg M_p$ (считая $|n| > \sqrt{2}$), то есть имеет место «суперпланковский» режим. В нашем же случае $\kappa \neq 0$ из условия $\epsilon_v < 1$ следует

$$\frac{|n|M_p}{\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa(2\dot{H}+3H^2)}} < \phi. \quad (99)$$

Из последнего условия видно, что при $\kappa < 0$ «суперпланковский» режим можно избежать, если

$$\kappa < -\frac{(n^2-2)}{2(2\dot{H}+3H^2)}. \tag{100}$$

Так, например, для потенциалов типа $V \sim \phi^{-2}$ и $V \sim \phi^2$ это условие дает $\kappa < -\frac{1}{2\dot{H}+3H^2}$, а для потенциала $V \sim \phi^4$ - $\kappa < -\frac{7}{2\dot{H}+3H^2}$.

При $\kappa > 0$ нет возможности избежать «суперпланковский» режим, и, как видно из (100), эта проблема только усугубляется.

7. ДЕЙСТВИЕ ЭЙНШТЕЙНА–ЧЕРНА–САЙМОНСА

Запишем действие Эйнштейна–Черна–Саймонса:

$$S_{ECS} = \int d^4x\sqrt{-g}\times$$
$$\times\left(\kappa\tilde{R} + \frac{\alpha}{4}\phi^*\tilde{R}\tilde{R} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\phi\tilde{\nabla}_\beta\phi - V(\phi)\right), \tag{101}$$

где величины с тильдами относятся к формализму первого порядка, и

$${}^*\tilde{R}\tilde{R} = {}^*\,\tilde{R}^{\alpha\cdot\gamma\delta}_{\cdot\beta\cdot\cdot}\tilde{R}^{\beta}_{\cdot\alpha\gamma\delta}, \qquad {}^*\tilde{R}^{\alpha\cdot\gamma\delta}_{\cdot\beta\cdot\cdot} = \frac{1}{2}\epsilon^{\gamma\delta\rho\sigma}\tilde{R}^{\alpha}_{\cdot\beta\rho\sigma}. \tag{102}$$

Будем рассматривать связность, симметричную по двум последним индексам, и запишем:

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + C^\lambda_{\mu\nu}. \tag{103}$$

Уравнения движения в формализме первого порядка для данного действия:

$$\alpha\epsilon^{\alpha\beta\gamma(\mu}\tilde{R}^{\nu)}_{\cdot\lambda\beta\gamma}\nabla_\alpha\phi +$$
$$+\kappa\left(C^{(\mu}_{\lambda\beta}g^{\nu)\beta} - \delta^{(\mu}_{\lambda}g^{\alpha\beta}C^{\nu)}_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu}C^{\alpha}_{\alpha\lambda}\right) = 0, \tag{104}$$

$$\kappa\tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_\mu\phi\tilde{\nabla}_\nu\phi + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\tilde{\nabla}^\alpha\phi\tilde{\nabla}_\alpha\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi) = 0, \tag{105}$$

$$\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}^\alpha\phi = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} - \frac{\alpha}{4}{}^*\tilde{R}\tilde{R}. \tag{106}$$

Из уравнения вариации по метрике можно выразить тензор Риччи:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + g_{\mu\nu}V(\phi)\right). \tag{107}$$

Из уравнения вариации по связности можем найти неметричность:

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \frac{\alpha}{\kappa}\nabla_\alpha\phi\left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma(\mu}\tilde{R}^{\nu)\lambda}_{\cdot\cdot\beta\gamma} - \frac{2}{3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma(\mu}g^{\nu)\lambda}\tilde{R}^{\delta}_{\cdot\delta\beta\gamma} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}g^{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\tilde{R}^{\delta}_{\cdot\delta\beta\gamma}\right). \tag{108}$$

Можно заметить, что найденному тензору Риччи может соответствовать, например, следующий тензор Римана:

$$\tilde{R}^\alpha_{\cdot\mu\beta\nu} = \frac{1}{6\kappa}\left(\delta^\alpha_{[\beta}\nabla_{\nu]}\phi\nabla_\mu\phi + \delta^\alpha_{[\beta}g_{\nu]\mu}V(\phi)\right). \tag{109}$$

Для такого тензора Римана член Черна-Саймонса обращается в нуль, а связность совпадает со связностью Леви-Чивиты, таким образом, мы приходим к стандартому действию Эйнштейна с минимально связанным скалярным полем. Встает вопрос: справедливо ли утверждение о том, что член Черна-Саймонса исчезает из действия в формализме Палатини в общем случае? Очевидно, что по виду тензора Риччи нельзя однозначно восстановить вид тензора Римана, но другой вид тензора Римана, свертка которого удовлетворяла бы (107) можно построить только если включить в него дополнительные тензорные поля, которые нужно будет антисимметризовать по некоторым индексам с полями $g_{\mu\nu}$, $\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ (в силу антисимметричности тензора Римана по последним двум индексам), и, по-видимому, на эти новые поля надо будет накладывать дополнительные условия. Например, если попробовать построить тензор Римана в виде:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,[\nu}\frac{X^\alpha_{\beta]}}{X^\rho_\rho} + \frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu[\nu}\frac{Y^\alpha_{\beta]}}{Y^\rho_\rho} + A_{\mu[\nu}\left(\frac{B^\alpha_{\beta]}}{B^\rho_\rho} - \frac{C^\alpha_{\beta]}}{C^\rho_\rho}\right), \tag{110}$$

где X^α_β, Y^α_β, $A_{\mu\nu}$, B^α_β, C^α_β — дополнительные поля (пока нам не известны), очевидно, что на их роль не подходят различные комбинации $g_{\mu\nu}$ и $\phi_{,\lambda}$, так как при антисимметризации они либо просто зануляются в тензоре Римана, либо не удовлетворяют (107). Тогда необходимо потребовать:

$$\frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\alpha}\frac{X^\alpha_\nu}{X^\rho_\rho} + \frac{1}{2}V(\phi)\frac{Y_{\mu\nu}}{Y^\rho_\rho} + A_{\mu\alpha}\left(\frac{B^\alpha_\nu}{B^\rho_\rho} - \frac{C^\alpha_\nu}{C^\rho_\rho}\right) = 0, \tag{111}$$

причем эти поля также нельзя восстановить из уравнения на скалярное поле ϕ, так как они входят в виде сверток в член Черна–Саймонса. К тому же не совсем ясна физическая причина возникновения дополнительных полей в теории. Таким образом, из набора исходных полей теории $g_{\mu\nu}$ и $\phi_{,\lambda}$ удается построить тензор Римана, от которого действие (101) сводится к действию Эйнштейна–Гильберта.

Из уравнения (108) также можно заметить, что в случае, когда неметричность равна нулю, последние два члена в этом уравнении зануляются в силу симметрийных свойств тензора Римана для связности Леви–Чивиты, откуда следует, что первый член в этом уравнении тождественно равен нулю, а в случае произвольного скалярного поля получаем условие:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma(\mu}\tilde{R}^{\nu)\lambda}_{\cdot\cdot\beta\gamma} = 0, \tag{112}$$

при использовании которого получаем следующее выражение для члена Черна–Саймонса:

$$\epsilon^{\gamma\rho\sigma\delta}R^\alpha_{\beta\rho\sigma}R^\beta_{\alpha\gamma\delta} = \frac{1}{3}\epsilon^{\gamma\rho\sigma\delta}R^\alpha_{\beta\rho\sigma}(R^\beta_{\alpha\gamma\delta} + R^\beta_{\delta\alpha\gamma} + R^\beta_{\gamma\delta\alpha}) = 0, \tag{113}$$

где выражение в скобках обращается в нуль в силу тождества Риччи. Таким образом, в формализме Палатини из условия отсутствия неметричности получаем, что действие Черна–Саймонса сводится к действию Эйнштейна–Гильберта, минимально связанному со скалярным полем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было проведено исследование теории с неминимально–связанным скалярным полем $G_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ в формализме Палатини. Найдено, что в режиме слабой неминимальной связи получаются точно такие же уравнения как и в метрическом формализме. В случае когда неминимальная связь играет доминирующую роль, уравнения движения заметно отличаются от метрических и кроме того в них появляются высшие производные, что делает теорию трудоемкой для исследования. Однако для произвольного значения поля в данной работе было показано, что кручение из теории можно исключить калибровочным преобразованием, аналогично тому как это делалось для действия Эйнштейна-Гильберта [25], поэтому везде использовалась симметричная по нижним индексам связность. В формализме первого порядка помимо физической метрики появилась вторая метрика, которая в отличие от большинства предыдущих работ по формализму Палатини [22, 26, 29] оказалась не конформно связанной с метрикой. В ней присутствует дисформный член, это и послужило причиной возникновения производных выше второй степени в теории [23]. Далее, для плоской FRW модели в режиме медленного скатывания найдено условие расширения и посчитана поправка к числу e-фолдингов по сравнению с ОТО. Также было показано, что в режиме медленного скатывания при $\kappa < 0$ возможно избежать возникновения «суперпланковского» режима. Эти результаты отличаются от полученных в [28], так как в той работе не было учтено наличие дисформного члена во второй метрике. Было также рассмотрено действие Эйнштейна-Черна-Саймонса, для общего случая найдено как неметричность выражается через тензор Римана. Для специального выбора тензора Римана (которое следует из уравнения Эйнштейна) показано, что член Черна-Саймонса зануляется и действие сводится к действию Эйнштейна-Гильберта. То же самое происходит, если наложить условие отсутствия неметричности.

Исследование выполнено на кафедре теоретической физики. Автор благодарит профессора Д.В. Гальцова за руководством работой. Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований в рамках проекта 17-02-01299 и фондом развития теоретической физики и математики «Базис».

[1] *Zlatev I., Wang L.M., Steinhardt P.J.* Phys. Rev. Lett. 1999, **82**. P. 896. [astro-ph/9807002].
[2] *Nojiri S., Odintsov S.D.* Phys. Lett. B. 2003. **562**. P. 147. [hep-th/0303117].
[3] *Tseytlin A.A.* Phys. Lett. B. 1986. **176**. P. 92.
[4] *Nojiri S., Odintsov S.D.* eConf C. 2006. **0602061**. P. 06. [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2007. **4**. P. 115]. [hep-th/0601213].
[5] *Sushkov S.V.* Phys. Rev. D. 2009. **80**. 103505. [arXiv:0910.0980 [gr-qc]].
[6] *Sushkov S.V., Korolev R.* Class. Quant. Grav. 2012. **29** 085008. [arXiv:1111.3415 [gr-qc]].
[7] *Sushkov S.* Phys. Rev. D. 2012. **85**. 123520. [arXiv:1204.6372 [gr-qc]].
[8] *Granda L.N.* Class. Quant. Grav. 2011. textbf28. 025006. [arXiv:1009.3964 [hep-th]].
[9] *Granda L.N., Cardona W.* JCAP 2010. **1007**. P. 021. [arXiv:1005.2716 [hep-th]].
[10] *Charmousis C., Copeland E.J., Padilla A., Saffin P.M.* Phys. Rev. Lett. 2012. **108**, 051101. [arXiv:1106.2000 [hep-th]].
[11] *Amendola L.* Phys. Lett. B. 1993. **301**. P. 175. [gr-qc/9302010].
[12] *Capozziello S., Lambiase G.* Gen. Rel. Grav. 1999. **31**. P. 1005. [gr-qc/9901051].
[13] *Capozziello S., Lambiase G., Schmidt H.J.* Annalen Phys. 2000. **9**. P. 39. [gr-qc/9906051].
[14] *Palatini A.* Rend. Circ. Mat. Palermo. 1919. **43**.
[15] *Ferraris M., Kijowski J.* Gen. Rel. Grav. 1982. **14**. P. 165.
[16] *Capozziello S., Darabi F., Vernieri D.* Mod. Phys. Lett. A. 2011. **26**. P. 65. [arXiv:1006.0454 [gr-qc]].
[17] *Capozziello S., De Laurentis M.* Found. Phys. 2010. **40**. P. 867.
[18] *Lovelock D.* J. Math. Phys. 1971. **12**. P. 498. [arXiv:0910.2881 [hep-th]].
[19] *Exirifard Q., Sheikh-Jabbari M.M.* Phys. Lett. B. 2008. **661**. P. 158. [arXiv:0705.1879 [hep-th]].
[20] *Borunda M., Janssen B., Bastero-Gil M.* JCAP 2008. **0811**. P. 008. [arXiv:0804.4440 [hep-th]].
[21] *Horndeski G.W.* Int. J. Theor. Phys. 1974. **10**. P. 363.
[22] *Luo X., Wu P., Yu H.* Astrophys. Space Sci. 2014. **350**, N 2. P. 831.
[23] *Bekenstein J.D.* Phys. Rev. D. 1993. **48**. P. 3641. [gr-qc/9211017].
[24] *Julia B., Silva S.* Class. Quant. Grav. 1998. **15**. P. 2173. [gr-qc/9804029].
[25] *Bernal A.N., Janssen B., Jimenez-Cano A., Orejuela J.A., Sanchez M., Sanchez-Moreno P.* Phys. Lett. B. 2017. **768**. P. 280. [arXiv:1606.08756 [gr-qc]].
[26] *Wang P., Wu P., Yu H.* Eur. Phys. J. C. 2012. **72**. P. 2245. [arXiv:1301.5832 [gr-qc]].
[27] *Ortin T.* Gravity and strings. Cambridge University, Cambridge University Press, 2004.
[28] *Gumjudpai B., Kaewkhao N.* arXiv:1608.04014 [gr-qc].
[29] *Bauer F., Demir D.A.* Phys. Lett. B. 2008. **665**. P. 222. [arXiv:0803.2664 [hep-ph]].
[30] *Carroll S.M., De Felice A., Duvvuri V., Easson D.A., Trodden M., Turner M.S.* Phys. Rev. D. 2005. **71**.

063513. [astro-ph/0410031].
[31] *Amarzguioui M., Elgaroy O., Mota D. F., Multamaki T.* Astron. Astrophys. 2006. **454**. P. 707.
[32] *Meng X., Wang P.* Class. Quant. Grav. 2004. **21**. P. 951. [astro-ph/0308031].
[33] *Meng X., Wang P.* Class. Quant. Grav. 2003. **20**. P. 4949. [astro-ph/0307354].
[34] *Allemandi G., Borowiec A., Francaviglia M.* Phys. Rev. D. 2004. **70**. 043524. [hep-th/0403264].
[35] *Meng X. H., Wang P.* Phys. Lett. B. 2004. **584**. P. 1. [hep-th/0309062].
[36] *Vollick D. N.* Class. Quant. Grav. 2004. **21**. P. 3813. [gr-qc/0312041].
[37] *Meng X. H., Wang P.* Gen. Rel. Grav. 2004. **36**. P. 2673. [astro-ph/0308284].
[38] *Meng X. H., Wang P.* Class. Quant. Grav. 2005. **22**. P. 23. [gr-qc/0411007].
[39] *Sotiriou T. P.* Phys. Rev. D. 2006. **73**. 063515. [gr-qc/0509029].
[40] *Kremer G. M., Alves D. S. M.* Phys. Rev. D. 2004. **70**. 023503. [gr-qc/0404082].
[41] *Capozziello S., Cardone V. F., Francaviglia M.* Gen. Rel. Grav. 2006. **38**. P. 711. [astro-ph/0410135].
[42] *Borowiec A.* [arXiv:0812.4383 [gr-qc]].
[43] *Harko T., Koivisto T. S., Lobo F. S. N.* Mod. Phys. Lett. A. 2011. **26**. P. 1467. [arXiv:1007.4415 [gr-qc]].
[44] *Bertolami O., Boehmer C. G., Harko T., Lobo F. S. N.* Phys. Rev. D. 2007. **75**. 104016. [arXiv:0704.1733 [gr-qc]].
[45] Harko T. Phys. Lett. B. 2008. **669**. P. 376. [arXiv:0810.0742 [gr-qc]].
[46] *Brihaye Y., Radu E.* Phys. Lett. B. 2017. **764**. P. 300. [arXiv:1610.09952 [gr-qc]].

Non-minimal scalar theories in Palatini formalism

S. M. Zhidkova

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia
E-mail: kfizik@yandex.ru.

We show that for a non-minimally coupled theory containing derivatives of the scalar field (Sushkov's action) in Palatini formalism the connection turns out to be metrically associated with the «second» metric, which is non–conformally expressed through the physical metric. We obtain that in the first order approximation in a weak scalar field regime the effective Energy-momentum tensors coincide in the 1st and 2nd order formalisms, but in general they can differ and higher derivatives appear in the equations of motion. We also prove that in this theory, as in the non-minimally coupled theory $R\phi^2$, as well as for theories $f(R)$, torsion can be reduced to a gauge transformation with respect to which the action is invariant. We also investigated the Einstein–Chern–Simons action and determined that in the absence of nonmetricity it reduces to the Einstein-Hilbert action with the minimally coupled scalar field.

PACS: 04.20.Jb, 04.50.+h, 04.65.+e
Keywords: Palatini formalism, non-minimal coupling, the second metric, torsion.
Received 13 May 2018.

Сведения об авторе

Жидкова Софья Мохамедовна — магистрант; e-mail: kfizik@yandex.ru.