

## Эмпирическое восстановление математических моделей линейного измерительного преобразователя и оптимального вычислительного преобразователя

Д. А. Балакин\*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Статья поступила 07.05.2018; Подписана в печать 04.07.2018)

Как следует из теории измерительно-вычислительных систем, для достижения максимальной точности интерпретации измерений требования к измерительному преобразователю (ИП), формирующему результат измерения в ходе взаимодействия с измеряемым объектом, существенно зависят от того, как он будет функционировать — как таковой или в составе измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП). Во втором случае максимальную точность интерпретации должен обеспечивать ИВП, рассматриваемый как средство измерения назначения, свойственного измерениям на «идеальном» для исследователя приборе.

Как правило, точная математическая модель ИП и, следовательно, обеспечивающий предельную точность ИВП как средства измерения алгоритм, реализуемый вычислительным преобразователем, исследователю неизвестны, но он может выполнить на ИП серию тестовых измерений известных объектов. Цель настоящей работы заключается в синтезе с помощью тестовых измерений как отклика ИП, математическая модель которого неизвестна, так и оптимальной интерпретации измерения, т. е. выходного сигнала ИВП.

PACS: 02.50.Le

УДК: 519.25.

Ключевые слова: редукция измерения, оптимальные решения, измерительно-вычислительные системы, тестовые измерения.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим типичную схему измерений, в которой в результате взаимодействия измеряемого объекта, среды и измерительного преобразователя (ИП) на входе ИП формируется (изменяемый) сигнал  $f$ , принадлежащий конечномерному евклидову пространству  $\mathcal{F}$ , несущий информацию об измеряемом объекте и среде [1–3]. ИП преобразует  $f$  в сигнал

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где  $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$  — оператор, моделирующий физические процессы в ИП (и далее обозначающий моделируемый им ИП), взаимодействующем с измеряемым объектом и со средой, определяющий преобразование  $f$  в сигнал  $Af$ ,  $\mathcal{X}$  — конечномерное евклидово пространство значений сигнала  $\xi$ ,  $\nu$  — погрешность, шум ИП. Сигнал  $\xi$  поступает на вход вычислительного преобразователя (ВП), который преобразует  $\xi$  в выходной сигнал измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП). Предположение о конечномерности пространств  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  делается для упрощения изложения и не является принципиальным. О случае бесконечномерных  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{X}$  или  $\mathcal{U}$  см. [1, гл. 10], [4], [2, гл. 4].

Результат измерения зависит от параметров измеряемого объекта, взаимодействующего с ИП, значения которых могут быть существенно искажены этим взаимодействием. Исследователя же, как правило, интересуют значения параметров исследуемого объекта, не

возмущенного измерением. Связь параметров измеряемого и исследуемого объектов описывается моделью идеального ИП, заданной оператором  $U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ , где  $\mathcal{U}$  — конечномерное евклидово пространство значений интересующих исследователя параметров. На вход идеального ИП поступает тот же сигнал, что и на вход реального ИП, но на его выходе сигнал  $Uf$  равен значениям параметров исследуемого, а не измеряемого, объекта. Задача редукции измерения  $\xi$  к виду, свойственному измерению на идеальном ИП  $U$ , состоит в нахождении оператора редукции  $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , реализуемого ВП, для которого  $R\xi$  — в известном смысле наиболее точная версия значения  $Uf$ .

Пусть в (1)  $f$  — априори произвольный вектор, принадлежащий  $\mathcal{F}$ ,  $\nu$  — случайный вектор, принимающий значения в  $\mathcal{X}$ , имеющий математическое ожидание  $\mathbb{E}\nu = 0$  и невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\nu : \forall x \in \mathcal{X} \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\nu(x, \nu)$ . Тогда линейный оператор  $R_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  редукции определяется как минимизирующий с.к. погрешность интерпретации  $R\xi$  как результата  $Uf$  измерения на идеальном ИП:  $h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} \|R(\xi) - Uf\|^2 \sim \min_{R: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}}$ . Эта погрешность, если  $U(I - A^{-1}A) = 0$ , где  $^{-1}$  обозначает псевдообращение, минимальна [1] при  $R$ , равном оператору редукции

$$R_* = U(\Sigma_\nu^{-1/2}A)^{-1}\Sigma_\nu^{-1/2}, \quad (2)$$

и равна  $h(R_*, U) = \text{tr}(U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}U^*)$ . Если же это условие не выполнено, то эта погрешность равна бесконечности.

Если же оператор  $\Sigma_\nu$  неизвестен, но известно ограничение на  $\mathbb{E}\|\nu\|^2 = \text{tr} \Sigma_\nu \leq \delta^2$ , см. [1, §1.7] и [5],

\*E-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru

то наиболее точная несмещённая версия значения  $Uf$  есть

$$UA^{-1}\xi, \quad (3)$$

и её с. к. погрешность не превосходит  $\delta^2 \|U(A^*A)^{-1}U^*\|$ . Условием конечности её с. к. погрешности также является  $U(I - A^{-1}A) = 0$ .

Цель настоящей работы — исследование случая, когда  $A$  исследователю неизвестен, за исключением, быть может, априорной информации о матрице  $A$  (например, «матрица  $A$  — симметричная») или о симметрии  $A$  по отношению к определённым преобразованиям, но исследователю доступны данные тестовых измерений. При этом возникают различные задачи:

1. оценивание отклика  $Af$  ИП  $A$  на сигнал  $f$ ;
2. оценивание ИП  $A$  как оператора;
3. оценивание интересующей исследователя характеристики  $Uf$  исследуемого объекта по результату измерения  $\xi$ ;
4. оценивание реализуемого оптимальным ВП оператора  $R_*$  редукции.

Первые два типа задач рассматриваются в разделе 1, последние два — в разделе 2. Заметим, что, как правило, используемый для интерпретации измерений ВП выбирается соответствующим оценённому по тестовым измерениям  $A$  [6], а не непосредственно по тестовым измерениям. В этом случае результат интерпретации не оптимален, ибо требования к оценке ИП оказываются существенно различными в зависимости от того, как используется выходной сигнал ИП.

**Пример 1.** Пусть интересующая исследователя величина  $f$  измеряется с неизвестным «коэффициентом усиления»  $a$  и со случайной погрешностью  $\nu$ , имеющей нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , т. е. результат измерения  $\xi = af + \nu \sim \mathcal{N}(af, \sigma^2)$ . Если значение  $a$  известно, то эффективной (в классе несмещённых оценок, см. [7]) оценкой  $f$  является  $\xi/a$ . Незвестный коэффициент  $a$  оценивается по результатам тестовых измерений  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  одной и той же величины  $g$ , причём погрешности измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  независимы в совокупности и имеют нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . В этом случае  $\hat{a} = \sum_{i=1}^s \zeta_i / g s$  — эффективная оценка  $a$ , причём  $\hat{a} \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2 / g^2 s)$ , а  $\hat{a}f$  — эффективная оценка результата измерения. Но, поскольку  $E\hat{a}^{-1}$  не существует, оценка  $\xi/\hat{a}$  может сколь угодно сильно отклоняться от  $f$ .

Задача 3 близка к решаемой различными вариантами метода слепой деконволюции [8–17]. В предлагаемом далее, в разделе 2, методе её решения требуется проведение отдельных *тестовых* измерений (известного входного сигнала). С другой стороны, в отличие от метода слепой деконволюции, не требуется, чтобы оператор  $A$  был типа свёртки, не налагаются априорные ограничения на вид  $A$ , при котором задача разрешима (но учёт таких априорных ограничений в рассматриваемом методе возможен, см. замечание 4). Также не

требуются априорные предположения об измеряемом сигнале и отсутствуют ограничения на погрешность измерения.

В [18–28] задача 3 рассматривается в похожей постановке (также требуется построить оптимальную оценку  $Uf$  по результату измерения  $\xi$  и результатам тестовых измерений), но при случайном входном сигнале  $f$ . Кроме того, используемое в [25–28] условие инвариантности заменяется более общим (см. замечание 4). В [29–31] задача 3 также рассматривается в похожей постановке, но в случае, если  $f$  и  $\nu$  — реализации нечётких векторов [32], а под оптимальной оценкой понимается оценка максимальной возможности, т. е. значение интересующей исследователя характеристики  $Uf$ , возможность которого максимальна при наблюдаемых значениях  $\xi$  и  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ . В частности, в [29, 31] оценка получена при предположении, что нечёткие векторы шума  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\dim \mathcal{X}})$ , входного сигнала  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\dim \mathcal{F}})$ , шумов тестовых измерений  $\mu_1 = (\mu_{11}, \dots, \mu_{1 \dim \mathcal{X}}), \dots, \mu_s = (\mu_{s1}, \dots, \mu_{s \dim \mathcal{X}})$  и нечёткой матрицы  $\Lambda$  оператора  $A$  независимы и имеют распределения возможно-

$$\begin{aligned} g^\nu(x_1, \dots, x_{\dim \mathcal{X}}) &= g_0 \left( \min_{j=1, \dots, \dim \mathcal{X}} |x_j| / \sigma_j \right), \\ g^\varphi(f_1, \dots, f_{\dim \mathcal{F}}) &= g_0 \left( \min_{i=1, \dots, \dim \mathcal{F}} |f_i - f_{0,i}| / \sigma_i^{(\varphi)} \right), \\ g^{\mu_1, \dots, \mu_s}(x_{11}, \dots, x_{1 \dim \mathcal{X}}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{s \dim \mathcal{X}}) &= \\ &= g_0 \left( \min_{j=1, \dots, \dim \mathcal{X}; k=1, \dots, s} |x_{kj}| / \sigma_{kj} \right), \quad g^\Lambda(A_{11}, \dots, A_{nN}) = \\ &= g_0 \left( \min_{i=1, \dots, \dim \mathcal{F}, j=1, \dots, \dim \mathcal{X}} |A_{ji} - A_{0,ji}| / \sigma_{ji}^{(A)} \right), \end{aligned}$$

соответственно, где  $g_0(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  — строго монотонно убывающая произвольная функция,  $g_0(0) = 1$ ,  $f_{0,i}$  и  $A_{0,ji}$ ,  $i = 1, \dots, \dim \mathcal{F}$ ,  $j = 1, \dots, \dim \mathcal{X}$  определяют наиболее возможные значения вектора  $\varphi$  и матрицы  $\Lambda$ , а также получено условие, определяющее оценку максимальной возможности в общем случае. В [30, 31] предполагается, что нечёткие векторы шума, входного сигнала, шумов тестовых измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  и нечёткой матрицы  $\Lambda$  оператора  $A$  независимы и имеют распределения возможностей  $g^\nu(x) = g_0(\|x\|^2)$ ,  $g^\varphi(f) \equiv 1$  (входной сигнал априори произволен),  $g^{\mu_1, \dots, \mu_s}(\mu_1, \dots, \mu_s) = g_0 \left( \sum_{k=1}^s \|\mu_k\|^2 \right)$ ,  $g^\Lambda(A) \equiv 1$  ( $A$  априори произволен).

В [33] рассматривается вероятностная задача минимизации погрешности синтеза прибора  $U$ , см. [1, гл. 9], а не погрешности синтеза  $Uf$ , как ниже в разделе 2, а также не рассматривается учёт априорной информации об ИП. Иными словами, в [33] определяется оператор  $R$ , не минимизирующий с. к. погрешность  $E\|R\xi - Uf\|^2$ , а минимизирующий отклонение  $RA$  от  $U$  (в смысле нормы Гильберта–Шмидта) при ограничении на уровень шума  $E\|R\nu\|^2$  на выходе синтезированного прибора.

В отличие от перечисленных работ, в настоящей работе в разделах 1 и 2 рассматривается обобщение предложенных в [34] методов решения задач 1–4 в вероятностной постановке, качество оценки определяется её с.к. погрешностью, а модель ИП  $A$  и его входной сигнал считаются произвольными элементами заданных множеств. В отличие от [34], в настоящей работе учитывается искажение ИП объектов, с которыми он взаимодействует в процессе измерения, и допускается случайная погрешность значений характеристик тестовых объектов.

## 1. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОТКЛИКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В этом разделе рассматривается задача восстановления отклика линейного ИП [1, §6.5.4], в которой модель ИП априори неизвестна, но в модели измерений исследователю доступны зашумлённые отклики этого ИП на приготовленные им тестовые объекты *как элементы модели измерений на этом ИП*. В этой задаче исследователя интересует лишь отклик ИП на заданный объект. Исследователя не интересует искажение объекта, обусловленное взаимодействием с ИП, как таковое, хотя он понимает, что оно способно исказить объект и поэтому повлиять на отклик ИП. Чтобы подчеркнуть отличие решаемой задачи и доступной исследователю информации, в этом разделе используется термин «отклик (ИП) на объект» для обозначения сигнала, формируемого на выходе ИП при взаимодействии с каким-либо объектом.

В случае восстановления отклика ИП из класса всех априори возможных ИП выбирается тот, который лучше всего прогнозирует результаты тестовых измерений. Для этого решается задача редукции тестовых измерений к параметрам ИП как элемента класса априори возможных ИП.

«Заданный объект» и «тестовые объекты, приготовленные исследователем» означает, что исследователь может указать значения характеристики этих объектов, моделирующие эти объекты до их взаимодействия с ИП. Для этого он может приготовить их с помощью некоторого детерминированного процесса с задаваемыми им начальными условиями, которые он может выбрать в качестве значений характеристик тестовых объектов, что, однако, часто трудозатратно с инженерно-физической точки зрения. Примерами такого рода приготовленных объектов являются нормальные элементы при измерении напряжения и реперные точки температурных шкал (например, тройная точка воды) при измерении температуры. Для возможности прогнозирования отклика априори произвольного ИП на объект значения этой характеристики должны так описывать исследуемый и тестовые объекты, чтобы исследователь, зная значение характеристики объекта и модель любого возможного ИП, мог указать его отклик на этот объект.

Поскольку исследователь знает лишь указанную характеристику объекта и не знает, как ИП его искажает в процессе измерения, имеет смысл восстанавливать зависимость интересующего исследователя отклика  $x$  на объект от значения  $u$  этой характеристики объекта, так как сам объект во время его взаимодействия с ИП не наблюдается исследователем и не интересует его. В отсутствие шума для линейного ИП эта связь является линейной:  $x = Bu$ , где оператор  $B$  известен исследователю *лишь с точностью до его априорного представления* (5) и подлежит восстановлению. Оператор  $B$  описывает формирование отклика ИП в результате его взаимодействия с объектом с учётом искажения объекта этим же ИП.

*Замечание 1.* В предлагаемом методе предполагается, что ИП стабилен (например, ИП не изнашивается). Если это не так, исследователь должен указать модель эволюции и учесть это в представлении (5) информации об ИП, см. [1, §6.3], а также [35, 36]. При отсутствии такой модели, задача восстановления ИП, очевидно, неразрешима.

**Пример 2.** Пусть с помощью термпар регистрируется распределение температуры  $f$  в слое жидкости, и исследователь использует в качестве характеристики жидкости распределение её температуры до взаимодействия жидкости с термпарами и обусловленного этим изменения распределения температур. При этом модель термпары как измерителя температуры исследователю неизвестна, но известны истинные, невозмущённые измерениями, распределения температур измеряемого объекта и тестовых объектов, которые должны быть определены, например, согласно «стандартной» схеме редукции. Тогда оператор  $B$  описывает связь распределения температуры жидкости до помещения в неё термпар и возникновения электрических сигналов, сформированных термпарами некоторое время спустя после помещения их в жидкость. Если ИП заведомо не искажает при взаимодействии объект исследования, то в качестве характеристики объекта можно использовать его состояние и при этом  $B = A$ , где оператор  $A$  моделирует ИП.

Аналогично,  $s$  приготовленных исследователем тестовых объектов могут быть описаны лишь посредством значений характеристик  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ , моделирующих тестовые объекты до их взаимодействия с ИП. Предполагается, что  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$  заранее известны исследователю, но, возможно, со случайными погрешностями  $\lambda_1 = v_1 - \bar{v}_1, \dots, \lambda_s = v_s - \bar{v}_s$ , где  $v_1, \dots, v_s$  — известные исследователю поражённые шумом версии  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ ,  $\mathbb{E}\lambda_1 = \dots = \mathbb{E}\lambda_s = 0$ , ковариационный оператор  $\Sigma_\lambda$  случайного вектора  $\lambda = (\lambda_1^T, \dots, \lambda_s^T)^T$  имеет конечный след.

Итак, исследователя интересует синтез наиболее точной оценки отклика  $Bu$  неизвестного ИП на объект, характеристика которого до взаимодействия с ИП равна  $u$ . Ему доступны зашумлённые отклики  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  ИП на приготовленные им тестовые объекты (далее — тестовые отклики), характеризующие

до взаимодействия с ИП векторами  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ , поражённые случайными погрешностями  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  версии  $v_1 = \bar{v}_1 + \lambda_1, \dots, v_s = \bar{v}_s + \lambda_s$  которых известны исследователю. Зашумлённые отклики формируются по схеме

$$\zeta_i = B\bar{v}_i + \mu_i, i = 1, \dots, s, \quad (4)$$

где  $\mu_i$  — погрешность  $i$ -го тестового отклика.

**Продолжение примера 2.** Пусть исследователь изучает распределение температуры жидкости при помощи термпар, а характеристикой неискажённого термпарами состояния жидкости является распределение её температуры до взаимодействия с термпарами. Он может восстановить отклик  $Bu$  термпар на состояние жидкости, распределение температур  $u$  которой до помещения в неё термпар ему известно. Для этого он должен приготовить тестовые объекты — состояния жидкости с тестовыми распределениями температур  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$  (или  $v_1, \dots, v_s$ , если они известны с погрешностями) и получить отклики  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  термпар на эти состояния, поместив термпары в приготовленные объекты и, некоторое время спустя, записав показания термпар.

Имеющаяся у исследователя априорная информация об ИП, задана представлением оператора  $B$  как элемента параметрического класса операторов в виде

$$B = \sum_{k=1}^K \beta_k B_k, \quad (5)$$

где линейные операторы  $B_1, \dots, B_K$  известны, а вектор  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K)^T$  параметров — произвольный элемент  $\mathcal{R}^K$  — подлежит восстановлению.

Формирование откликов (4) с учётом представления  $B$  в виде (5) может быть записано в виде схемы измерения  $\beta$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_s \end{pmatrix}}_{\zeta} = \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 v_1 & \dots & B_K v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 v_s & \dots & B_K v_s \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 + B\lambda_1 \\ \vdots \\ \mu_s + B\lambda_s \end{pmatrix}}_{\mu}.$$

Соответственно,  $Bu = \sum_{k=1}^K \beta_k B_k u = \underbrace{(B_1 u, \dots, B_K u)}_{U_u} \beta$ , и рассматриваемая задача ока-

зывается аналогичной задаче редукции (3), в которой результату измерения  $\xi$  соответствует совокупность тестовых откликов  $\zeta$ , оператору  $A$  — оператор  $T$ , вектору  $f$  — вектор параметров представления (5)  $\beta$ , ковариационному оператору  $\Sigma_\nu$  погрешности измерения  $\nu$  — ковариационный оператор  $\Sigma_\mu + B\Sigma_\lambda B^*$

погрешностей тестовых откликов  $\mu + B\lambda$ , оператору  $U$  — оператор  $U_u$ , а если  $\Sigma_\lambda = 0$ , т.е.  $\lambda \equiv 0$  — задаче редукции (2). Необходимое и достаточное условие возможности линейного прогноза имеет вид  $U_u(I - T^{-1}T) = 0$ .

Наиболее точной (в с. к.) линейной версией  $Bu$  будет

$$\widehat{Bu} = U_u T^{-1} \zeta. \quad (6)$$

Если же известно, что  $\Sigma_\lambda = 0$ , то наиболее точной линейной версией  $Bu$  будет  $\widehat{Bu} = U_u (\Sigma_\mu^{-1/2} T)^{-1} \Sigma_\mu^{-1/2} \zeta$ , с. к. погрешность которой равна  $\mathbb{E} \|\widehat{Bu} - Bu\|^2 = \text{tr} U_u (T^* \Sigma_\mu^{-1} T)^{-1} U_u^*$ .

**Пример 3.** В качестве иллюстрации рассмотрим задачу оценивания отклика  $Bu$  оптической системы, заведомо не искажающего объект исследования при взаимодействии, на входной сигнал  $u$  с помощью тестовых сигналов по схеме (4). Пусть известно, что моделирующий оптическую систему оператор  $B$  описывается симметричной аппаратной функцией ограниченной ширины, т.е. матричные элементы  $B_{ij} = a_{|i-j|}$ ,  $|i-j| \leq c$ ,  $B_{ij} = 0$ ,  $|i-j| > c$ . Матричные элементы фактически использовавшегося оператора  $B$  выбраны следующим образом:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| \leq (w-1)/2, \\ 0, & |i-j| > (w-1)/2, \end{cases} i, j = 1, \dots, M, \quad (7)$$

где  $w = 5$  — «ширина» аппаратной функции ИП, моделируемого оператором  $B$ ,  $\Sigma_\mu = \sigma^2 I$ , а характеристики тестовых объектов точно известны исследователю. Результаты оценивания в этом случае приведены на рис. 1.

Решение задачи восстановления модели  $B$  может быть получено аналогично, если заметить, что  $B = \sum_{k=1}^K \beta_k B_k = \underbrace{(B_1, \dots, B_K)}_{U_B} \beta$ , откуда самая точ-

ная в с. к. (в смысле нормы Гильберта–Шмидта  $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ ) линейная оценка  $\widehat{B}$  оператора  $B$  получается из (6) заменой  $U_u$  на  $U_B$ :

$$\widehat{B} = U_B T^{-1} \zeta, \quad (8)$$

а её погрешность  $\mathbb{E} \|\widehat{B} - B\|_{\text{HS}}^2$  конечна при условии  $U_B(I - T^{-1}T) = 0$ . Если это условие выполнено, то  $\widehat{Bu} = Bu$  для любого  $u$ , поскольку в известном смысле согласованы нормы  $\|\cdot\|_{\text{HS}}$  и  $\|\cdot\|$ , характеризующие погрешности  $\mathbb{E} \|\widehat{B} - B\|_{\text{HS}}^2$  и  $\mathbb{E} \|\widehat{Bu} - Bu\|$ .



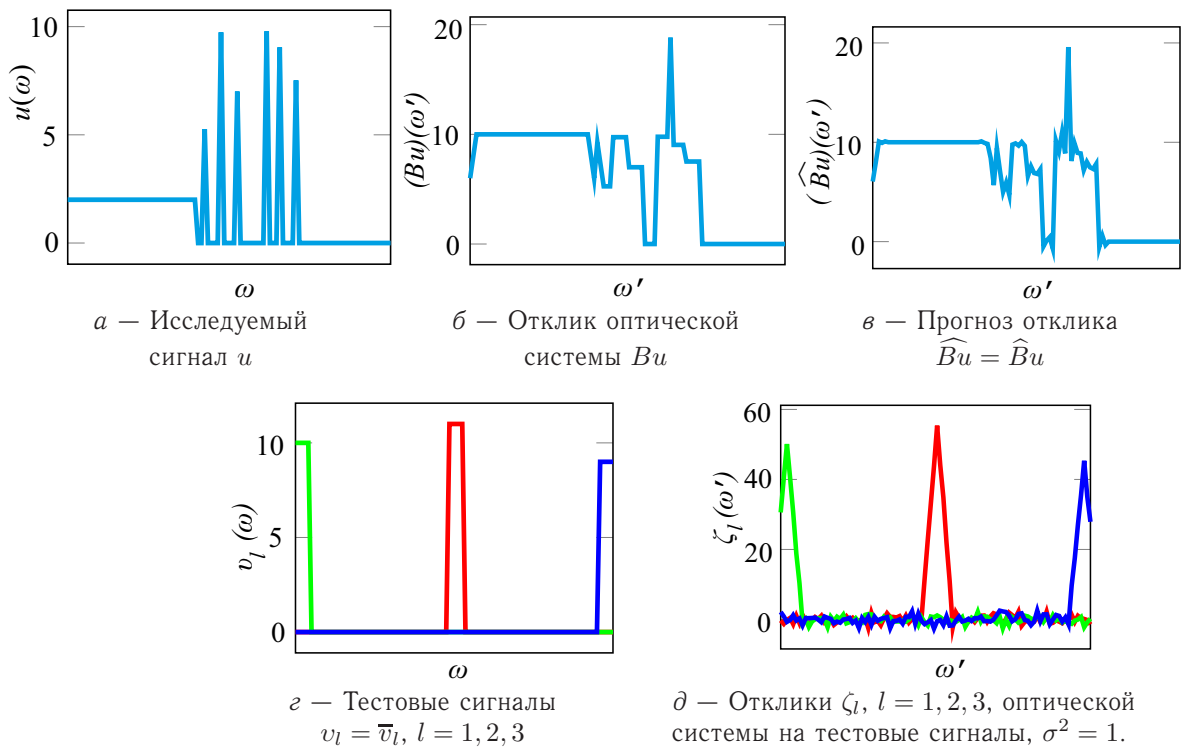


Рис. 1: Прогноз  $\widehat{Bu}$  (в) отклика  $Bu$  (б) оптической системы на сигнал  $u$  (а). Исследователю известны поражённые шумом отклики  $\zeta_1 - \zeta_3$  (д) на тестовые сигналы  $v_1 - v_3$  (г), и то, что оптическая система описывается симметричной аппаратной функцией ограниченной ширины. Истинный моделирующий её оператор  $B$  соответствует прямоугольной аппаратной функции (7). Видно, что отклик и его прогноз отличаются незначительно

## 2. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Пусть исследователь хочет оценить значение интересующей его характеристики  $Uf$  объекта исследования по результату измерения  $\xi = Af + \nu$ , выполненного по схеме (1). В отличие от рассмотренного во введении случая, оператор  $A$  исследователю неизвестен. Ему, однако, доступны результаты  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  измерений по схеме (1) (тестовых) сигналов  $g_1, \dots, g_s$ , полученных в результате взаимодействия с неизвестным исследователю ИП  $A$  приготовленных исследователем объектов, значения интересующей его характеристики которых, поражённые аддитивным шумом  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , равны  $v_1 = Ug_1 + \lambda_1, \dots, v_s = Ug_s + \lambda_s$ .  $\zeta_i = Ag_i + \mu_i, i = 1, \dots, s$ . Предполагается, что шумы  $\mu_1, \dots, \mu_s$  имеют нулевое математическое ожидание, невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$ , шумы  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  имеют нулевое математическое ожидание и ковариационный оператор  $\Sigma_\lambda$  (возможно, вырожденный) и  $\nu, \mu = (\mu_1^T, \dots, \mu_s^T)^T$  и  $\lambda = (\lambda_1^T, \dots, \lambda_s^T)^T$  независимы.

В отличие от предыдущего раздела, значения этой характеристики не обязаны «всесторонне» описывать соответствующие объекты. Исследователю известны значения  $v_1, \dots, v_s$  («приготовленные» им и не возмущённые измерениями), и результаты тестовых измерений  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ , но не значения  $g_1, \dots, g_s$  и  $U$  (так как он не знает  $A$ , он, вообще говоря, не может указать, какие искажения вносит  $A$ ), и его интересует наиболее точная версия характеристики  $Uf$  исследуемого объекта. Как и выше, предполагается, что ИП в процессе измерений стабилен, см. замечание 1.

Для восстановления интересующей исследователя характеристики объекта исследования по измерению, полученному на неизвестном ИП, из класса всех возможных оптимальных ВП выбирается лучше всех восстанавливающий значения интересующей исследователя характеристики тестовых объектов по результатам тестовых измерений, и он применяется для интерпретации измерения объекта исследования. С этой целью решается задача редукции интересующих исследователя характеристик тестовых объектов к параметрам оптимального ВП как элемента класса априори воз-

можных оптимальных ВП.

Исследователь выражает свою априорную информацию о модели измерения выбором линейных операторов  $R_1, \dots, R_K$ , линейной оболочке которых, по его мнению, априори принадлежит оператор линейной несмещённой редукции  $R_*$  в (2), соответствующий неизвестному  $A$  и реализуемый оптимальным ВП:

$$R_* = \sum_{i=1}^K r_i R_i, \quad (9)$$

где вектор  $r = (r_1, \dots, r_K)^T$  неизвестен исследователю. Так, если оператор  $\Sigma_\nu$  — невырожденный, а оператор  $A$  полностью неизвестен, то  $K = \text{rk} U \cdot \dim \mathcal{X}$ ,  $R_1, \dots, R_N$  — произвольный базис линейного пространства линейных операторов  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , например,

$$R_* = \sum_{k_1=1}^{\text{rk} U \dim \mathcal{X}} \sum_{k_2=1}^{\dim \mathcal{U}} r_{k_1, k_2} E'_{k_1, k_2}, \quad (10)$$

где  $E'_{k_1, k_2}$  — линейный оператор, матричные элементы которого равны 0, кроме  $(E'_{k_1, k_2})_{k_1, k_2} = 1$ , в произвольном фиксированном базисе  $\mathcal{X}$  и произвольном фиксированном базисе  $\mathcal{U}$ , первые  $\text{rk} U$  векторов которого образуют базис образа  $U$ .

При этих условиях значения  $v_1, \dots, v_s$  могут рассматриваться как пораженные шумами  $R_* \mu_1 + \lambda_1, \dots, R_* \mu_s + \lambda_s$  отклики оптимального ВП на сигналы  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ , а  $R_* \xi$  для известного  $A$  — как его отклик на сигнал  $\xi$ . Таким образом, задача оценивания сводится к задаче вида (3).

**Теорема 1.** Пусть исследователь произвёл измерение согласно схеме (1)  $\xi = Af + v$ , в которой оператор  $A$  исследователю неизвестен, но ему доступны результаты измерений по схеме (1)  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  тестовых сигналов  $g_1, \dots, g_s$ , поражённые шумом значения интересующей исследователя характеристики которых равны  $v_1, \dots, v_s$ ,  $\zeta_i = Ag_i + \mu_i$ ,  $v_i = Ug_i + \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Шумы  $\mu = (\mu_1^T, \dots, \mu_s^T)^T$  и  $\lambda = (\lambda_1^T, \dots, \lambda_s^T)^T$  имеют нулевое математическое ожидание,  $\mu$  имеет невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$ ,  $\lambda$  имеет ковариационный оператор  $\Sigma_\lambda$ , и шум «основного» измерения  $v$ , шумы тестовых измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  и шумы значений характеристик тестовых объектов  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  независимы. Исследователь также знает, что оператор редукции  $R_*$  измерения  $\xi$  к сигналу  $Uf$  при истинном  $A$  допускает представление  $R_* = \sum_{i=1}^K r_i R_i$ , где линейные операторы  $R_1, \dots, R_K$  известны, а числа  $r_1, \dots, r_K$  — нет. Тогда наиболее точная линейная несмещённая оценка  $\widehat{Uf}$  интересующей исследователя характеристики  $Uf$  есть

$$\widehat{Uf} = U_\xi S^- v = \widehat{R} \xi, \quad (11)$$

где  $\widehat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K R_k (S^- v)_k$ ,  $U_\xi \stackrel{\text{def}}{=} (R_1 \xi, \dots, R_K \xi)$ ,  $S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} R_1 \zeta_1 & \dots & R_K \zeta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \zeta_s & \dots & R_K \zeta_s \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} R_1 \zeta_1 & \dots & R_K \zeta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \zeta_s & \dots & R_K \zeta_s \end{pmatrix}, v \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}. \text{ Её с. к. погрешность}$$

конечна при выполнении условий  $U_\xi(I - S^- S) = 0$  и  $U(I - A^- A) = 0$ .

**Доказательство.** Несмещённость и оптимальность полученной оценки следует из несмещённости и оптимальности [1, §1.6]  $R_* \xi$  как оценки  $Uf$ , несмещённости и оптимальности [1, §6.5.4], также см. раздел 1,  $U_x S^- v$  как оценки  $R_* x$  при любом  $x \in \mathcal{X}$  и независимости  $U_\xi$  и  $S^- v$  (вследствие независимости  $v$  и  $\mu_1, \dots, \mu_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ ).

То, что с. к. погрешность полученной оценки конечна при выполнении условия  $U_\xi(I - S^- S) = 0$ , следует из свойств оценки (3) (при указанных условиях конечна погрешность оценки коэффициентов в разложении (9) и, следовательно, конечно с. к. отклонение  $\widehat{R} \xi$  от  $R_* \xi$ ; с. к. отклонение  $R_* \xi$  от  $Uf$  также конечно). ■

**Замечание 2.** Условие  $U(I - A^- A) = 0$  эквивалентно отсутствию такого  $f_0 \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ , что  $Af_0 = 0$ , но  $Uf_0 \neq 0$ . Поэтому для проверки его выполнения необходимо, чтобы  $\mathcal{L}(\Pi_{\mathcal{N}(U)^\perp} g_1, \dots, \Pi_{\mathcal{N}(U)^\perp} g_s) = \mathcal{N}(U)^\perp$ , где  $\Pi_{\mathcal{N}(U)^\perp} = U^- U$  — ортогональный проектор на ортогональное дополнение ядра  $U$ . Тогда проверка нарушения этого условия сводится к проверке гипотезы « $\exists m = 1, \dots, \text{rk} U: Ah_m = 0$ » (альтернатива « $\forall m = 1, \dots, \text{rk} U: Ah_m \neq 0$ »), векторы  $\{h_m\}_{m=1}^{\text{rk} U}$  — произвольный базис  $\mathcal{N}(U)^\perp$ , по «наблюдениям»  $\widehat{Ah_m}$  — оценкам отклика ИП на входные сигналы  $\{h_m\}_{m=1}^{\text{rk} U}$  по тестовым измерениям.

Восстановленный таким образом  $R_*$  будет, вообще говоря, отличаться от  $U(\Sigma_\nu^{-1/2} \widehat{A})^{-1} \Sigma_\nu^{-1/2}$ , где  $\widehat{A}$  — восстановленная согласно (8) модель ИП.

$$\text{Оператор } S = \begin{pmatrix} R_1 \zeta_1 & \dots & R_K \zeta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \zeta_s & \dots & R_K \zeta_s \end{pmatrix} \text{ наследует по}$$

грешности данных тестовых измерений, поэтому задача восстановления интересующей исследователя характеристики может оказаться некорректно поставленной, если некоторые собственные значения  $S$  близки к 0. В этом случае необходимо привлечь больше априорной информации о модели измерения, провести больше тестовых измерений или воспользоваться методами регуляризации вычисления редукции.

**Замечание 3.** Ковариационный оператор случайного вектора  $\theta$  неизвестен, поскольку заранее неизвестен сам оператор  $R_*$ . Тем не менее, если погрешности тестовых измерений не коррелируют и имеют одинаковые ковариационные операторы, а также погрешности значений характеристик тестовых объектов не коррелируют и имеют одинаковые ковариационные операторы, качество оценки (11) такое же, как и качество аналогичной оценки при известном ковариационном операторе  $\Sigma_\theta$ . Сама с. к. погрешность редукции в этом случае по-прежнему априори неизвестна, поскольку зависит от неизвестного  $\Sigma_\theta$ . Ср. с «стандартной» редук-

цией: если оператор  $A$  обратим, то оператор редукции (2) не зависит от  $\Sigma_\nu$  и совпадает с оператором (3), следовательно, от  $\Sigma_\nu$  не зависит результат редукции, но зависит его погрешность.

В противном случае учесть ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$  погрешностей тестовых измерений можно, используя вместо (11) оценку  $\widehat{R}_{\text{nl}}\xi$ , где  $\widehat{R}_{\text{nl}}$  — решение относительно  $R$  системы уравнений

$$\begin{cases} R = \sum_{k=1}^K R_k((\widehat{\Sigma}_\theta^{-1/2}S)^{-1}\widehat{\Sigma}_\theta^{-1/2}v)_k, \\ \widehat{\Sigma}_\theta = R^{(s)}\Sigma_\mu R^{(s)*} + \Sigma_\lambda, \end{cases}$$

$$R^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} \text{ — блочно-диагональная матрица}$$

( $s \times s$  блоков). Эта система уравнений является аналогом (11) в случае известного  $\Sigma_\theta$  при его замене оценкой, полученной с помощью оценки  $R_*$ . Если, как в предыдущем абзаце,  $\Sigma_\lambda = \Sigma_{\lambda_1}^{(s)}$  и  $\Sigma_\mu = \Sigma_{\mu_1}^{(s)}$ , то  $\widehat{R}\xi$  и  $\widehat{R}_{\text{nl}}\xi$  совпадают.

В силу независимости  $U\xi$  и  $S^{-1}v$  и поскольку  $(\mathbb{E}U_\nu^*U_\nu)_{k,k'} = (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{HS}}$ , где  $(\cdot, \cdot)_{\text{HS}}$  — скалярное произведение Гильберта–Шмидта,  $(A, B)_{\text{HS}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr} A^*B$ , то с. к. погрешность

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\widehat{Uf} - Uf\|^2 &= \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{HS}} \times \\ &\quad \times (S^-(R_*^{(s)}\Sigma_\mu R_*^{(s)*} + \Sigma_\lambda)S^{-*})_{kk'} \approx \\ &\approx \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{HS}} (S^-(\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*} + \Sigma_\lambda)S^{-*})_{kk'}, \end{aligned} \tag{12}$$

где в последнем (приближённом) равенстве вместо  $R_*$  используется его оценка  $\widehat{R}$  вследствие её оптимальности в классе линейных оценок.

В погрешности (12) матрица, образуемая элементами  $(\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{HS}}$ ,  $k, k' \in 1, \dots, K$ , характеризует вклад в погрешность неточности измерения  $\xi = Af + v$ , а  $S^-(\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*} + \Sigma_\lambda)S^{-*}$  — вклад неточности тестовых измерений. Поэтому если  $\|S^-(\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*} + \Sigma_\lambda)S^{-*}\|_{\text{HS}}^2 \ll \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{HS}}^2$ , то для повышения точности оценки целесообразно повторить измерение объекта исследования, а в противоположном случае — произвести больше тестовых измерений. Значение  $\|S^-(\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*} + \Sigma_\lambda)S^{-*}\|_{\text{HS}}$ , велико, в частности, если задача восстановления интересующей исследователя характеристики плохо обусловлена.

Выполнение условия представимости  $R_*$  в виде (9), как правило, менее очевидно, чем выполнение условия представимости  $A$  в виде (5). Поэтому может быть целесообразно использовать всегда априори допустимое

представление (10) и использовать имеющиеся у исследователя представления о том, как будет изменяться выходной сигнал ИП при известном изменении его входного сигнала, согласно следующему замечанию.

*Замечание 4.* Пусть  $B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  — такие линейные операторы, что для всех априори возможных  $A$  при каком-либо преобразовании тестового объекта, при котором значение интересующей исследователя характеристики изменяется с  $\bar{v}_1$  на  $B\bar{v}_1$ , математическое ожидание результата тестового измерения изменяется с  $Ag_1$  на  $CAG_1$ . Например, для оператора  $A$  и  $U$  типа свёртки это выполняется для операторов «сдвига», соответствующих смещению регистрируемого сигнала. Тогда если  $\zeta_1$  — результат измерения тестового объекта, поражённого шумом значение характеристики которого равно  $v_1$ , то  $C\zeta_1$  может рассматриваться как результат измерения тестового объекта с зашумлённым значением характеристики  $Bv_1$ . Разумеется, ковариационным оператором шума этого тестового измерения изменится на  $C\Sigma_{\mu_1}C^*$ , а ковариационный оператор погрешности значения характеристики — на  $B\Sigma_{\lambda_1}B^*$ , но это не влияет на значение (11).

Этот подход применим и в случае восстановления модели линейного ИП, но там он не предпочтителен по сравнению с «более явным» выражением информации о структуре и симметрии ИП в разложении (5), поскольку увеличивает объём вычислений.

В отличие от [25, 27, 28], не предполагается, что допустимые преобразования образуют группу, что может быть существенно при учёте «краевых эффектов». Например, пусть характеристика  $\bar{v}_2$  и результат соответствующего тестового измерения  $\zeta_2$ , изображённые на рис. 2,е и 2,ж, «сдвигаются влево» операторами  $B$  и  $C$  так, что  $B\bar{v}_2 = 0$ , но  $C\zeta_2 \neq 0$ , т. е., на расстояние, меньшее ширины аппаратной функции. Тогда  $C\zeta_2$  не может быть результатом измерения  $B\bar{v}_2$ , что, если множество допустимых отображений должно быть группой, требует отклонить всю группу сдвигов в качестве допустимых отображений.

**Пример 4.** В качестве иллюстрации применения теоремы 1 и замечания 4 рассмотрим задачу оценивания входного сигнала  $u$  оптической системы, которая априори не искажает ( $U = I$ ), по его измерению  $\xi$ , полученному по схеме (1), и тестовым измерениям по схеме (4) при отсутствии погрешности значений тестовых сигналов ( $\Sigma_\lambda = 0$ ). Пусть известно, что матрица моделирующего оптическую систему оператора  $A$  — симметричная тёплицева. Поскольку при этом  $A$  — симметричный оператор типа свёртки, то в замечании 4  $B$  и  $C$  — операторы «сдвига» и «отражения» сигнала. Матричные элементы истинного оператора  $A$  определяются формулой (7) при  $w = 5$ , а случайные погрешности измерений имеют нулевые математические ожидания и ковариационные операторы  $\Sigma_\nu = \sigma^2I$ ,  $\Sigma_\mu = \sigma^2I$ . Результаты оценивания приведены на рис. 2. Как и в примере 1, выбор используемого для интерпретации ВП по оцененному по тестовым измерениям  $A$  приводит к худшей оценке, чем полученной с помо-

щью ВП, непосредственно построенного по тестовым измерениям, см. рис. 2, *з*, хотя построенная методом (8) оценка  $A$  оптимальна в смысле нормы Гильберта–Шмидта. Видно, что всего трёх тестовых измерений

и априорной информации о виде  $A$  достаточно для синтеза оценки  $\hat{f}$ , на которой уверенно различимы «пики» и «плато» исходного сигнала.

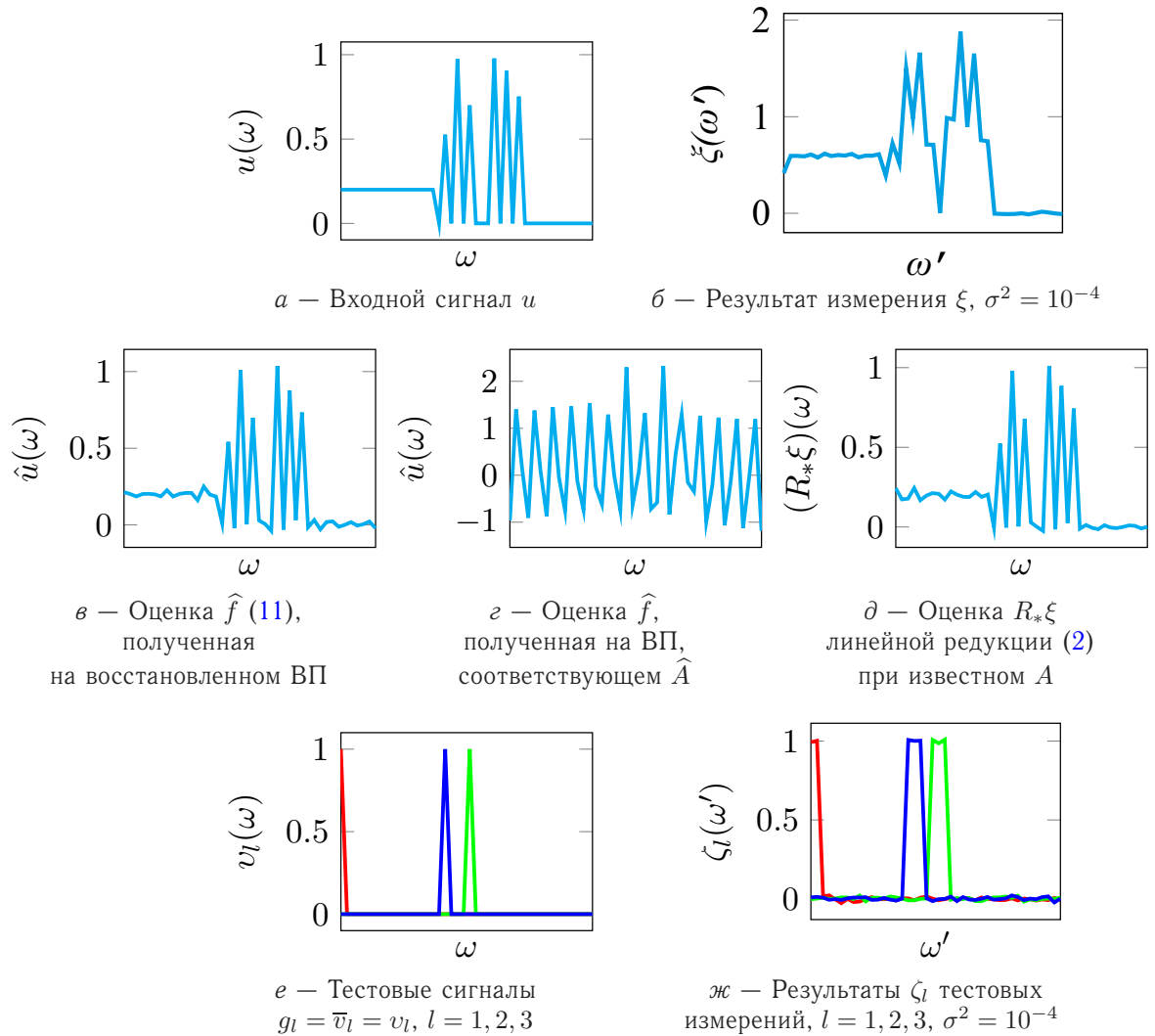


Рис. 2: Редукция результата (*б*) измерения сигнала (*а*), если исследователь: имеет результаты (*ж*) измерений тестовых сигналов (*е*), знает, что моделирующий оптическую систему оператор  $A$  – симметричный оператор типа свёртки и (*в*) восстанавливает модель оптимального ВП (11); (*z*) восстанавливает методом (8) модель ИП  $\hat{A}$  и строит оценку, соответствующую  $\hat{A}$ ; (*d*) точно знает ИП  $A$ . Все результаты измерений поражены белым шумом. Истинный  $A$  соответствует прямоугольной аппаратной функции

Оптимальная в с.к. (в смысле нормы Гильберта–Шмидта  $\|\cdot\|_{HS}$ ) оценка оператора  $R_*$  может быть получена аналогично, если заметить, что  $R_* = \sum_{k=1}^K r_k R_k = \underbrace{(R_1, \dots, R_K)}_{U_R} r$ , откуда самая

точная в с.к. линейная оценка  $\hat{R}$  оператора  $R_*$  получается из (11) заменой  $U_\xi$  на  $U_R$ :  $\hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K R_k (S^{-\nu})_k$ , а её погрешность конечна при условии  $U_R(I - S^{-\nu}S) = 0$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в статье, в случае неизвестной исследователю точной модели измерительного преобразователя, но при возможности проведения тестовых измерений, исследователь может синтезировать с помощью тестовых измерений как отклик измерительного преобразователя, так и результат оптимальной интерпретации результата измерения, причём и то, и другое — оптимальным (в с.к.) образом. Имеющаяся у исследователя информация о симметрии измерительного преобразователя (например, что результаты «сдвигов» и «отражений» возможных входных сигналов и измерений также являются возможными входными сигналами и измерениями) также может быть учтена. Это может существенно сокращать количество тестовых измере-

ний, требуемое для достижения приемлемой для исследователя точности интерпретации. При этом предложенный метод не требует априорного знания того, что входной сигнал — случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариационным оператором.

## Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Ю.П. Пытьеву за постоянное внимание к работе и её обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-07-00424).

- 
- [1] Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3 изд., перераб. и дополн. М., 2012.
- [2] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
- [3] Чуличков А. И. Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения. Линейные стохастические измерительно-вычислительные системы. Тамбов, 2000.
- [4] Чуличков А. И., Юань Б. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2014. № 3. С. 15. (Chulichkov A. I., Yuan B. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2014. 69, № 3. P. 218.)
- [5] Пытьев Ю. П., Сердобольская М. Л. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1988. 29, № 6. С. 78.
- [6] Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М., 1995. (Leonov A. S., Tikhonov A. N., Yagola A. G. Nonlinear Ill-Posed Problems. London, 1995.)
- [7] Боровков А. А. Математическая статистика. 4 изд. СПб., 2010. (Borokov A. A. Mathematical Statistics. London, 1999.)
- [8] Caron J. N., Namazi N. M., Rollins C. J. Applied Optics. 2002. 41, № 32. P. 6884.
- [9] Krishnan D., Tay T., Fergus R. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on. Providence, RI, 2011. P. 233.
- [10] Pan J., Liu R., Su Z., Gu X. Signal Processing: Image Communication. 2013. 28, № 9. P. 1156.
- [11] Levin A., Weiss Y., Durand F., Freeman W. T. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on. Providence, RI, 2011. P. 2657.
- [12] Chaudhuri S., Velmurugan R., Rameshan R. Blind Image Deconvolution: Methods and Convergence. Cham : Springer Nature, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-10485-0
- [13] Blind Image Deconvolution: Theory and Applications / Ed. by P. Campisi, K. Egiazarian. CRC Press, 2007.
- [14] Levin A., Weiss Y., Durand F., Freeman W. T. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2009. P. 1964.
- [15] Kotera J., Smidl V., Sroubek F. IEEE Transactions on Image Processing. 2017. 26, N5. P. 2533.
- [16] Ruiz P., Zhou X., Mateos J., Molina R., Katsaggelos A. K. Digital Signal Processing. 2015. 47. P. 116.
- [17] Perrone D., Favaro P. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2016. 38, N6. P. 1041.
- [18] Голубцов П. В., Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Всесоюзный симпозиум по модульным информационно-вычислительным системам. Кишинев, 1985. С. 245.
- [19] Голубцов П. В., Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Дискретные системы обработки информации. Устинов, 1986. С. 68.
- [20] Гоголинская Т. А., Голубцов П. В., Ким Е. М., Пацаева С. В., Фадеев В. В. Морской гидрофизический журнал. 1988. № 1. С. 59.
- [21] Баулин Б. В., Гоголинская Т. А., Голубцов П. В., Пацаева С. В., Сердобольская М. Л., Филиппова Е. М. Оптика атмосферы. 1988. 1, № 12. С. 53.
- [22] Голубцов П. В., Гоголинская Т. А., Ким Е. М., Пацаева С. В., Фадеев В. В. Сб. «III съезд советских океанологов, Ленинград, 1987, Тезисы докладов, секция физика и атмосфера океана, Техника, методы измерений и обработки данных». Л., 1987. С. 32.
- [23] Голубцов П. В. Методы калибровки модели измерения для решения задач редукции: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 – Теоретическая и математическая физика / МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 1988.
- [24] Голубцов П. В., Пытьев Ю. П., Филатова С. А. Оптика атмосферы. 1991. 4, № 10. С. 1011.
- [25] Голубцов П. В., Старикова О. В. Информационные процессы. 2001. 1, № 1. С. 78.
- [26] Старикова О. В., Голубцов П. В. Проблемы управления и моделирования в сложных системах. III международная конференция, Самара, 2001 г. С. 635.
- [27] Голубцов П. В., Старикова О. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 3. (Golubtsov P. V., Starikova O. V. Moscow Univ. Phys. Bull. 2001. 56, № 6. P. 1.)
- [28] Голубцов П. В., Старикова О. В. Математическое моделирование. 2002. 14, № 4. С. 45.
- [29] Копит Т. А., Чуличков А. И., Устинин Д. М. Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2011. 12. С. 90.
- [30] Копит Т. А., Чуличков А. И., Устинин Д. М. Вычисли-

- тельные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2011. **12**. С. 220.
- [31] *Копит Т. А., Чуличков А. И.* Сложные системы. 2012. № 1(2). С. 7.
- [32] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. 2 изд., перераб. и дополн. М., 2016.
- [33] *Черемухин Е. А., Чуличков А. И.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2004. № 3. С. 15. (*Cheremukhin E. A., Chulichkov A. I.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2004. **59**, № 3. С. 19.)
- [34] *Балакин Д. А.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 63. (*Balakin D. A.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 168.)
- [35] *Пытьев Ю. П.* Математическое моделирование. 1989. **1**, № 2. С. 49.
- [36] *Белов Ю. А., Касьянюк В. С.* Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. **27**, № 2. С. 291. (*Belov Yu. A., Kas'yanyuk V. S.* USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1987. **27**, N 1. P. 189.)

---

## Empirical recovery of mathematical models of a linear measuring transducer and the optimal computing transducer

D. A. Balakin

*Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*  
E-mail: [balakin\\_d\\_a@physics.msu.ru](mailto:balakin_d_a@physics.msu.ru)

It follows from the theory of measuring-computing systems that the requirements for a measuring transducer (MT) that forms measurement result during interaction with the measured object in order to obtain maximal interpretation accuracy significantly differ depending on how it is going to function — by itself or as a part of a measuring-computing transducer (MCT). In the second case, maximal interpretation accuracy has to be provided by the MCT that is considered to be a measuring device of the same purpose as the «*perfect*» device for the researcher.

As a rule, an exact mathematical MT model and, hence, the algorithm realized by the computing transducer (CT) that provides maximal accuracy of MCT as a measuring device, are not known to the researcher, but he can perform test measurements of known objects. The aim of this article is to *synthesize using test measurements* both the response of a MT with unknown model and the *optimal interpretation* of the measurement result, i. e., the output signal of the MCT.

PACS: 02.50.Le.

*Keywords:* measurement reduction, optimal decisions, measuring-computing systems, test measurements.

*Received 07 May 2018.*

### Сведения об авторе

Балакин Дмитрий Александрович — физик; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: [balakin\\_d\\_a@physics.msu.ru](mailto:balakin_d_a@physics.msu.ru).

---