Точные сингулярные решения уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова

О. И. Чигур*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физико-математических методов управления Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 14.05.2018; Подписана в печать 18.05.2018)

В работе рассматриваются вопросы построения точных сингулярных решений уравнения Кузнецова, более известного как уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК). Данное уравнение является дифференциальным уравнением 3-го порядка в частных производных и описывает распространение ограниченного звукового пучка в нелинейной среде с диссипацией. Для построения точных решений используются методы современной теории симметрий дифференциальных уравнений и теория сингулярных решений. Также в данной работе проводится визуализация некоторых решений, в частности, решения, отвечающего эффекту фокусировки звукового пучка.

PACS: 20.40.-k, 20.20.Qs, 20.40.Xx УДК: 514.7, 512

Ключевые слова: симметрии дифференциальных уравнений, фокусировка акустической волны, сингулярные решения дифференциальных уравнений, нелинейная акустика.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов получения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений является метод симметрий. Его основы были заложены Софусом Ли во второй половине 19 века.

Пусть $\mathbf{J}^k(\mathbf{R}^n)$ — пространство k–джетов гладких функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Точечной симметрией дифференциального уравнения называется преобразование пространства $\mathbf{J}^0(\mathbf{R}^n)$, такое, что его продолжение в пространство $\mathbf{J}^k(\mathbf{R}^n)$ сохраняет гиперповерхность, задаваемую самим уравнением.

Векторное поле на пространстве $\mathbf{J}^0(\mathbf{R}^n)$, сдвиги вдоль траекторий которого состоят из симметрий дифференциального уравнения, называются точечной инфинитезимальной симметрией данного уравнения.

Множество всех инфинитезимальных симметрий уравнения $\mathcal{E}$ образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Эту алгебру будем обозначать через Symm $\mathcal{E}$.
Допустим, что известна инфинитезимальная симметрия X уравнения $\mathcal{E}$. Пусть эта симметрия задает однопараметрическое семейство инфинитезимальных преобразований ϕ_s пространства $\mathbf{J}^0(\mathbf{R}^n)$ — поток векторного поля X. Здесь s — параметр, определяющий сдвиг вдоль траекторий векторного поля X. Чтобы построить решение, инвариантное относительно точечного векторного поля X, нужно найти его инвариант (интеграл), то есть функции $J = J(x, u)$, удовлетворяющие уравнению $X(J) = 0$. После этого нужно искать решения уравнения $\mathcal{E}$ среди этих инвариантов. В результате вместо исходного уравнения $\mathcal{E}$ мы получим дифференциальное уравнение, у которого число независимых переменных на единицу меньше, чем у исходного. Полученное уравнение называется редуцированным.

УРАВНЕНИЕ КУЗНЕЦОВА

При рассмотрении задачи распространения акустической волны в диссипативной среде используют уравнение Кузнецова [3]. Данное уравнение обобщает уравнение Хохлова–Заболоцкой и содержит член, отвечающий за диссипацию:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon}{\rho_0 c_0} u \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{c_0}{2}\triangle_\perp u + b\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \tag{1}$$

где $b = \dfrac{1}{2c_0^3\rho_0}\left[\dfrac{4}{3}\eta + \xi + \kappa\left(\dfrac{1}{C_v} - \dfrac{1}{C_p}\right)\right]$, u — отклонение плотности среды от равновесной, ϵ — параметр нелинейности среды.

Алгебра симметрий уравнения Кузнецова порождается векторными полями:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x},\; V_2 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

$$V_3 = \frac{2t}{3}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{4x}{3}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2u}{3}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_1 = \frac{f_1' y}{2}\frac{\partial}{\partial t} + f_1\frac{\partial}{\partial y} - \frac{f_1'' y}{2}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_2 = \frac{f_2' z}{2}\frac{\partial}{\partial t} + f_2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{f_2'' z}{2}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_3 = f_3\frac{\partial}{\partial t} - f_3'\frac{\partial}{\partial u}$$

где $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ — произвольные функции переменной x.

Для построения автомодельных решений уравнения выберем необходимые нам симметрии. Составляя линейные комбинации векторных полей

*E-mail: riman1703@gmail.com

$V_1, V_2, V_3, X_1, X_2, X_3$ получим симметрии:

$$3\,V_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + 4x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \qquad (2)$$

$$V_2 + X_3 = x\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}, f_3(x) = x \qquad (3)$$

$$3V_3 + X_3 = (2t+3x)\frac{\partial}{\partial t} + 4x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z} - (2u+3)\frac{\partial}{\partial u}, f_3(x) = 3x \qquad (4)$$

$$3V_3 + X_2 = \left(2t + \frac{3z}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + 4x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 3(z+x)\frac{\partial}{\partial z} - 2u\frac{\partial}{\partial u}, f_2(x) = 3x \qquad (5)$$

Находим функции J, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий векторных полей V_3 и X_3, то есть решаем систему уравнений $V_3(J) = 0$ и $(X_3)(J) = 0$. Видим, что решения уравнения Кузнецова, инвариантные относительно этих векторных полей, нужно искать в виде:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{t}{x} + \frac{F\left(\frac{z}{y}\right)}{\sqrt{x}} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение Кузнецова, и делая замену переменной $w = \frac{z}{y}$ приходим к уравнению:

$$\left(w^2+1\right)F(w)'' + 2wF(w) = 0 \qquad (7)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид: $F(w) = C_1 + C_2\,\mathrm{arctg}(w)$.
Отсюда получаем решение уравнения Кузнецова:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{t}{x} + \frac{C_1 + C_2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z}{y}\right)}{\sqrt{x}} \qquad (8)$$

Перейдем к получению второго решения уравнения Кузнецова. Находим функции J, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий векторных полей V_3 и V_2+X_3, то есть решаем систему уравнений $V_3(J) = 0$ и $(V_2+X_3)(J) = 0$. Видим, что решения уравнения Кузнецова, инвариантные относительно этих векторных полей, нужно искать в виде:

$$u(x,y,z,t) = \frac{F\left(\frac{y^2+z^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)x - t\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение Кузнецова и делая замену переменной $q = \frac{y^2+z^2}{x^{\frac{3}{2}}}$ приходим к уравнению:

$$F(q)''q + F(q)' = 0 \qquad (10)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$F(q) = C_1 + C_2 \ln q \qquad (11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Таким образом, получаем второе автомодельное решение уравнения Кузнецова:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\left(C_1 + C_2 \ln\frac{y^2+z^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)x - t\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad (12)$$

Графическая интерпретация решения (12) приводится на рис. 1.

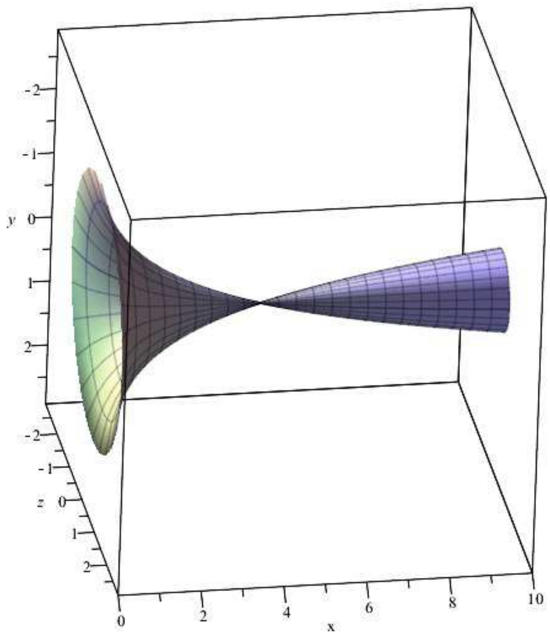

Рис. 1: Фокусировка акустического пучка

Для получения еще одного решения уравнения Кузнецова находим функции J, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий векторных полей V_3 и V_3+X_2, то есть решаем систему уравнений $V_3(J) = 0$ и $(V_3+X_2)(J) = 0$. Видим, что решения уравнения Кузнецова, инвариантные относительно этих векторных полей, нужно искать в виде:

$$u(x,y,z,t) = \frac{F\left(\frac{4tx - z^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}{\sqrt{x}} \qquad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение Кузнецова и делая замену переменной, получаем уравнение:

$$16FF_{qq} - 2qF_{qq} + 16F_q^2 - 2F_q - 64F_{qqq} = 0 \qquad (14)$$

После интегрирования уравнения (14) по переменной q придем к уравнению:

$$8FF_q - qF_q - 32F_{qq} = 0 \qquad (15)$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид:

$$F = \frac{q}{8} + C_1 \tag{16}$$

Таким образом, получаем еще одно автомодельное решение уравнения Кузнецова:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\dfrac{4tx - z^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \tilde{C}_1}{\sqrt{x}} \tag{17}$$

Визуализация решения (17) показана на рис. 2 и рис. 3 в различные моменты времени.

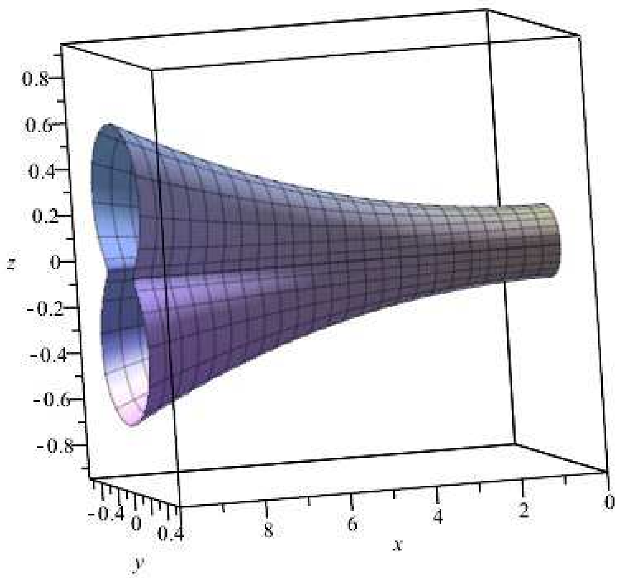

Рис. 2: Сингулярное решение уравнения ХЗК

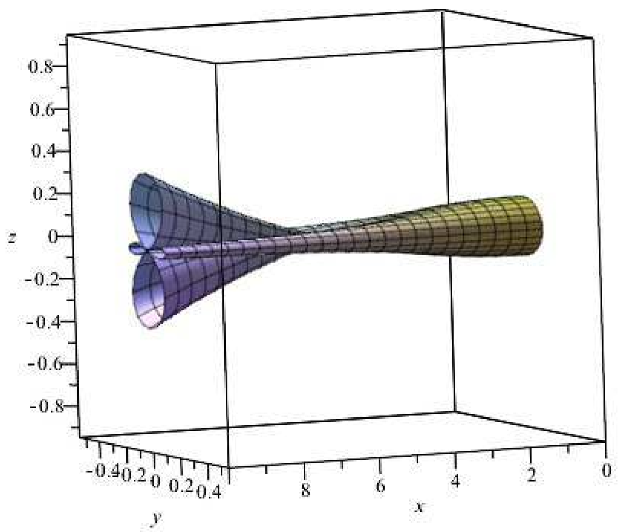

Рис. 3: Сингулярное решение уравнения ХЗК

Перейдем к получению еще одного решения уравнения Кузнецова. Положим в X_2 и X_3: $f_2(x) = x^3$ и $f_3(x) = x^3$ и построим коммутаторы векторных полей: $K_1 = [V_3, V_3 + X_2]$, $K_2 = [V_3, V_3 + X_3]$, $K_3 = [V_3 + X_2, V_3 + X_3]$.

Находим функции J, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий векторных полей K_1, K_2 и K_3, т.е. решаем систему уравнений $K_1(J) = 0$, $K_2(J) = 0$ и $K_3(J) = 0$. Видим, что решения уравнения Кузнецова, инвариантные относительно этих векторных полей, нужно искать в виде:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3t}{x} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{x^2} + G(x,y) \tag{18}$$

где $G(x,y)$ — произвольная дифференцируемая функция переменных x и y.

Подставляя (18) в уравнение ХЗК, получаем уравнение на функцию $G(x,y)$:

$$\frac{15}{2x^2} + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{19}$$

Решая уравнение (19), получаем:

$$G(x,y) = -\frac{15}{4}\frac{y^2}{x^2} + F_1(x)y + F_2(x)$$

, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной x. Таким образом, принимая во внимание (18) и (19) получаем решение уравнения ХЗК:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3t}{x} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{x^2} - \frac{15}{4}\frac{y^2}{x^2} + F_1(x)y + F_2(x) \tag{20}$$

Для получения еще одного решения уравнения Кузнецова положим в X_2 и X_3 $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x$. Находим функции J, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий векторных полей V_3, X_8 и X_9, т.е. решаем систему уравнений $V_3(J) = 0$, $X_2(J) = 0$, $X_3(J) = 0$. Видим, что решения уравнения Кузнецова, инвариантные относительно этих векторных полей, нужно искать в виде:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{t}{x} + \frac{1}{4}\frac{z^2}{x^2} + \frac{G\left(\dfrac{y}{x^{\frac{3}{4}}}\right)}{\sqrt{x}} \tag{21}$$

Подставляя (21) в уравнение Кузнецова и делая замену переменной $q = \dfrac{y}{x^{\frac{3}{4}}}$ приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 G}{\partial q^2} = 0 \tag{22}$$

Общим решением уравнения (22) является функция: $G(q) = -\dfrac{1}{4}q^2 + C_1 q + C_2$.

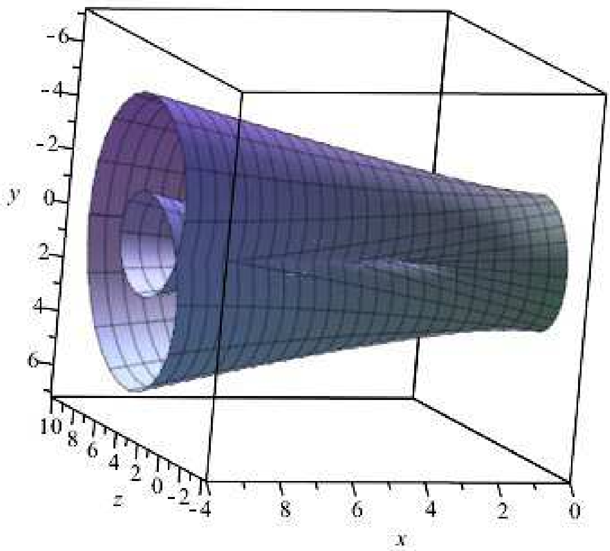

Рис. 4: Поверхность равной плотности (сечение решения уравнения ХЗК)

Таким образом, делая обратную замену переменной и принимая во внимание (21) и (22), получаем решение уравнения ХЗК:

$$u(x,y,z,t) = -\frac{t}{x} + \frac{1}{4}\frac{z^2}{x^2} + \frac{-\frac{1}{4}\frac{y^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_1 y}{x^{\frac{3}{4}}} + C_2}{\sqrt{x}} \qquad (23)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Визуализация решения (23) показана на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в ходе работы методами теории симметрий была построена алгебра симметрий уравнения Кузнецова, более известного как уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова. Были выделены конечномерная подалгебра симметрий и бесконечномерная подалгебра. Также путем составления линейных комбинаций векторных полей были построены подалгебры специального вида и построены сингулярные решения, инвариантные относительно данных подалгебр. В ходе работы было получено решение, отвечающее режиму фокусировки акустического пучка в вязкой теплопроводящей среде, учитывающей явление диссипации энергии. В качестве визуализации результатов были построены поверхности равной плотности в различные моменты времени.

[1] *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Акуст. журн. 1969. **15**, № 1. С. 40.
[2] *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
[3] *Руденко О. В.* Акуст. журн. 2010. **56**, № 4, С. 452.
[4] *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
[5] *Лычагин В. В.* УМН. 1979. **34**, 1(205). С. 137.
[6] *Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N.* Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **101**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
[7] *Кузнецов В. П.* Акуст. журн. 1970. **16**, №. 4. С. 548.
[8] *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

Exact singular solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation

O. I. Chigur

Department of Physical and Mathematical Methods of Management, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: riman1703@gmail.com

The paper deals with the construction of exact singular solutions of the Kuznetsov equation, better known as the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation (KZK). This equation is a third–order partial differential equation and describes the propagation of a bounded sound beam in a nonlinear medium with dissipation. To construct exact solutions, the methods of the modern theory of symmetries of differential equations and the theory of singular solutions are used. Also, in this paper, some solutions are visualized, in particular, a solution that corresponds to the effect of focusing the sound beam.

PACS: 20.40.-k, 20.20.Qs, 20.40.Xx

Keywords: symmetries of differential equations, acoustic wave focusing, singular solutions of differential equations, nonlinear acoustics.

Received 14 May 2018.

Сведения об авторах

Чигур Олег Игоревич — студент 4-го курса; e-mail: riman1703@gmail.com.