

## Многофазные последовательности больших длин с низким уровнем боковых лепестков аperiodической автокорреляционной функции

А. Н. Леухин,<sup>\*</sup> В. И. Безродный,<sup>†</sup> Н. А. Коковихина<sup>‡</sup>

Марийский государственный университет. Россия, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3

(Статья поступила 24.07.2017; Подписана в печать 16.10.2017)

Предложен численный итерационный алгоритм построения многофазных последовательностей больших длин с низким уровнем боковых лепестков аperiodической автокорреляционной функции (ААКФ). Представлен пример построения многофазных последовательностей длин  $N = 512$  с максимальным уровнем боковых лепестков ААКФ  $PSL = 1.763$ . Многофазные последовательности с низким уровнем боковых лепестков ААКФ широко используются в качестве модулирующих сигналов в радиолокационных системах различного назначения. Низкий уровень боковых лепестков обеспечивает обнаружение целей с низкой эффективной площадью рассеяния (ЭПР) на фоне целей с высокой ЭПР.

PACS: 02.30.Lt.

УДК: 621.391.266

Ключевые слова: многофазные последовательности, коды Баркера, корреляционная функция, якобиан.

### ВВЕДЕНИЕ

Определим многофазную последовательность длины  $N$  как

$$U = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}), u_n = \exp(i \cdot \varphi_n),$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица,  $\varphi_n \in [0; 2\pi]$  — значения фазы на  $n$ -ом кодовом интервале,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Аperiodическую автокорреляционную функцию  $R = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})$  многофазной последовательности можно найти в соответствии с выражением

$$r_\tau = \sum_{n=0}^{N-1-\tau} u_{n+\tau} \cdot u_n^*,$$

где  $u_n^* = \exp(-i \cdot \varphi_n)$  — комплексно-сопряженный кодовый элемент,  $\tau = 0, 1, \dots, N-1$ .

Существует два критерия оптимальности многофазных последовательностей, имеющих низкий уровень аperiodической автокорреляции.

Первый — минимаксный критерий, согласно которому максимальный уровень бокового лепестка  $PSL$ :

$$PSL(R) = \max_{1 \leq \tau \leq N-1} |r_\tau|$$

должен быть минимальным

$$MPS = \min_{\vec{U}} PSL.$$

Второй критерий — коэффициент  $MF$  (merit factor), характеризующий отношение энергии главного отсчета

к энергии боковых лепестков аperiodической автокорреляционной функции:

$$MF(R) = \frac{N^2}{2 \sum_{\tau=1}^{N-1} |r_\tau|^2}.$$

Оптимальная бинарная последовательность заданной длины  $N$  имеет наибольшее значение коэффициента  $MF$ .

Определим отношение сигнал/корреляционный шум (в дБ) в соответствии с выражением (1)

$$SNR = 20 \log \left( \frac{N}{PSL} \right). \quad (1)$$

Особый интерес среди многофазных последовательностей представляют последовательности Баркера, так как они обладают потенциально возможным минимальным уровнем боковых лепестков ААКФ  $PSL = 1$ . К сожалению, на сегодняшний день известны бинарные последовательности Баркера [1] лишь для длин  $N = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$ . В работе [2] было показано, что бинарных последовательностей других нечетных длин не существует, и высказано предположение, что бинарных последовательностей других четных длин также не существует. В работе [3] было показано, что если бинарные последовательности Баркера длин  $N > 13$  существуют, то только либо для длины  $N = 3\,979\,201\,339\,721\,749\,133\,016\,171\,583\,224\,100$ , либо для длин  $N > 4 \cdot 10^{23}$ , что не представляет практического интереса. Следующим шагом в поиске последовательностей Баркера является увеличение объема алфавита. Тернарные коды Баркера (с тремя фазами) были найдены в работе [4] до длин  $N \leq 9$ . Четырехфазные последовательности Баркера были найдены до длины  $N = 15$  [5], шестифазные последовательности Баркера были найдены до длины  $N = 18$  [6]. Голомб и Шольц в работе [6] назвали многофазные последовательности с уровнем боковых лепестков ИАКФ  $PSL = 1$  обобщенными последовательностями Баркера.

<sup>\*</sup>E-mail: leukhinan@list.ru

<sup>†</sup>E-mail: vova.bezrodny@gmail.com

<sup>‡</sup>E-mail: nat.kokovichina@gmail.com

В работе [7] были найдены обобщенные последовательности Баркера до длин  $N = 31$ , в работе [8] список обобщенных последовательностей Баркера был увеличен до длины  $N = 36$ , в работе Brenner [9] до длины  $N = 45$ , в работе [10] до длины  $N = 63$ , в работе [11] было найдено 4 многофазных последовательностей Баркера для длины  $N = 64$ , в работе [12] были найдены обобщенные последовательности Баркера из диапазона длин  $N = [65, 70]$  и для длин  $N = 72, 76, 77$ . Это до сих пор наибольшие на сегодняшний день длины, для которых были найдены многофазные последовательности Баркера.

В авторских работах [?] было построено большое количество многофазных последовательностей Баркера. В данной работе рассмотрим метод построения многофазных последовательностей с низким уровнем боковых лепестков ИАКФ практически значимых длин  $N = 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096$ , приведем пример многофазной последовательности для длины  $N = 512$  с  $PSL = 1.764$ .

### 1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Для построения ансамблей многофазных последовательностей будем использовать следующий численный итерационный алгоритм нелинейной оптимизации.

1. В начале работы алгоритма выбирается случайный вектор

$$\Psi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}\},$$

кодовые элементы которого имеют равномерный закон распределения в диапазоне  $\varphi_n \in [0, 2\pi]$  и являются аргументами многофазной последовательности  $U = \{\exp(i\varphi_0), \exp(i\varphi_1), \dots, \exp(i\varphi_{N-1})\}$ .

2. На каждом шаге итерации вектор  $\Psi$  заменяется на градиентное приращение

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \Delta\Psi,$$

В качестве приращения начального вектора выбирается метод Левенберга-Марквардта:

$$\Delta\Psi = [J^T J + \lambda_k \text{diag}(J^T J)]^{-1} J^T (y - f(\Psi_k)),$$

где  $J$  — это якобиан функции  $f(\Psi)_k$ ,  $\lambda$ - параметр регуляризации,  $y$ - значение функции. Параметр регуляризации назначается на каждом  $k$ -ом шаге итерации. При большом значении параметра метод Левенберга-Марквардта близок к градиентному методу, при  $\lambda \approx 0$  к методу Ньютона-Гаусса.

Матрицу якобиана  $J$  размером  $N \times R$  можно представить в виде:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\Psi)_1}{\partial \Psi_1} & \dots & \frac{\partial f(\Psi)_1}{\partial \Psi_R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\Psi)_N}{\partial \Psi_1} & \dots & \frac{\partial f(\Psi)_N}{\partial \Psi_R} \end{bmatrix},$$

Якобиан  $J$  будет представлять заранее рассчитанную таблицу частных производных с учетом аналитических выражений корней системы. Можно заранее выполнить аналитические преобразования и расчет частных производных для каждой длины последовательности. Кроме того, на каждом шаге итерации, в зависимости от полученных значений, происходит изменение параметров итерации, что влияет на скорость сходимости.

В общем случае, для оптимизации вычислений можно произвести конечно-разностную аппроксимацию частных производных. Чаще всего оценку производят по правой конечно-разностной формуле:

$$\frac{\partial f(\Psi)_k}{\partial \Psi_r} = \frac{f(\Psi + h)_k - f(\Psi)_k}{h},$$

где  $h$  — разностный интервал функции. Обычно разностный интервал лежит в диапазоне  $100 \cdot \varepsilon_M < h < 1000 \cdot \varepsilon_M$ , где  $\varepsilon_M$  — машинная точность, но на практике интервал выбирают из учета минимизации ошибок, возникающих при использовании конечно разностных аппроксимаций.

Метод поиска неравномерных последовательностей близких по корреляционным свойствам к многофазным последовательностям Баркера заключается в изменении условий системы уравнений на неравенство

$$\begin{cases} f(\Psi)_1 \leq a_1, \\ f(\Psi)_2 \leq a_2, \\ \vdots \\ f(\Psi)_N \leq a_N \end{cases},$$

где  $a_n$  заданный уровень требуемых боковых лепестков, близких к последовательностям Баркера. Обычно  $a_n$  выбирается из диапазона  $a_n = \text{const} = [1.085; 2]$ , чем выше значение уровня, тем выше вероятность обнаружения последовательности.

3. На третьем шаге в качестве оценки результата итерации делается проверка на минимум функции, которую можно представить в виде суммы квадратов:

$$F(\Psi) = \sum_{k=0}^{N-1} f^2(\Psi)_k.$$

Функция  $F(\Psi)$  в общем случае может определяться как

$$F(\Psi) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left| \sum_{n=0}^k (\exp(i(\varphi_{n+1} - \varphi_n))) \right| - PSL \right]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} f(\Psi)_k^2,$$

Для поиска многофазных последовательностей будем использовать выражение (2)

$$F(\Psi) = \sum_{n=0}^{N-1} \begin{cases} k^2, & 5A; 8 f(\Psi)_n < a_n, k < \varepsilon, \\ f^2(\Psi)_n, & 8 = 0G5. \end{cases}, \quad (2)$$

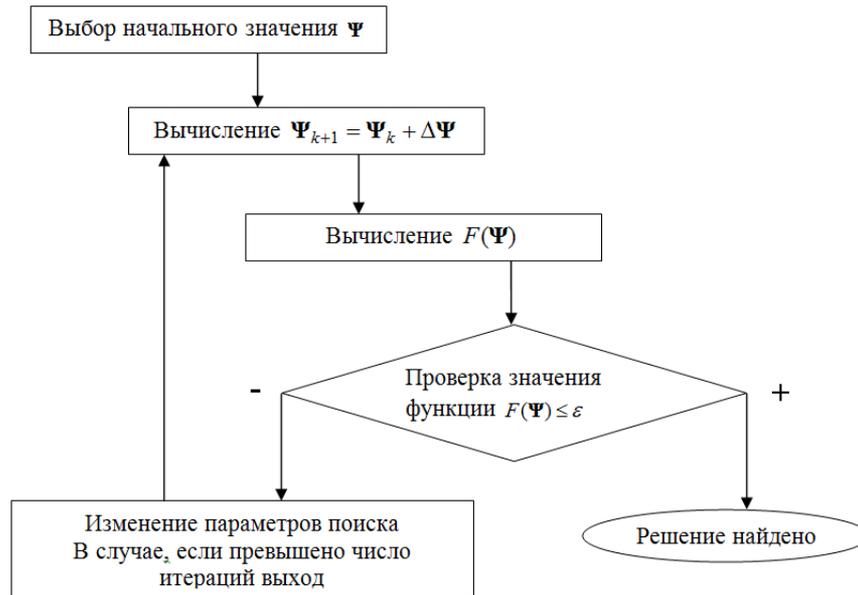


Рис. 1: Алгоритм построения многофазных последовательностей с низким уровнем боковых лепестков ААКФ

Таблица I: Основные характеристики синтезированных многофазных последовательностей

$N$	128	256	512	1024	2048	4096
$PSL$	1.556	1.535	1.763	1.997	2.41	2.832
$SNR$ , дБ	38.304	44.443	49.26	54.198	58.586	63.205

где  $k$  любой параметр, который обязательно должен быть меньше точности вычисления  $\varepsilon$  системы нелинейных уравнений.

4. На последнем шаге осуществляется проверка критерия по невязке, по которому происходит определение результата, как итерации, так и всего итерационного метода

$$F(\Psi) \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — точность определения результатов. В качестве критерия оценки может выбираться другая величина, или более сложное условие, позволяющее управлять отдельными уравнениями системы.

С учетом что  $a_n = \text{const}$ , а  $\frac{\partial(\text{const})}{\partial \varphi_i} = 0$ , значения функции якобиана  $J$  не изменяется. Суть метода состоит в управлении направления градиента поиска. В случае, когда уровень бокового лепестка конкретного уравнения удовлетворяет условию уравнения, отмечаем, что данное уравнение находится в 0 функции с точностью по невязке.

Схематически численный метод построения многофазных последовательностей с уровнем боковых лепестков ААКФ, меньшим некоторого заданного значения  $PSL$  показан на рис. 1. Каждую итерацию происходит проверка на максимально-допустимое число цик-

лов, а так же на сходимость решения. К изменению параметров поиска относится так же и вычисление коэффициентов регуляризации. При вычислении  $\Delta\Psi$  вычисляется якобиан системы  $J$  или его аппроксимация.

Метод работает не только со значениями  $a_n$  близкими к 1, но и с большими. При этом при увеличении  $a_n$  резко увеличивается вероятность нахождения решения и, соответственно, число найденных решений.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ПОИСКА МИНИМАКСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В табл. 1 приведем основные характеристики найденных многофазных последовательностей больших длин  $N = 128, 256, 512, 1024, 2048$  и  $4096$ .

В табл. 2 представлен пример синтезированной многофазной последовательности длины  $N = 512$  с максимальным уровнем боковых лепестков  $PSL = 1.763$ . Представленная в табл.2 многофазная последовательность обладает наименьшим уровнем боковых лепестков ААКФ среди всех известных многофазных последовательностей длин  $N = 512$  и имеет большое практическое значение для решения радиолокационных задач.

Таблица II: Значения аргументов кодовых элементов многофазной последовательности длины  $N = 512$  с  $PSL = 1.763$

0;	0;	5.81733;	5.16876;	4.5311;	3.81738;	3.11567;	2.36224;	1.60582;	0.86576;
0.14402;	5.68249;	4.97279;	4.15641;	3.48894;	2.34171;	1.68115;	1.08765;	0.23685;	5.73143;
5.12053;	4.1813;	3.63765;	2.85982;	2.23223;	1.50653;	0.80929;	0.13194;	6.05598;	5.74025;
5.63801;	5.42738;	5.0751;	4.68151;	4.24738;	3.6697;	3.10905;	2.58851;	2.02615;	1.55627;
0.81133;	0.14932;	5.97839;	5.62685;	5.3604;	5.30721;	5.14124;	4.84045;	4.43804;	4.23648;
3.7524;	3.4086;	3.14454;	3.20414;	3.51246;	3.62057;	3.54367;	3.40644;	2.70127;	2.433;
1.94145;	1.69984;	1.42173;	1.29413;	0.97254;	0.99014;	0.66782;	0.44107;	0.20508;	6.20622;
0.12364;	0.34018;	0.7747;	0.99004;	1.12277;	0.90747;	0.68278;	0.58325;	0.53041;	0.81059;
0.95345;	1.0533;	1.15189;	1.26504;	1.53282;	1.67409;	1.84287;	1.93795;	1.73453;	1.69277;
1.63883;	2.10152;	2.44811;	2.64687;	2.73782;	2.90584;	3.19297;	3.95932;	4.67087;	5.18383;
5.34326;	5.71672;	6.13524;	0.10966;	0.08556;	0.2305;	0.63152;	1.24404;	1.73779;	2.01877;
2.23249;	2.71158;	3.22357;	3.57615;	3.84516;	4.39935;	5.30184;	6.02093;	0.34563;	0.62095;
1.14841;	1.94146;	2.48424;	3.00936;	3.98444;	5.02628;	5.51561;	6.01502;	0.22926;	0.7765;
1.32336;	1.87149;	2.6631;	3.5552;	4.44969;	5.33206;	6.1422;	0.56501;	1.26562;	2.13159;
3.19617;	4.17151;	4.98763;	5.97349;	0.68432;	1.6635;	2.61906;	3.65137;	4.51469;	5.31914;
6.01268;	0.50415;	1.16342;	2.09553;	3.56816;	4.73135;	5.68702;	0.3057;	1.13907;	2.04571;
3.50817;	4.98653;	6.11984;	0.99665;	2.32641;	3.51913;	4.81013;	6.02533;	6.20495;	0.973;
2.25407;	3.6604;	5.36242;	0.7948;	1.65929;	2.84015;	3.96553;	4.60485;	5.75592;	0.862;
2.2225;	4.08536;	5.56354;	0.40713;	1.44892;	2.83347;	4.10943;	5.57055;	0.9374;	2.83243;
4.49545;	5.94147;	0.80624;	2.07101;	3.69999;	5.1805;	0.20283;	1.60702;	3.07912;	4.37977;
5.8347;	1.18542;	2.78477;	4.50119;	6.13526;	1.53845;	3.18372;	4.69534;	0.14065;	2.06253;
4.13883;	5.58899;	0.68824;	2.25631;	4.288;	6.06042;	1.48085;	3.21585;	4.9182;	0.21425;
2.09258;	3.8573;	5.68648;	1.13584;	3.25017;	5.13862;	0.5476;	2.48701;	4.61661;	0.61078;
2.63478;	4.68842;	6.1857;	1.83194;	3.83344;	0.04018;	2.37807;	4.36148;	6.09274;	1.80493;
3.77812;	5.77593;	1.39966;	3.49899;	5.52991;	1.01891;	3.52485;	5.63949;	1.73144;	3.95185;
0.1709;	2.41996;	4.85902;	1.0179;	3.33457;	5.42432;	1.38985;	3.39148;	5.28405;	1.07113;
3.72252;	6.22252;	2.47152;	4.6884;	0.70597;	2.93159;	5.45665;	1.48119;	3.79064;	6.12913;
2.19734;	4.61537;	1.09302;	4.03139;	0.1162;	2.53838;	4.87104;	0.94844;	3.25566;	6.06885;
2.87436;	5.58149;	1.95816;	4.57507;	0.85157;	3.07076;	5.20431;	1.11178;	3.95397;	0.31414;
3.14971;	5.98389;	2.54887;	5.55631;	1.89767;	4.48919;	0.51555;	2.92226;	0.00166;	3.17365;
6.24777;	2.77975;	5.27339;	1.8264;	4.57997;	1.34429;	3.81467;	0.21948;	3.06335;	5.94206;
2.69794;	5.44814;	1.99079;	4.73776;	1.28038;	4.39367;	1.07408;	4.20828;	1.39655;	4.76943;
1.42905;	4.01238;	0.44595;	3.706;	0.78894;	3.85913;	0.68338;	3.76884;	0.56297;	3.61542;
0.22454;	3.64855;	0.64848;	3.79147;	0.67554;	3.74962;	0.49502;	3.77758;	0.72482;	3.74917;
0.96842;	4.62218;	1.65863;	5.48054;	2.49487;	5.7726;	3.02263;	0.1606;	3.4555;	0.55611;
3.53448;	6.11796;	3.37652;	0.77493;	4.31392;	1.67265;	5.07674;	1.99182;	5.6265;	3.08376;
0.46284;	4.09924;	1.38682;	4.99129;	2.17276;	5.71158;	3.06733;	0.29519;	3.73365;	1.17635;
4.92846;	1.98623;	5.9212;	3.54604;	1.00532;	4.68247;	2.04636;	5.42598;	2.54338;	6.12608;
3.58486;	1.48289;	5.60409;	3.25688;	0.85007;	4.87979;	2.34404;	5.98192;	3.41155;	1.177;
5.24843;	3.08501;	0.91288;	5.00732;	2.69984;	0.07632;	3.47314;	1.06436;	5.10254;	2.64952;
0.26548;	4.50189;	2.40585;	0.45208;	4.52766;	2.07931;	6.21661;	4.0879;	2.35335;	0.31298;
4.5909;	2.61194;	0.48299;	4.54108;	1.85341;	5.45487;	3.26775;	1.3651;	6.03249;	3.92046;
1.64796;	5.86027;	4.0071;	2.23722;	0.43148;	4.79907;	2.73728;	0.81245;	5.1284;	3.13426;
1.28687;	5.47984;	3.35574;	1.50479;	5.93023;	4.53235;	3.15977;	1.6772;	6.11448;	3.86223;
1.67806;	5.92635;	4.34348;	2.58984;	0.86726;	5.41049;	3.71385;	1.81507;	0.32389;	5.25164;
3.71852;	2.47742;	1.22228;	6.15079;	4.75382;	3.11649;	1.18076;	5.45322;	3.67602;	1.9997;
0.34415;	5.36433;	3.60096;	2.10739;	0.29489;	4.90773;	3.28107;	1.88942;	0.50747;	5.60674;
4.29746;	3.13585;	1.81844;	0.62677;	5.72887;	4.45608;	3.07655;	1.67601;	0.25816;	5.00404;
3.49978;	1.95376;	0.45814;	5.4464;	4.23202;	3.05028;	1.86981;	0.89288;	6.08699;	4.97325;
3.94139;	3.014;	1.70073;	0.92066;	6.1813;	5.14994;	4.09668;	3.22424;	2.07217;	1.23454;
0.08679;	5.34088;	4.3376;	3.26329;	2.09848;	1.05967;	6.18949;	5.04813;	3.90312;	2.52959;
1.20565;	5.39572								

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен алгоритм построения многофазных последовательностей больших длин с низким уровнем боковых лепестков ААКФ. Используя предложенный алгоритм для длин  $N = 128, 256, 512, 1024, 2048$  и  $4096$  были синтезированы многофазные последовательности с рекордно низкими на сегодняшний день значениями уровней боковых ле-

пестков. Низкий уровень боковых лепестков (близкий к единице) обеспечивает потенциальные характеристики решения целого ряда радиолокационных задач: обнаружения, распознавания, разрешения и оценки параметров целей.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-99514 и в рамках госзадания Минобрнауки РФ проект № 2.2226.2017/ПЧ и проект № 2.9140.2017/БЧ.

- 
- [1] *Barker R. H.* Comm. Theory. 1953.  
 [2] *Turin R.* Proc. of the IEEE. 1963. **51**. P. 1256.  
 [3] *Borwein P., Mossinghoff M. J.* J. Comp. Math. 2014. **17**. N 1. P. 24.  
 [4] *Jr de Long D. F.* MIT Linc. Lab. Lex. Massh. Group Rep. 1960.  
 [5] *Welti G. R.* IRE Transaction on Inf. Theory 1960. **6**, N 3.  
 [6] *Golomb S. W., Scholtz R. A.* Trans. on Inf. Th. 1965. **11**, N 4. P. 533.  
 [7] *Friese M., Zottmann H.* Electr. Lett. 1964. **30**, N 23. P. 1930.  
 [8] *Friese M.* IEEE Trans. on Inf. Theory 1996. **42**, N 4. P. 1248.  
 [9] *Brenner A. R.* Electr. Lett. 1998. **34**, N 16. P. 1576.  
 [10] *Borwein P. B., Ferguson R. A.* IEEE Trans. on Inf. Theory 2005. **51**. P. 1564.  
 [11] *Nunn C. J.* Proc. of the IEEE Int. Radar Conf. 2005. P. 190.  
 [12] *Nunn C. J., Coxson G. E.* IEEE Trans. On Aerosp. and El. Syst. 2009. **45**, N 4. P. 775.  
 [13] *Леухин А. Н.* Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2009. N 6. С. 13.  
 [14] *Потехин А. Н., Шувалов А. С., Леухин А. Н.* Цифровая обработка сигналов. 2013. N 4. С. 45.

---

### Polyphase sequences of long lengths with low level of sidelobes of aperiodic autocorrelation function

**A. N. Leukhin<sup>a</sup>, V. I. Bezrodnyy<sup>b</sup>, N. A. Kokovichina<sup>c</sup>**

*Mari State University. Yoskar-Ola, 424000, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>leukhinan@list.ru, <sup>b</sup>vova.bezrodny@gmail.com, <sup>c</sup>nat.kokovichina@gmail.com*

The numbered iteration algorithm for polyphase sequence constructions with low level sidelobes of aperiodic autocorrelation function is offered. The example of polyphase sequence for the length  $N = 512$  with peak sidelobe of aperiodic autocorrelation function  $PSL = 1.763$  is demonstrated. Polyphase sequences with a low level of side lobes AACF are widely used as modulating signals in radar systems for various purposes. A low level of side lobes provides detection of targets with a low effective scattering area (ESA) against the background of high ESA targets.

PACS: 02.30.Lt.

*Keywords:* polyphase sequences, Barker codes, correlation function, jacobian.

*Received 24 July 2017.*

#### Сведения об авторах

1. Леухин Анатолий Николаевич — доктор физ.-мат. наук, проректор по научной работе и инновационной деятельности; тел.: (8362) 68-80-16, e-mail: leukhinan@list.ru.
2. Безродный Владимир Иванович — аспирант; тел.: (8362) 68-80-19, e-mail: vova.bezrodny@gmail.com.
3. Коковихина Наталья Александровна — нач. центра высокопроизводительных вычислений; e-mail: nat.kokovichina@gmail.com.