

Динамика многослойной адаптивной сети с кооперативным взаимодействием между слоями

Д. В. Кирсанов,^{*} В. В. Макаров,[†] М. В. Горемыко,[‡] В. О. Недайвозов,[§] А. Е. Храмов[¶]

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

Россия, 410056, Саратов, ул. Политехническая, 77

(Статья поступила 23.07.2017; Подписана в печать 20.09.2017)

В работе исследованы процессы синхронизации и образования структурных паттернов в многослойной сети динамических элементов, взаимодействие между которыми в пределах слоя происходит согласно принципам аддитивности и гомеостаза, тогда как слои конкурируют между собой за оптимальную топологию.

PACS: 05.45.-a.

УДК: 519.179.2

Ключевые слова: теория сложных сетей, осцилляторы, нелинейные колебания, многослойная сеть.

ВВЕДЕНИЕ

Теория сложных сетей представляет собой эффективный инструмент исследования множества процессов, происходящих как на макроуровне — в сетях городов и популяций [1], социальных системах [2, 3], так и на микроуровне — в биологических сетях [4] и нейронных ансамблях [?]. Разработанный на данный момент инструментарий — алгоритмы и теоретические методы — приближают ученых к решению многих задач. Однако, несмотря на достижения последних двух десятилетий в этой области научного познания все более явной становится необходимость выхода за пределы привычной парадигмы для понимания более сложных явлений. Причина этого довольно проста — не существует систем, функционирующих полностью изолированно. Напротив, все они взаимосвязаны, и то, что происходит на одном уровне взаимодействия, влияет на структуру и динамику процессов на другом уровне — так многие реально существующие физические, социальные, биологические и инфраструктурные системы состоят из нескольких частей, взаимодействующих друг с другом. Выявление принципов взаимодействия между отдельными адаптивными сетями, таких как кооперация и конкуренция, а также изучение обратной связи между эволюцией структуры и динамикой адаптивных сетей, представляется важной задачей, исследование которой позволит получить более целостное представление о процессах, протекающих в реальных системах [8, 9].

В качестве такой системы, состоящей из взаимодействующих подсетей может быть рассмотрена многослойная сеть (multiplex network) [10] динамических элементов, слои которой содержат идентичный набор узлов, но имеют различную топологию связей. В на-

стоящей работе исследуется структура и динамика многослойной адаптивной сети фазовых осцилляторов, структура слоев которой имеет обратную связь с динамикой элементов и эволюционирует согласно принципам аддитивности [11] и гомеостаза [12]. Принцип аддитивности заключается в том, что между элементами, состояния которых близки за определенный промежуток времени, связь усиливается. Гомеостаз подразумевает ограничение суммарной силы входящих связей каждого узла. Взаимодействие между слоями исследуемой модели происходит по принципам конкуренции, приводящей к динамическому перераспределению связей внутри каждого слоя.

1. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемая система состоит из $M = 2$ слоев, каждый из которых содержит $N = 500$ узлов, динамика которых описывается с помощью известной модели Курамото [13], являющейся признанным инструментом исследования всевозможных форм коллективной динамики [14–16]. Динамическое состояние i -го узла, принадлежащего слою l , определяется выражением

$$\dot{\varphi}_i^l = \omega_i^l + \lambda \sum_j^N w_{ij}^l \sin(\varphi_i^l - \varphi_j^l), \quad (1)$$

где ω_i^l — заданные случайным образом натуральные частоты в диапазоне $[-\pi, \pi]$, w_{ij}^l — вес связи соединяющей узлы j и i в пределах слоя l , λ — сила связи. Изначально фазы взаимодействующих элементов заданы случайно в диапазоне $[-\pi, \pi]$ на каждом слое. Веса связей также заданы случайно в пределах каждого слоя так, что выполняется соотношение

$$\sum_{i \neq j} w_{ij}^l = 1, \quad (2)$$

означающее постоянство и идентичность суммарной входящей связи каждого элемента внутри слоя с течением времени, что отражает свойство гомеостазиса

*E-mail: dankirsdot@gmail.com

†E-mail: vladmak404@gmail.com

‡E-mail: gormv67@mail.ru

§E-mail: fdf_het@mail.ru

¶E-mail: hramovae@gmail.com

в исследуемой системе. Вес связи, соединяющей узлы i и j , принадлежащие слою l , изменяется согласно закону

$$\dot{w}_{ij}^l = p_{ij}^l - \left(\sum_{k \in N^l} p_{ik}^l \right) w_{ij}^l - \left(\sum_{k \neq l} p_{ij}^k \right) w_{ij}^l, \quad (3)$$

где величина p_{ij}^l , зависящая от времени, определяется соотношением

$$p_{ij}^l = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^t e^{\left(\frac{t-t'}{T}\right)} e^{i[\varphi_i^l(t') - \varphi_j^l(t')]} dt' \right| \quad (4)$$

и является мерой синхронизации между осцилляторами i и j на слое l за характеристическое время адаптации T . Таким образом, большие значения параметра p_{ij}^l приводят к увеличению веса связи между соответствующими элементами. Совместно с этой величиной, второе слагаемое уравнения (3) описывает адаптивное взаимодействие между элементами внутри слоев — степень синхронизации элементов i и j будет тем меньше, чем больше узел i синхронизован со всеми оставшимися узлами слоя, тогда как третье слагаемое уравнения представляет собой конкуренцию слоев за оптимальную топологию — чем более синхронно ведут себя узлы i и j на слое k , тем менее синхронизованы они будут на слое l .

В ходе исследования был проведен численный анализ динамики процессов конкуренции и синхронизации разработанной модели при изменении управляющих параметров — времени адаптации T и силы связи λ .

Чтобы получить полную картину эволюции топологии данной системы, был введен параметр r_{layer} , который характеризует среднюю степень синхронизации фазовых осцилляторов внутри слоя усредненную по всем слоям сети и определяется выражением

$$r_{\text{layer}} = \frac{1}{MN} \sum_{l=1}^M \left| \sum_{i=1}^N e^{\sqrt{-1}\varphi_i^l} \right|, \quad (5)$$

а также r_{local} , определяющий среднюю степень синхронизации между двумя любыми связанными узлами на каждом слое, и усредненную по всем парам связанных элементов

$$r_{\text{local}} = \frac{1}{MN} \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(w_{ij}^l e^{\sqrt{-1}(\varphi_i^l - \varphi_j^l)} \right). \quad (6)$$

Дополнительно была рассчитана суммарная разность весов связей между слоями представленной адаптивной сети, которая вычисляется согласно формуле

$$w_{ij}^d = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |w_{ij}^1 - w_{ij}^2|, \quad (7)$$

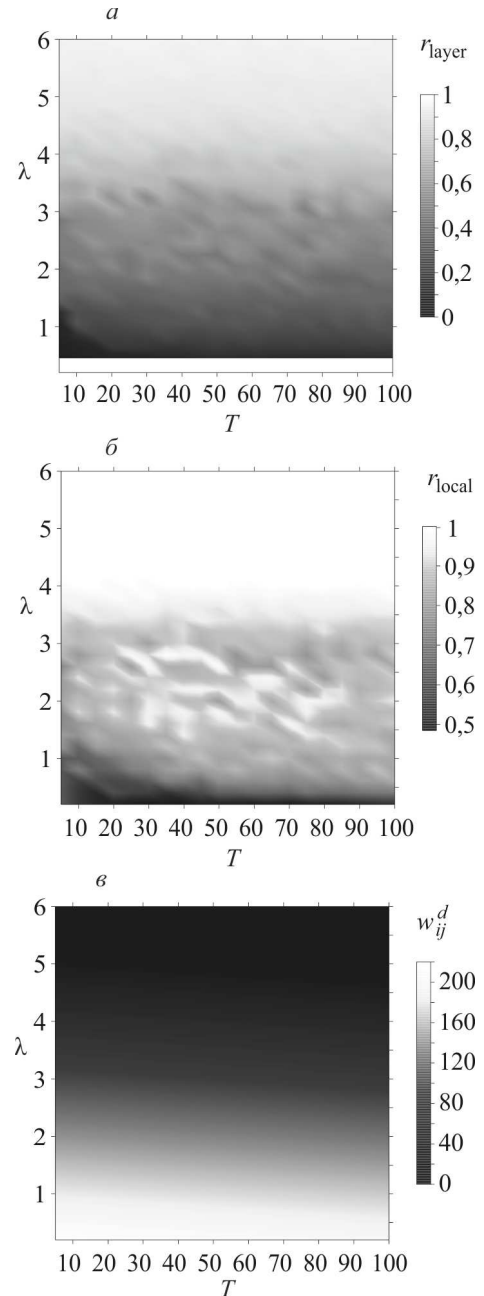


Рис. 1: Двухпараметрические зависимости параметра порядка по слоям — a , локального параметра порядка — b , суммарной разности весов связей — c

и позволяет дать оценку степени синхронизации слоев сетевой структуры в целом.

На рис. 1 представлены двухпараметрические зависимости полученных результатов. При малых значениях управляющих параметров устанавливается режим асинхронной динамики — видно, что рассчитанные параметры порядка сети демонстрируют очень низкие значения, в то время как суммарная разность весов связей очень высока. При постепенном увеличении силы связи λ , в пределах $0.5 \leq \lambda \leq 3$, уста-

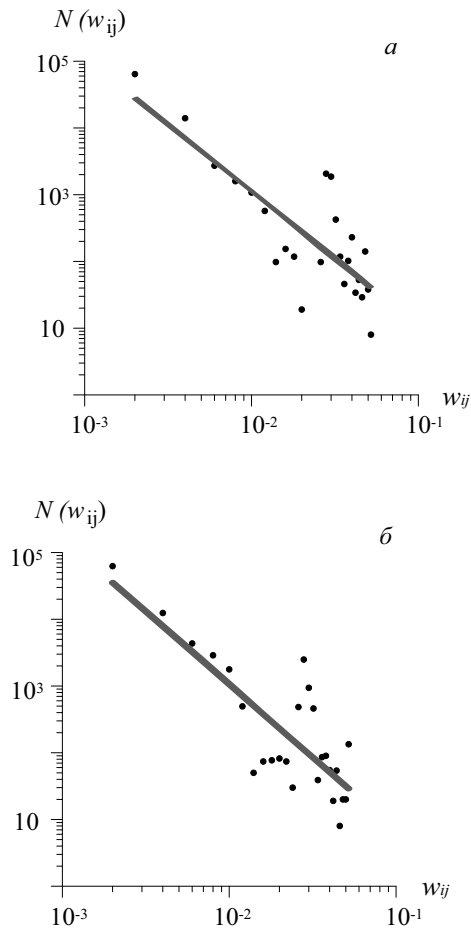


Рис. 2: Степенные распределения весов связей первого — *a* и второго — *б* слоев сети при $\lambda = 0.5$, $T = 50$

навливаются режим частичной, кластерной синхронизации внутри слоев сети — в то время как параметр порядка по слоям достаточно мал (рис. 1,*a*), степень локальной синхронизации элементов обладает высокими значениями (рис. 1,*б*). Степенное распределение сети, построенное при $\lambda = 0.5$ и $T = 50$, позволяет сделать вывод что установившийся режим характеризуется возникновением топологий, обладающих свойством свободного масштабирования [17], которое присуще абсолютному большинству реальных сетей, и уникальных для каждого слоя (рис. 2), что также подтверждается значениями суммарной разности весов связей w_{ij}^d в данной окрестности управляющих параметров (рис. 1,*в*) Видимые на распределении

локальные максимумы и минимумы, отклоняющиеся от аппроксимированной прямой, соответствуют именно тем узлам сети, которые входят в состав однородных кластеров, сильно связанных внутри себя, но слабо взаимодействующих между собой.

С увеличением параметра λ разность весов связей между слоями изучаемой модели постепенно уменьшается до значений, приблизительно равных нулевым, что говорит о возникновении идентичных топологий в слоях сети. В тоже время видно, что локальный параметр порядка и параметр порядка усредненный по слоям сети увеличиваются. Это свидетельствует об однородном распределении связей внутри каждого слоя.

Также стоит отметить, что изменение управляющего параметра T имеет значимое влияние только при силе связи $\lambda \leq 1$, а при больших ее значениях почти не отражается на виде двухпараметрических зависимостей, представленных на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате данного исследования была рассмотрена многослойная адаптивная сеть фазовых осцилляторов, используя которую, были численно изучены процессы конкуренции и синхронизации между узлами системы, в зависимости от таких управляющих параметров, как сила связи λ и характерного время адаптации T . Было обнаружено, что при больших значениях силы связи λ имеют место режимы глобальной синхронной динамики, характеризующиеся идентичной топологией взаимодействующих слоев и однородным распределением связей в каждом из них, в то время как при малых значениях силы связи наблюдаются режимы частичной и кластерной синхронизации, а внутри слоев возникают свободно масштабируемые топологии сложной структуры имеющие некоторое количество скопления элементов, внутри которых характерно однородное распределение весов связей.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что развитие математических моделей динамических сетей на основе принципов, реализующихся в реальных системах, таких как аддитивность, гомеостазис и конкуренция, дают возможность получить структуры сети, близкие к существующим в природе, и лучше понять принципы такой коллективной организации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-02-00624)

- [1] Onnela J.P., Saramäki J., Hyvönen J., Szabo G., Lazer D., Kaski K., Kertesz J., Barabasi A.-L. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2007. **104**. P. 7332.
 [2] Stehlé J., Barrat A., Bianconi G. Phys. Rev. E. 2010. **81**, N 3. P. 035101.
 [3] Robins G., Snijders T., Wang P., Handcock M.,

- Pattison P. Social networks. 2007. **29**, N 2. P. 192.
 [4] Valencia M., Martinerie J., Dupont S., Chavez M. Phys. Rev. E. 2008. **77**, N 5. P. 050905.
 [5] Ulhaas P.J. Frontiers Neurosc. 2009. **3**. P. 17.
 [6] Hagmann P., Cammoun L., Gigandet X., Meuli R., Honey C.J., Wedeen V.J., Sporns O. PLoS Biology. 2008.

- 6, N 159. P. 1479.
- [7] *Santhanam G., Ryu S., Byron Y., Afshar A., Shenoy K. V.* Nature Letters. 2006. **442**, N 7099. P. 195.
- [8] *Van Ooyen A.* Computation in Neural Systems. 2001. **12**, N 1. P. 1.
- [9] *Scott J.* Sociology. 1988. **22**, P. 109.
- [10] *Makarov V. V., Koronovskii A. A., Maksimenko V. A., Hramov A. E., Moskalenko O. I., Buldu J. M., Boccaletti S.* Chaos, Solitons & Fractals. 2016. **84**. P. 23.
- [11] *McPherson M., Smith-Lovin L., Cook J.M.* Ann. Rev. Sociol. 2001. **27**. P. 415.
- [12] *Gutiérrez R., Amann A., Assenza S., Gomez-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Phys. Rev. Lett. 2011. **107**, N 23. P. 234103.
- [13] *Kuramoto Y.* Lect. Notes in Phys. 1975. **30**. P. 420.
- [14] *Strogatz S.H.* Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. **143**, N 1. P. 1.
- [15] *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y. et al.* Physics reports. 2006. **424**, N 4. P. 175.
- [16] *Assenza S., Gutiérrez R., Gímez-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Scientific reports. 2011. **1**. N 99.
- [17] *Barabási A.L., Albert R., Jeong H.* Physica A: statistical mechanics and its applications. 2000. **281**, N 1. P. 69.

Dynamics of a multilayer adaptive network with cooperative interaction between layers

D. V. Kirсанов^a, V. V. Макаров^b, M. V. Горемыко^c, V. O. Недайвозов^d, A. E. Храмов^e

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Saratov 410056, Russia*

E-mail: ^adankirsdot@gmail.com, ^bvladmak404@gmail.com, ^cgormv67@mail.ru, ^dfdf_het@mail.ru, ^ehramovae@gmail.com

In this paper, we investigated the processes of synchronization and the formation of structural patterns in a multilayered network of dynamic elements. The layers compete for an optimal topology, where elements interactions within the layer occurs according to the principles of additivity and homeostasis.

PACS: 05.45.-a

Keywords: complex network theory, oscillator, nonlinear oscillations, multilayer network.

Received 23 July 2017.

Сведения об авторах

1. Кирсанов Даниил Владимирович — студент; e-mail: dankirsdot@gmail.com.
 2. Макаров Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; e-mail: vladmak404@gmail.com.
 3. Горемыко Михаил Владимирович — руководитель управления имуществом комплексом; e-mail: gormv67@mail.ru.
 4. Недайвозов Владимир Олегович — студент; e-mail: fdf_het@mail.ru
 5. Храмов Александр Евгеньевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: hramovae@gmail.com.
-