Распространение трехмерных оптических пуль в квадратично–нелинейных средах

И. Г. Захарова,* А. А. Калинович,† М. В. Комиссарова,‡ С. В. Сазонов§
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 27.11.2017; Подписана в печать 29.11.2017)

Трехмерные световые пучки–импульсы, называемые световыми пулями, изучаются как аналитически, так и численно. С помощью метода усредненного Лагранжиана получено аналитическое решение, описывающее пулю при нелинейном параметрическом взаимодействии. Получены условия устойчивого распространения пули, представляющее собой соотношение между дифракционной, дисперсионной и нелинейной длинами. Аналитические выводы подтверждены в процессе компьютерного моделирования. В расчетах показано, что световая пуля распространяется на расстояние, значительно превышающее дисперсионную и дифракционную длины в анизотропной среде. Отдельно рассмотрены случаи устойчивого распространения двухкомпонентной трехмерной световой пули, а также формирование светового пучка-импульса при генерации второй оптической гармоники.

PACS: 42.65.Tg УДК: 535.03:519.06
Ключевые слова: квадратичная нелинейность, двуцветный солитон, оптическая пуля.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к исследованию формирования устойчивых локализованных световых волн, называемых пространственно-временными солитонами или оптическими пулями. Такие двух- или трехмерные самозахватывающиеся моды возникают в результате конкуренции между нелинейной самокомпрессией поля и линейными эффектами дифракции и дисперсии, приводящими к расплыванию волновых пакетов в пространстве и времени. Оптические пули не только представляют предмет теоретических исследований, но открывают возможности практических приложений, таких как сверхбыстрые полностью оптические системы обработки данных [1] или высокоточная интерферометрия [2]. В отличие от одномерных солитонов, двух- и трехмерные пули, являясь о своей природе многомерной структурой, нестабильны в кубичных средах: при распространении происходит коллапс пучка [3]. Однако в квадратично-нелинейных средах в случае генерации второй гармоники коллапса не происходит, пуля остается стабильной [4, 5]. Теоретические исследования распространения многомерных пуль в квадратичных средах до сих пор проводились в основном с помощью компьютерных расчетов. Отметим при этом, что в [6] построена аналитическая форма приближенного стационарного солитонного решения для многомерной модели генерации второй оптической гармоники в предположении синхронизма групповых скоростей. Кроме того в [7] представлен анализ дисперсной модуляционной неустойчивости пространственных солитонов вследствие невырожденного трехволнового взаимодействия.

В настоящей работе рассматривается возможность генерации и устойчивого распространения трехмерных оптических пуль в квадратично–нелинейных средах. Среди способов преодоления неустойчивости многомерных солитонов предлагается использовать нелинейное параметрическое взаимодействие. В качестве среды для достижения такого типа нелинейности можно предложить анизотропную микродисперсную среду, в которой существенна пространственная дисперсия. Такая среда позволяет реализовать одновременное выполнение фазового и группового синхронизма. Предполагается, что нелинейная рефракция проявляется раньше, чем дифракция и дисперсия. С помощью метода усредненного Лагранжиана получено аналитическое решение в виде пространственно–временного солитона. В результате компьютерного моделирования подтверждено устойчивое распространение пули, имеющей форму и параметры, предсказанные аналитически.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

При генерации второй оптической гармоники в импульсном режиме комплексные амплитуды основной частоты ψ_1 и второй гармоники ψ_2 описываются следующей системой уравнений

$$i\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\delta\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right]+\frac{\beta_2^{(1)}}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2}-\gamma_1\psi_1^*\psi_2e^{i(2k_1-k_2)z}= \\ =\frac{c}{2n_1\omega}\Delta_\perp\psi_1, \quad (1)$$

*E-mail: zaharova@physics.msu.ru
†E-mail: kalinovich@gmail.com
‡E-mail: komissarova@physics.msu.ru
§E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

$$i\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial z}-\delta\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\right]+\frac{\beta_2^{(2)}}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2}-\gamma_2\psi_1^2e^{-i(2k_1-k_2)z}=$$
$$=\frac{c}{4n_2\omega}\Delta_\perp\psi_2, \quad (2)$$

где $\tau=t-0.5(1/v_1+1/v_2)z$, $\delta=0.5(1/v_1-1/v_2)$ — расстройка групповых скоростей, ω — частота основной волны, c — скорость света в вакууме, $\beta_2^{(1,2)}$ — коэффициенты дисперсии, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты нелинейности, $k_{1,2}$ - волновые векторы, $n_{1,2}$ — коэффициенты преломления.

Рассмотрим случай равенства фазовых и групповых скоростей $k_2=2k_1$, $n_1=n_2=n$, $\delta=0$, $v_1=v_2=v$, $\tau=t-z/v$. Дисперсионные коэффициенты будем считать связанными соотношением $\beta_2^{(2)}=2\beta_2^{(1)}$.

В этом случае система (1), (2) сводится к виду

$$i\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\tau^2}-\gamma\Phi_1^*\Phi_2=\frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\Phi_1, \quad (1a)$$

$$i\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+k_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\tau^2}-\frac{\gamma}{2}\Phi_1^2=\frac{c}{4n\omega}\Delta_\perp\Phi_2, \quad (2a)$$

$$\gamma\equiv\gamma_1, \Phi_1=\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\gamma_1}}\psi_1, \Phi_2=\psi_2 \quad (3)$$

Кроме того мы положили, что

$$\beta_2^{(2)}=2\beta_2^{(1)}=2k_2 \quad (4)$$

В одномерном случае ($\Delta_\perp=0$) система (1a), (2a) при учете (3) обладает солитонными решениями вида

$$\psi_1=\pm\frac{3k_2}{4\tau_p^2}\sqrt{\frac{2}{\gamma_1\gamma_2}}\exp\left(i\frac{k_2z}{2\tau_p^2}\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right), \quad (5)$$

$$\psi_2=-\frac{3k_2}{4\tau_p^2\gamma_1}\exp\left(i\frac{k_2z}{\tau_p^2}\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right). \quad (6)$$

Здесь τ_p — временная длительность импульса.

Учет поперечных возмущений проведем методом «усредненного лагранжиана». Заметим для этого, что системе (1a), (2a) соответствует плотность Лагранжиана

$$L=L_1+L_2+L_{int}, \quad (7)$$

где

$$L_1=\frac{i}{2}\left(\Phi_1^*\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}-\Phi_1\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial z}\right)-\frac{k_2}{2}\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}\right|^2+\frac{c}{2n\omega}\left|\nabla_\perp\Phi_1\right|^2, \quad (8)$$

$$L_2=\frac{i}{2}\left(\Phi_2^*\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\Phi_2\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial z}\right)-k_2\left|\frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau}\right|^2+\frac{c}{4n\omega}\left|\nabla_\perp\Phi_2\right|^2, \quad (9)$$

$$L_{int}=-\frac{\gamma}{2}\left(\Phi_1^{*2}\Phi_2+\Phi_1^2\Phi_2^*\right). \quad (10)$$

В соответствии с (5), (6) пробные решения выберем в виде

$$\Phi_1=\pm\frac{6k_2}{\gamma}\mu^2\exp\left(iQ\right)\mathrm{sech}^2\left(\mu\tau\right), \quad (11)$$

$$\Phi_2=-\frac{3k_2}{\gamma}\mu^2\exp\left(2iQ\right)\mathrm{sech}^2\left(\mu\tau\right). \quad (12)$$

Здесь μ и Q — соответственно «медленная» и «быстрая» функции координат.

После подстановки (11), (12) в (7)–(10) и интегрирования по τ будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Ldt=216\left(\frac{k_2}{\gamma}\right)^2\Lambda,$$

где «усредненный Лагранжиан»

$$\Lambda=\frac{\mu^3}{3}\left[\frac{c}{2n\omega}\left(\nabla_\perp Q\right)^2-\frac{\partial Q}{\partial z}\right]+\frac{2}{5}k_2\mu^5+$$
$$+\frac{A}{4n\omega}\left(1+\frac{\pi^2}{30}\right)\mu\left(\nabla_\perp\mu\right)^2. \quad (13)$$

Запишем с использованием (13) уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\partial Q/\partial z\right)}+\nabla_\perp\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\nabla_\perp Q\right)}=0, \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}=0.$$

В результате получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}+\nabla_\perp\left(\rho\nabla_\perp\phi\right)=0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\left(\nabla_\perp\phi\right)^2}{2}+\frac{2c}{n\omega}k_2\rho^{2/3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{30}\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (15)$$

Здесь

$$\rho=\mu^3, \quad \phi=-\frac{c}{n\omega}Q. \quad (16)$$

Полагая в (14), (15) $\nabla_\perp=0$, имеем $\rho=\mu^3=\mathrm{const}$. Пусть $\mu=1/2\tau_p$. Тогда из (15) с учетом (16) имеем $Q=\frac{k_2}{2\tau_p^2}z$, что в точности совпадает со случаем одномерного решения. Это важный аргумент в пользу метода «усредненного Лагранжиана».

Система (14), (15) формально схожа с уравнениями двумерной гидродинамики идеальной квантовой жидкости, где роль времени играет координата z.

Правая часть (15) учитывает влияние дифракции. В ее отсутствие имеем приближение геометрической оптики.

Нетрудно видеть, что система (14), (15) эквивалентна уравнению для комплексной функции ψ:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{ck_2}{gn\omega}|\psi|^{4/3}\psi + g\Delta_\perp\psi + \\ + \left[\frac{1}{6g}\left(1+\frac{\pi^2}{30}\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2 - g\right]\frac{\psi}{|\psi|}\Delta_\perp|\psi|, \quad (17)$$

где

$$\psi = \sqrt{\rho}\exp\left(-i\frac{\phi}{2g}\right), \quad (18)$$

g — некоторая постоянная, введенная для обезразмеривания показателя мнимой экспоненты в (18).

Будем искать решение (17) в виде

$$\psi = F(r_\perp)\exp(-i\kappa z). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17), получим

$$\Delta_\perp F = \frac{1}{R_0^2}F - bF^{7/3}, \quad (20)$$

где

$$\frac{1}{R_0^2} = \frac{6g\kappa}{1+\pi^2/30}\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2, \quad b = -\frac{6k_2}{1+\pi^2/30}\frac{n\omega}{c}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что (20) имеет локализованное в поперечных координатах решение при $b > 0$, т.е. при $k_2 < 0$. Тогда R имеет смысл характерного поперечного размера импульса.

Введем безразмерные переменные

$$\zeta = r_\perp/R_0, \quad P = \left(bR_0^2\right)^{3/4}F. \quad (22)$$

$$\Delta_\zeta P = P - P^{7/3}. \quad (23)$$

Условиям (4) и $k_2 < 0$ можно удовлетворить, если рассматривать микродисперсную среду, обладающую пространственной дисперсией [9].

В аксиально-симметричном случае уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d^2P}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dP}{d\zeta} = P - P^{7/3}. \quad (24)$$

В окрестности максимума, где $\zeta = 0$, справедливо разложение

$$P = 2.32\left(1 - 0.52\zeta^2 + 0.20\zeta^4 - ...\right). \quad (25)$$

При $\zeta >> 1$ можно пренебречь нелинейным слагаемым в (24). Тогда

$$P \sim K_0(\zeta) \sim \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\exp(-\zeta), \quad (26)$$

где $K_0(\zeta)$ — функция Макдональда нулевого порядка.

При всех значениях ζ от нуля до бесконечности данное решение очень хорошо (с относительной точностью, большей 1%) аппроксимируется функцией

$$P = 2.32\,\text{sech}^{3/2}(0.83\zeta). \quad (27)$$

Данная зависимость изображена на рис. 1.

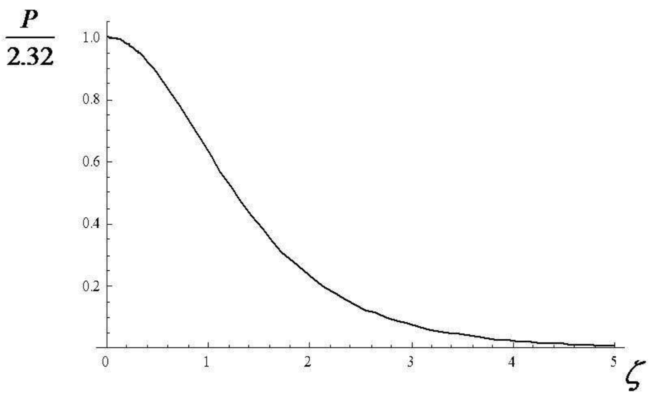

Рис. 1: Зависимость $P(\zeta)$, построенная на основе выражения (27); данная зависимость с точностью до 1% совпадает с численным решением уравнения (23) практически на всем интервале значений ζ

Учитывая, что $\mu = \rho^{1/3}$, а $F = \sqrt{\rho}$, получим $\mu = F^{2/3}$. Учитывая также (27) и (22), будем иметь

$$\mu = \frac{1.75}{\sqrt{b}R_0}\text{sech}\left(0.83\frac{r}{R_0}\right), \quad (28)$$

$$\rho = \frac{5.36}{b^{3/2}R_0^3}\text{sech}^3\left(0.83\frac{r}{R_0}\right). \quad (29)$$

Тогда получаем

$$R_0 = 3.422\frac{\tau_0}{\sqrt{b}}. \quad (30)$$

Здесь τ_0 — временная длительность импульса на оси аксиальной симметрии.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Компьютерное моделирование проводилось на основе системы уравнений (1a–2a). Данная система имеет следующие интегралы движения, сохранение которых контролировалось в процессе счета:

$$I_1(z) = \iiint\left(|\psi_1|^2 + 2|\psi_2|^2\right)dx\,dy\,d\tau, \quad (31)$$

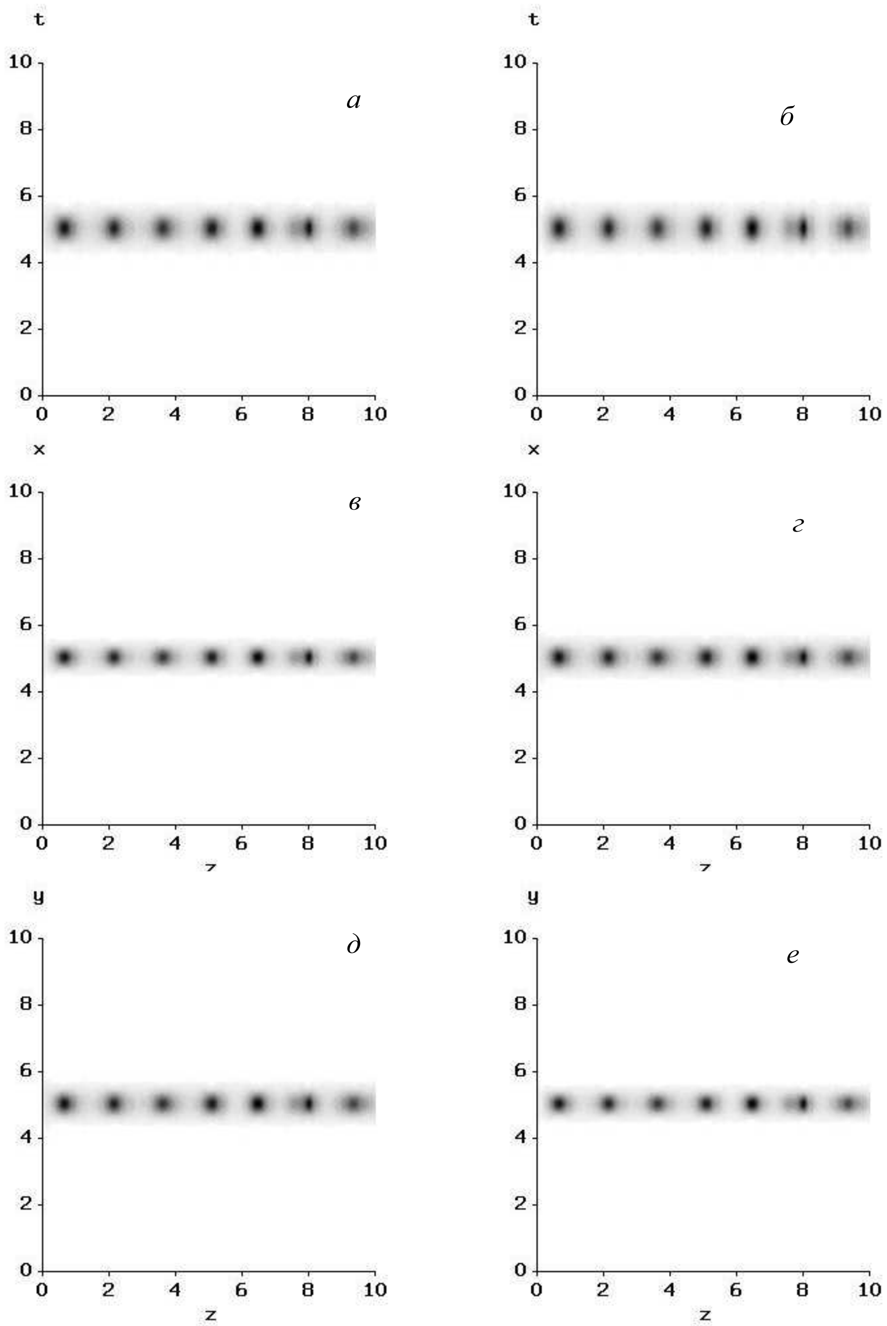

Рис. 2: Распределение интенсивности на центральных сечениях tz (*а,б*), xz (*в,г*), yz (*д,е*) пучков первой (*а, в, д*) и второй (*б, г, е*) гармоник

$$H(z) = \iiint \left[\frac{k_2}{2} \left(\left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right|^2 \right) - \right.$$
$$- \frac{c}{4n\omega} \left(2 \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right|^2 \right) +$$
$$\left. + \gamma Re(\psi_1^2 \psi_2^*) \right] dxdyd\tau. \quad (32)$$

Для численного решения (1a)–(2a) использовалась известная псевдо-спектральная нелинейная консервативная разностная схема. Поскольку решаемая задача трехмерна, а следовательно, требует экономичного по времени алгоритма, для ее реализации был разработан оригинальный итерационный процесс, аналогичный описанному в [9]. Итерации проводились поэтапно по координатам t, x и y, и осуществлялись до достижения заданной точности. Первый интеграл, имеющий смысл энергии системы, сохранялся с точностью $\sim 10^{-10}$, гамильтониан — с точностью $\sim 10^{-4}$.

Известно, что в одномерном случае существует солитонное решение вида $\psi_{1,2\,0} = E\cosh^{-2}(x/r_x)$ [10].

В качестве начального условия, в отличие от [6], где задавался гауссов профиль, в соответствии с [8, 11, 12] использовалось выражение

$$\psi_{1,2\,0} = E_{1,2}\cosh^{-2}(x/r_x)\cosh^{-2}(y/r_y)\cosh^{-2}(\tau/r_\tau). \quad (33)$$

На рис. 2 приведено распределение амплитуд первой и второй гармоник в центральных сечениях xz, yz и tz. Брались следующие параметры $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1$, $\beta_2^{(1)} = -2$, $\beta_2^{(2)} = -4$ — случай аномальной дисперсии, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.5$, $r_x = r_y = 1$, $\tau_0 = 1$, $E_1 = E_2 = 12$. Легко видеть, что амплитуда пучка осциллирует, но весь пучок распространяется как целое. Следовательно, можно говорить о том, что распространяется оптическая пуля, содержащая две гармоники.

Также был рассмотрен процесс генерации пуль из начального гауссова пучка основной частоты. Был проведен ряд численных экспериментов, показывающих, что происходит генерация второй частоты и дальнейший захват в пулю вида (33).

Численный эксперимент, проведенный с системой (1а–2а), подтверждает справедливость найденных выше аналитических решений в пределе дистанций, значительно превышающих дисперсионную $2\tau_p^2/|k_2|$ и дифракционную $(n\omega/c)\,R_0^2$.

Наибольший интерес представляет ситуация, когда на входе в среду вторая гармоника отсутствует. Этот случай соответствует импульсному режиму генерации второй гармоники, сопровождаемой формированием двухкомпонентной «световой пули». Анализ показывает, что в установившемся режиме данное численное решение находится в хорошем согласии с найденным выше аналитическим решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода усредненного Лагранжиана получено аналитическое решение в виде двухкомпонентной оптической пули, распространяющейся в квадратичнонелинейной среде. Компьютерное моделирование подтвердило устойчивое распространение «дышащего» солитона на расстояние, существенно превышающее дифракционную и дисперсионную длины. Проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий возможность формирования двухкомпонентной пули в процессе генерации второй оптической гармоники.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01157).

[1] *McLeod R., Wagner K., Blair S.* Phys. Rev. A. 1995. **52**. P. 3254.

[2] *McDonald G.D., Kuhn C.C.N., Hardman K.S., Bennetts S., Everitt P.J., Altin P.A., Debs J.E., Close J.D., Robins N.P.* Phys. Rev. Lett. 2014. **113**. P. 013002.

[3] *Bergé L.* Physics Reports. 1998. **303**. P. 259.

[4] *Liu X., Qian L.J., Wise F.W.* Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 4631.

[5] *Liu X., Beckwitt K., Wise F.* Phys. Rev. E. 2000. **62**. P. 1328.

[6] *Malomed B.A., Drummond P., He H., Berntson A., Anderson D., Lisak M.* Phys. Rev. E. 1997. **56**. P. 4725.

[7] *Skryabin D.V., Firth W.J.* Phys. Rev. Lett. 1998. **81**. P. 3379.

[8] *Sazonov S.V., Mamaikin M.S., Zakharova I.G., Komissarova M.V.* Physics of Wave Phenomena. 2017. **25**. P. 83.

[9] *Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A.* WIT transactions on modelling and simulation. 2015. **59**. P. 85.

[10] *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.

[11] *Sazonov S.V.* Physics of Wave Phenomena. 2016. **24**. P. 31.

[12] *Sazonov S.V.* J. of the Physical Society of Japan. 2016. **85**. P. 124404.

Propagation of 3d optical buillets in quadratically nonlinear media

I.G. Zakharova[a], A.A. Kalinovich[b], M.V. Komissarova[c], S.V. Sazonov[d]

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

E-mail: [a]zaharova@physics.msu.ru, [b]kalinovich@gmail.com, [c]komissarova@physics.msu.ru, [d]sazonov.sergey@gmail.com

Three-dimensional light beams-pulses, known as light bullets, are studied analytically and numerically. Using the method of the averaged Lagrangian obtained analytical solution describing a bullet in nonlinear parametric interaction. The obtained conditions for sustainable spread of bullets, which is a ratio between diffraction, dispersion and nonlinear lengths. Analytical conclusions are confirmed in the process of computer simulation. The calculations demonstrate that the light bullet extends to a distance far exceeding the dispersion and diffraction lengths in the anisotropic medium. Separately the cases of stable propagation of two-component three-dimensional light bullets, as well as the formation of the beam pulse by generating the second optical harmonic.

PACS: 42.65.Tg
Keywords: quadratic nonlinearity, two-color soliton, optical bullet.
Received 27 November 2017.

Сведения об авторах

1. Захарова Ирина Гургеновна — доцент; тел.: (495) 939-16-62, e–mail: zaharova@physics.msu.ru.
2. Калинович Алексей Андреевич — ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-33-17, e–mail: kalinovich@gmail.com.
3. Комиссарова Мария Валентиновна — ст. преподаватель; тел.: (495) 939-16-62, e–mail: komissarova@physics.msu.ru.
4. Сазонов Сергей Владимирович — вед. науч. сотрудник; e-mail: sazonov.sergey@gmail.com.