

Колебания в однородной цепочке с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной ёмкостью

О. С. Костромина^{1,*}, А. А. Потапов^{2,†}, И. В. Ракуть^{3,‡}, А. Э. Рассадин^{4,§}

¹Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, к. 2

²Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, к. 7

³Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского, Научно-исследовательский радиофизический институт
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12а

⁴Нижегородское математическое общество. Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, к. 6
(Статья поступила 24.07.2017; Подписана в печать 16.10.2017)

В статье рассмотрено интегрированное сегнетоэлектрическое устройство нового типа: однородная цепочка с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной ёмкостью. При большом числе таких конденсаторов в цепочке с помощью теории Уизема описано распространение нелинейных модулированных волн в этой системе.

PACS: 02.30.

УДК: 537.86: 538.956: 517.958.

Ключевые слова: теория Ландау фазовых переходов второго рода, эллиптические функции Якоби, эллиптические интегралы, уравнение Клейна-Гордона-Фока, спектр, бегущие волны.

ВВЕДЕНИЕ

В последнюю четверть века во всём мире ведутся интенсивные исследования в области интегрированных сегнетоэлектриков [1]. Эта активность мотивирована ожиданием развития нового поколения систем обработки и передачи информации на основе объединения сегнетоэлектрических материалов с технологиями современной микроэлектроники. В процессе движения в указанном направлении уже созданы энергонезависимые сегнетоэлектрические запоминающие устройства [2], фазированная антенная решётка на основе сегнетоэлектрических плёнок [3], модулятор оптического излучения [4] и т.д. Особо отметим, что рынок таких систем определяется не уровнем развития литографических методов, а знаниями в области формирования сегнетоэлектрического модуля [1].

Новый импульс эволюции интегрированных сегнетоэлектрических устройств может дать изучение применения в радиотехнических системах различного типа недавно открытых двуслойных сегнетоэлектрических структур, обладающих отрицательной ёмкостью при комнатной температуре [5, 6]. Мы будем называть такие структуры с отрицательной ёмкостью NC-конденсаторами. В рамках реализации этой исследовательской программы в статье рассмотрена однородная цепочка с NC-конденсаторами.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПОЧКИ

Пусть однородная цепочка состоит из $N+1$ одинаковых четырёхполюсников, каждый из которых содержит индуктивность L_0 , NC-конденсатор, включённый последовательно с индуктивностью, и обычный конденсатор с положительной ёмкостью C_0 . Электрическая схема такой цепочки представлена на рис. 1.

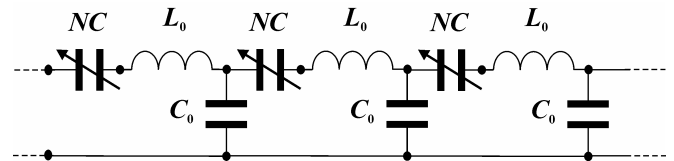


Рис. 1: Электрическая схема однородной цепочки с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной ёмкостью

Выберем в качестве обобщённых координат этой системы заряды q_n на каждом из NC-конденсаторов, тогда в силу известной электромеханической аналогии [7, 8] функция Лагранжа нашей системы равна:

$$\Lambda_N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{L_0 \cdot \dot{q}_n^2}{2} - W(q_n) - \frac{(q_n - q_{n-1})^2}{2 \cdot C_0} \right], \quad (1)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

Из термодинамической теории сегнетоэлектричества для монодоменного образца, развитой В.Л. Гинзбургом в рамках теории Ландау фазовых переходов второго рода, в работах [5, 6] выводится следующее выражение для зависимости энергии NC-конденсатора от заряда

*E-mail: os.kostromina@yandex.ru

†E-mail: potapov@cplire.ru

‡E-mail: rakut@nirfi.unn.ru

§E-mail: brat_ras@list.ru

q на его обкладках:

$$W(q) = -\frac{\alpha_0 \cdot q^2}{2} + \frac{\beta_0 \cdot q^4}{4}. \quad (2)$$

Параметры α_0 и β_0 , входящие в формулу (2), считаются положительными и зависят как от свойств материалов, образующих сегнетоэлектрическую пару и обеспечивающих термодинамическую устойчивость эффекта отрицательной ёмкости, так и от геометрии НС–конденсатора [5, 6]. Например, для плоского НС–конденсатора площадью $S = (30 \text{ мкм})^2$, заполненного двумя слоями сегнетоэлектриков — цирконата титаната свинца $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.2}\text{Ti}_{0.8})\text{O}_3$ толщиной 28 нм и титаната стронция SrTiO_3 толщиной 48 нм, полученного в экспериментах, описанных в статье [5], эти параметры равны: $\alpha_0 \sim 10^{10} \text{ В/Кл}$ и $\beta_0 \sim 0.5 \times 10^{29} \text{ В Кл}^{-3}$.

По формулам (1) и (2) получим следующие уравнения Лагранжа для рассматриваемой структуры:

$$L_0 \cdot \ddot{q}_n = \alpha_0 \cdot q_n - \beta_0 \cdot q_n^3 + \frac{q_{n-1} - 2 \cdot q_n + q_{n+1}}{C_0}. \quad (3)$$

Эту систему можно успешно использовать для описания процессов в цепочке, когда число элементарных четырёхполюсников в ней невелико: $N \sim 1$. Если же $N \gg 1$, то уравнения движения (3) можно решать только численно на супер–ЭВМ. Однако благодаря тому, что полученные экспериментально НС–конденсаторы имеют характерный размер $\sim 100 \text{ нм}$ [5, 6], при большом числе звеньев цепочки процессы, происходящие в ней, с достаточной степенью точности можно описать в непрерывном пределе, введя электрический заряд $Q(x, t)$ на НС–конденсаторе этой структуры в точке x в момент времени t .

Пусть δ — линейный размер элементарного четырёхполюсника, тогда, обозначив $Q(n\delta, t) = q_n(t)$, с помощью стандартной процедуры [7] получим, что система (3) обыкновенных дифференциальных уравнений из $N+1$ -го уравнения сведётся к одному уравнению в частных производных:

$$L \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \alpha \cdot Q + \beta \cdot Q^3 = 0, \quad (4)$$

где $L = L_0/\delta$ и $C = C_0/\delta$ — погонные индуктивность и ёмкость цепочки соответственно, а параметры $\alpha = \alpha_0/\delta$ и $\beta = \beta_0/\delta$ задают погонный термодинамический потенциал НС–конденсаторов вдоль цепочки.

Введём для уравнения (4) новые переменные $\xi = (\alpha C)^{1/2} x$, $\tau = (\alpha/L)^{1/2} t$ и $u(\xi, \tau) = (\beta/\alpha)^{1/2} Q(x, t)$. В этих переменных оно не содержит ни одной размерной величины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u + u^3 = 0. \quad (5)$$

Легко видеть, что уравнение (5) следует из принципа наименьшего действия с плотностью функции Лагранжа:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}. \quad (6)$$

Формулы (3), (5) и (6) будут исходными для дальнейшего анализа.

2. ПОВЕДЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПОЧКИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Система уравнений (3) крайне сложна для исследования из-за её нелинейности. По сути единственным примером точно решаемой системы такого рода является цепочка Тоды [9], поэтому в данной статье мы ограничимся рассмотрением следствий линеаризации системы (3) вблизи её состояний равновесия.

Рассмотрим сначала поведение нашей цепочки вблизи состояний равновесия $q_n^0 = (\alpha_0/\beta_0)^{1/2}$, соответствующих минимуму энергии (2) НС–конденсатора. Подставляя в уравнения (3) $q_n = q_n^0 + \xi_n$, где ξ_n — малые возмущения равновесного заряда, и отбрасывая члены степени выше первой, получим:

$$L_0 \cdot \ddot{\xi}_n = \frac{\xi_{n+1} - 2 \cdot \xi_n + \xi_{n-1}}{C_0} - 2 \cdot \alpha_0 \cdot \xi_n. \quad (7)$$

Уравнения (7) описывают динамику однородной цепочки той же структуры, что и цепочка на рис. 1, в которой, однако, НС–конденсатор заменён обычным конденсатором с положительной ёмкостью $1/(2\alpha_0)$. Таким образом, согласно [8], если в начальный момент времени все НС–конденсаторы имеют заряд, близкий к равновесному значению $q_n^0 = (\alpha_0/\beta_0)^{1/2}$, то при достаточно большом числе звеньев наша цепочка, также как и цепочка с обычными конденсаторами, может работать как полосно-пропускающий фильтр. Но, в отличие от обычной цепочки [8], это верно только при достаточно малой амплитуде внешнего гармонического напряжения. Оценить эту последнюю можно, воспользовавшись экспериментальными данными из статьи [5], согласно которым характерное значение равновесного электрического заряда на НС–конденсаторе $(\alpha_0/\beta_0)^{1/2} \sim 0.5 \text{ нКл}$.

Поведение исследуемой цепочки вблизи состояний равновесия $q_n^0 = 0$ проще всего понять, предположив наличие большого числа звеньев в ней: $N \gg 1$. В этом случае в уравнении (6) можно отбросить кубический член, и оно сведётся к линейному уравнению Клейна–Гордона–Фока с мнимой массой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u = 0. \quad (8)$$

Разыскивая решения уравнения (8) в виде плоских волн $u \sim \exp(i\kappa\xi - i\Omega\tau)$, получим для них следующий закон дисперсии:

$$\Omega = \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что при $\bar{\kappa} < 1$ частота Ω является чисто мнимой величиной, и, соответственно, в модели (8) имеется экспоненциальная неустойчивость по времени. В действительности рост амплитуды

$u(\xi, \tau)$ во времени ограничивается кубическим членом в исходном уравнении (5).

3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Перейдём теперь к изучению нелинейных эффектов в исследуемой модели.

Рассмотрим ситуацию, когда цепочка безгранична в обе стороны, и будем искать решения нелинейного волнового уравнения (5) в виде бегущих волн: $u(\xi, \tau) = U(\theta)$, где $\theta = \kappa\xi - \Omega\tau$. В этом случае оно сведётся к уравнению Дуффинга с гомоклинической восьмёркой на фазовой плоскости:

$$(\Omega^2 - \kappa^2) \cdot \frac{d^2U}{d\theta^2} - U + U^3 = 0. \tag{10}$$

Это уравнение можно интерпретировать как закон изменения координаты U материальной точки массой $\Omega^2 - \kappa^2$, движущейся в потенциале $V(U) = -U^2/2 + U^4/4$.

Хорошо известно, что уравнение (10) имеет точное решение следующего вида [10]:

$$U(\theta) = \sqrt{2} \cdot ch^{-1} \left(\frac{\theta}{\sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}} \right). \tag{11}$$

Оно соответствует уединённой волне заряда, бегущей вдоль цепочки.

Кроме решения (11) уравнение (10) имеет периодические решения, выражающиеся через эллиптические функции Якоби [10]:

$$U(\theta) = A \cdot dn \left[\frac{A \cdot \theta}{\sqrt{2 \cdot (\Omega^2 - \kappa^2)}}, k_1 \right] \tag{12}$$

и

где

$$U(\theta) = A \cdot cn \left[\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\Omega^2 - \kappa^2}} \cdot \theta, k_2 \right], \tag{13}$$

$$\begin{aligned} A(h) &= (1 + (1 + 4h)^{1/2})^{1/2}, \\ k_1(h) &= 2^{1/2}(1 + 4h)^{1/4}/A(h), \\ k_2(h) &= 1/k_1(h), \end{aligned}$$

а параметр h имеет смысл безразмерной энергии, причём решение (12) соответствует случаю $-1/4 < h < 0$, решение (13) — случаю $h > 0$, а решение (11) — случаю $h = 0$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МОДУЛЯЦИИ УИЗЕМА

Точные решения (12) и (13) уравнения (5) позволяют в рамках теории модуляции Уизема [9] изучить распространение нелинейных модулированных волн в нашей цепочке.

Вычислим на решении (12) или (13) плотность функции Лагранжа (6) и нормируем период по θ на 2π , тогда усреднённый лагранжиан Уизема равен:

$$\bar{\Lambda}(\omega, k, h) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \Lambda \cdot d\theta = \sqrt{\Omega^2 - \kappa^2} \cdot I(h) - h, \tag{14}$$

где $I(h) = \int (2[h - V(U)])^{1/2} dU / \pi$ — переменная действия для частицы единичной массы в потенциале $V(U)$ (интегрирование ведётся по отрезку $[U_1, U_2]$, $U_{1,2}$ — корни уравнения $V(U) = h$). Она выражается через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$I(h) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{(2 - k_1^2(h)) \cdot E(k_1(h)) - 2 \cdot (1 - k_1^2(h)) \cdot K(k_1(h))}{(2 - k_1^2(h))^{3/2}}, & -\frac{1}{4} \leq h < 0, \\ &\frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{(2 \cdot k_2^2(h) - 1) \cdot E(k_2(h)) + (1 - k_2^2(h)) \cdot K(k_2(h))}{(2 \cdot k_2^2(h) - 1)^{3/2}}, & h > 0. \end{aligned} \right\}. \tag{15}$$

Первое из уравнений системы уравнений модуляции в силу известной [10] формулы:

$$T(h) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{dI(h)}{dh} \tag{16}$$

для периода колебаний частицы единичной массы в потенциале $V(U)$ даёт нам как раз условие нормировки

периода по θ на 2π :

$$\frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial h} = \sqrt{\Omega^2 - \kappa^2} \cdot \frac{T(h)}{2 \cdot \pi} - 1 = 0. \tag{17}$$

Из выражения (15) по формуле (16) находим:

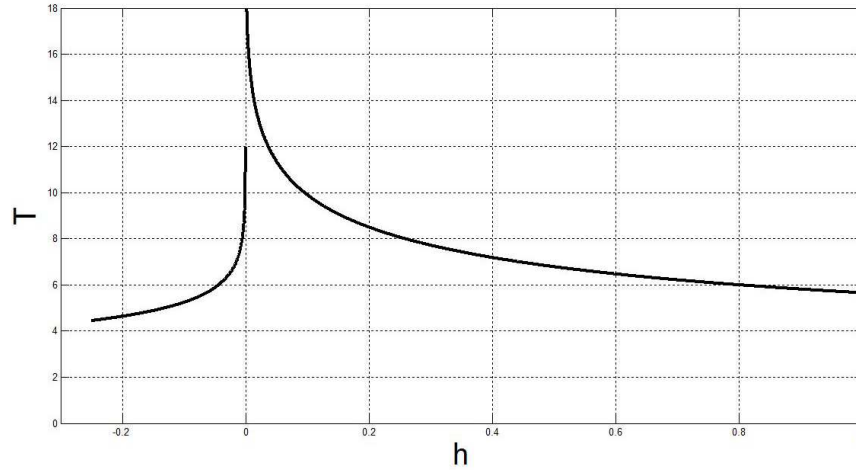


Рис. 2: Зависимость периода колебаний в уравнении Дуффинга с гомоклинической восьмёркой от энергии

$$T(h) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{2}}{A(h)} \cdot K(k_1(h)), & -\frac{1}{4} \leq h < 0 \\ \frac{4}{\sqrt{A^2(h)-1}} \cdot K(k_2(h)), & h > 0 \end{array} \right\}. \quad (18)$$

График зависимости периода колебаний (18) от безразмерной энергии h представлен на рис. 2.

Далее, второе уравнение системы уравнений модуляции даёт нам:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \Omega} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Omega \cdot I(h)}{\sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\kappa \cdot I(h)}{\sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}} \right) = 0. \quad (19)$$

Уравнение (17) будет тождественно удовлетворено, если мы положим:

$$\Omega = \omega(h) \cdot ch\phi(h) \quad \kappa = \omega(h) \cdot sh\phi(h), \quad (20)$$

где $\omega(h) = 2\pi/T(h)$ — частота колебаний привлекаемой нами к обсуждению гипотетической частицы, а $\phi(h)$ — неизвестная функция энергии $h(\xi, \tau)$, которую, вполне аналогично работе [11], нужно определить из уравнений движения.

Далее, подстановкой (20) уравнение (19) сводится к уравнению:

$$\frac{\partial(I \cdot ch\phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial(I \cdot sh\phi)}{\partial \xi} = 0, \quad (21)$$

а из условия совместности $\partial\kappa/\partial\tau + \partial\Omega/\partial\xi = 0$ получается ещё одно уравнение:

$$\frac{\partial(\omega \cdot sh\phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\omega \cdot ch\phi)}{\partial \xi} = 0. \quad (22)$$

Для того, чтобы уравнения (21) и (22) описывали для функции $h(\xi, \tau)$ один и тот же волновой процесс:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + v(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0, \quad h(\xi_0) = h_0(\xi), \quad (23)$$

нужно, чтобы коэффициенты в уравнении переноса (23), вычисленные из обоих уравнений, совпадали, т.е.:

$$v(h) = \frac{(I \cdot sh\phi)'}{(I \cdot ch\phi)'} = \frac{(\omega \cdot ch\phi)'}{(\omega \cdot sh\phi)'}, \quad (24)$$

где штрих обозначает производную по h .

Из соотношения (24) также, как и в статье [11], определим неизвестную функцию $\phi(h)$:

$$\phi'^2 = \frac{I' \cdot \omega'}{I \cdot \omega}. \quad (25)$$

С помощью формулы (16) решение уравнения (25) можно представить в следующем виде:

$$\phi(h) = \pm \int \sqrt{-\frac{I''(h)}{I(h)}} \cdot dh. \quad (26)$$

По рис. 2 и формуле (16) видно, что решение (26) применимо только для случая $h > 0$, ибо только в этом случае $I''(h) < 0$. Этот вывод можно подтвердить и прямым вычислением с помощью выражений (18).

Таким образом, в области $h > 0$ распространение нелинейных модулированных волн в исследуемой нами однородной цепочке с NC-конденсаторами полностью описано, а именно, для $h_0(\xi) > 0$ решение задачи Коши (23) задаётся неявным образом [11, 12]:

$$h(\xi, \tau) = h_0 [\xi - v(h(\xi, \tau)) \cdot \tau], \quad (27)$$

где

$$v(h) = \frac{I'(h) \cdot th\phi(h) + I(h) \cdot \phi'(h)}{I'(h) + I(h) \cdot \phi'(h) \cdot th\phi(h)}. \quad (28)$$

Используя решение уравнения (27), по формулам (20), мы определим локальную частоту $\Omega(\xi, \tau)$ и волновой вектор $\kappa(\xi, \tau)$, а затем вычислим по ним локальную фазу волны согласно:

$$\theta(\xi, \tau) = \int_{(\xi_0, \tau_0)}^{(\xi, \tau)} [-\Omega(\xi, \tau) \cdot d\tau + \kappa(\xi, \tau) \cdot d\xi]. \quad (29)$$

Подставляя энергию $h(\xi, \tau)$ и локальную фазу (29) в формулу (13), мы и определим в нашей цепочке модулированную волну с переменной амплитудой

$$A(\xi, \tau) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot h(\xi, \tau)}}. \quad (30)$$

В рамках нашего приближения с помощью результатов статьи [12] можно выяснить и временную эволюцию пространственного спектра энергии $h(\xi, \tau)$ по формуле [12]:

$$S_h(k, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \exp(-i \cdot k \cdot \xi) \cdot \int_0^{h_0(\xi)} \exp[-i \cdot k \cdot \tau \cdot v(h)] \cdot dh, \quad (31)$$

а также временную эволюцию пространственного спектра произвольной функции энергии [12], например, амплитуды волны (30):

$$S_A(k, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \exp(-i \cdot k \cdot \xi) \times \int_0^{A[h_0(\xi)]} \exp[-i \cdot k \cdot \tau \cdot v(h)] \cdot \frac{dA(h)}{dh} \cdot dh. \quad (32)$$

Разумеется, формулы (31) и (32) справедливы до момента наступления градиентной катастрофы в решении (27), который определяется видом начального распределения энергии $h_0(\xi)$ [12].

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим распространение волн с большими энергиями: $h_0(\xi) \gg 1$.

В этом случае из формулы (15) получим:

$$I(h) \approx \frac{\sqrt{2} \cdot \Gamma^2(1/4)}{3 \cdot \pi^{3/2}} \cdot h^{\frac{3}{4}}, \quad (33)$$

где $\Gamma(1/4)$ — значение гамма-функции Эйлера.

Подставляя выражение (33) в формулу (26), найдём:

$$\phi(h) \approx \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ln h + \text{Const}. \quad (34)$$

Комбинируя выражения (33) и (34) в формуле (28), вычислим, что $\nu(h) \pm 1$, и, соответственно, решение задачи Коши (23) есть: $h(\xi, \tau) \approx h_0(\xi \pm \tau)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важным условием успешного вхождения российских электронных предприятий на рынок интегрированных сегнетоэлектрических устройств является наличие у них систем автоматизированного проектирования приборов на базе интегрированных сегнетоэлектриков, полностью открытых для отечественного пользователя.

Результаты, изложенные в данной статье, могут служить теоретическим обоснованием ряда ключевых фрагментов таких систем. Кроме того, проведённое нами развитие теории модуляции Уизема обладает известной степенью общности и может быть применено к описанию модулированных нелинейных волн в других нелинейных средах, например, в однородной цепочке той же структуры, что и цепочка на рис. 1, в которой вместо NC-конденсаторов включены конденсаторы, заполненные однослойным сегнетоэлектриком с рабочей температурой выше температуры Кюри. В области энергий $-j < h < 0$ вблизи дна потенциальной ямы $V(U)$ уравнения (10), то есть там, где теория Уизема оказалась неприменимой, исходное уравнение (5) модели однородной цепочки в непрерывном пределе может быть исследовано другими методами теории нелинейных волн.

- [1] Воротилов К. А., Мухортов В. М., Сигов А. С. Интегрированные сегнетоэлектрические устройства. М.: Энергоатомиздат, 2011.
- [2] Воротилов К. А., Сигов А. С. Нано- и микросистемная техника. 2008. № 10. С. 30.
- [3] Van Keuls F. W., Romanofofsky R. R., Miranda F. A., Muelle C. H., Treece R. E., Rivkin T. V. Appl. Phys. Lett. 1997. **71**, N 21. P. 3075.
- [4] Tang P., Meier A. L., Towner D. J., Wessels B. W. Electronics Letters. 2005. **41**, N 23. P. 1296.
- [5] Khan A. I., Bhowmik D., Yu P., Kim S. J., Pan X., Ra-

mesh R., Salahuddin S. Appl. Phys. Lett. 2011. **99**, N 11. P. 113501.

- [6] Appleby D. J. R., Ponon N. K., Kwa K. S. K., Zou B., Petrov P. K., Wang T., Alford N. M., O'Neill A. Nano Lett. 2014. **14**, N 7. P. 3864.
- [7] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
- [8] Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988.
- [9] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

- [10] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: РХД, 2005.
[11] Гапонов А. В., Фрейдман Г. И. ЖЭТФ. 1959. **36**. С. 957.
[12] Пелиновский Е. Н. Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1976. **19**. С. 373.

Oscillations in homogeneous circuit with ferroelectric capacitors with a negative capacitance

O. S. Kostromina^{1,a}, A. A. Potapov^{2,b}, I. V. Rakut^{3,c}, A. E. Rassadin^{4,d}

¹Department of differential equations, mathematical and numerical analyses, Institute of computer science, mathematics and mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Nizhny Novgorod 603950, Russia

²Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences. Moscow 125009, Russia

³Scientific and Research Institute of Radiophysics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. Nizhny Novgorod 603950, Russia

⁴Nizhny Novgorod Mathematical Society. Nizhny Novgorod 603950, Russia

E-mail: ^aos.kostromina@yandex.ru, ^bpotapov@cplire.ru, ^crakut@nirfi.unn.ru, ^dbrat_ras@list.ru

In the article integrated ferroelectric device of new type namely homogeneous circuit with ferroelectric capacitors with a negative capacitance has been considered. Under the great number of such capacitors in the circuit in the framework of the Witham theory propagation of nonlinear modulated waves in this system has been described.

PACS: 02.30.

Keywords: Landau–Ginzburg–Devonshire theory, Jacobi functions, elliptic integrals, the Klein–Gordon–Fock equation, spectra, travelling waves.

Received 24 July 2017.

Сведения об авторах

1. Костромина Ольга Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (831) 462-33-63, e-mail: os.kostromina@yandex.ru.
 2. Потапов Александр Алексеевич — докт. физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник; тел.: (495) 629-34-96, e-mail: potapov@cplire.ru.
 3. Ракуть Игорь Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (831) 416-95-19, e-mail: rakut@nirfi.unn.ru.
 4. Рассадин Александр Эдуардович — член Правления; тел.: (831) 245-31-55, e-mail: brat_ras@list.ru.
-