

## О применимости приближения заданного профиля в динамике супергауссовых импульсов

А. Н. Бугай\* В. А. Халяпин†

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований. Россия, 141980, Московская обл. г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6

<sup>2</sup>Калининградский государственный технический университет. Россия, 236000, Калининград, Советский проспект, д. 1

(Статья поступила 24.07.2017; Подписана в печать 16.10.2017)

Проведено аналитическое и численное исследование динамики параметров супергауссового импульса, спектр которого может лежать как в области нормальной, так и аномальной дисперсии групповой скорости. Найдено аналитическое решение для параметра, характеризующего эволюцию степени супергауссового импульса.

PACS: 42.65.-k, 42.81.-i

УДК: 535.3

Ключевые слова: нелинейная оптика, супергауссовый импульс

### ВВЕДЕНИЕ

В связи с появлением методов генерации супергауссовых импульсов [1] возникает интерес к их теоретическому исследованию. В большинстве работ, посвященных динамике таких импульсов (например, [2–4]), анализ проводился на основе численных методов, что связано с использованием специальных функций при их математическом описании. Лишь в линейном приближении авторам работы [5] удалось получить точное аналитическое решение, описывающее дисперсионное расплывание импульса при заданном значении параметра супергауссовости. Даже для описания переходных режимов гауссовых импульсов учет нелинейности приводит к аналитическим затруднениям. Так в работе [6] с помощью метода моментов получена система уравнений, описывающая динамику параметров гауссовых импульсов обобщенного нелинейного уравнения Шредингера и приведены результаты численного эксперимента. Настоящая работа посвящена как аналитическому описанию динамики параметров супергауссового импульса, так и исследованию вопроса о применимости подхода заданного профиля. В отличие от других исследований, нами рассмотрен случай, когда параметр супергауссовости (прямоугольности) не остается постоянным, а эволюционирует наряду с другими характеристиками сигнала [7, 8].

### 1. МЕТОД МОМЕНТОВ И ДИНАМИКА СУПЕРГАУССОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

Динамика квазимонохроматических импульсов в изотропном диэлектрике, распространяющихся в области его прозрачности, описывается обобщенным

нелинейным уравнением Шредингера [6]

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} - i\gamma |\psi|^2 \psi - \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2 \psi) + i\gamma T_R \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\tau = t - z/v_g$  — время в сопутствующей системе координат,  $v_g$  — групповая скорость импульса,  $z$  — ось, вдоль которой распространяется сигнал,  $\beta_2$  — коэффициент групповой дисперсии,  $\beta_3$  — положительный параметр, определяющий дисперсию третьего порядка,  $\gamma < 0$  — коэффициент кубической нелинейности,  $\omega$  — центральная частота импульса,  $T_R$  — коэффициент, характеризующий вклад вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР). Коэффициент  $\beta_2$  положителен, если центральная частота импульса лежит в области аномальной дисперсии групповой скорости и отрицателен в противоположном случае [9]. Медленно меняющаяся огибающая  $\psi$  связана с электрическим полем импульса  $\mathcal{E}$  соотношением

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \psi \exp[i(\omega t - kz)] + c.c. \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число.

Анализ динамики параметров импульса проводился на основе метода моментов [6]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\tau, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - T)^2 |\psi|^2 d\tau, \quad (4)$$

$$C = \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - T) \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (5)$$

\*E-mail: bugay\_aleksandr@mail.ru

†E-mail: slavaxi@gmail.com

$$T = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \tau |\psi|^2 d\tau, \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (7)$$

$$n = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tau - T)^2}{|\psi|^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau - \frac{1}{2}, \quad (8)$$

где  $E$  — параметр, пропорциональный энергии импульса,  $\sigma$  — величина, пропорциональная длительности сигнала,  $C$  — определяет модуляцию частоты,  $T$  — временное запаздывание,  $\Omega$  — определяет смещение центральной частоты сигнала,  $n$  — степень супергауссового импульса [7, 8].

Огибающую поля представим следующим образом

$$\psi = B \exp \left[ -\frac{1}{2} \left| \frac{\tau - T}{\tau_p} \right|^{2n} + i \left( \varphi - \Omega(\tau - T) - \frac{C}{2} \left| \frac{\tau - T}{\tau_p} \right|^{2n} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь  $A$  — амплитуда сигнала,  $\tau_p$  — его длительность, а  $\varphi$  — добавка к фазе.

Из (3)–(8) с учётом (9) и (1) получаем систему уравнений на параметры импульса

$$\frac{dE}{dz} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz}(\sigma^2) = C(\beta_2 + \beta_3 \Omega), \quad (11)$$

$$\frac{dC}{dz} = 2(\beta_2 + \beta_3 \Omega)(1 + C^2) \frac{n^2 \Gamma(2 - 1/2n)}{\tau_p^2 \Gamma(1/2n)} + \frac{\gamma E n}{2^{1/2n} \tau_p \Gamma(1/2n)} \left( 1 - \frac{\Omega}{\omega} \right), \quad (12)$$

$$\frac{dT}{dz} = \beta_2 \Omega + \frac{\beta_3}{2} \left[ \frac{(1 + C^2) n^2 \Gamma(2 - 1/2n)}{\tau_p^2 \Gamma(1/2n)} + \Omega^2 \right] - \frac{3\gamma E n}{2^{1+1/2n} \omega \tau_p \Gamma(1/2n)}, \quad (13)$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{\gamma E n^3 2^{1/2n} \Gamma(2 - 1/2n)}{\tau_p^3 (\Gamma(1/2n))^2} \left( \frac{C}{\omega} + T_R \right), \quad (14)$$

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{8C(\beta_2 + \beta_3 \Omega) n^3 (n - 1) \Gamma(2 - 1/2n)}{\tau_p^2 \Gamma(1/2n)}, \quad (15)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма функция.

Из (4) и (9) можно получить связь между длительностью сигнала и параметром  $\sigma$

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma(3/2n)}{\Gamma(1/2n)} \tau_p^2. \quad (16)$$

Известно, что вызванный ВКР красный сдвиг ведет к поглощению энергии [10], которая идет на возбуждение молекулярных колебаний. В связи с этим возникает вопрос относительно интерпретации формулы (10). Поскольку

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega, z)|^2 d\omega = \frac{B^2 \tau_p \Gamma(1/2n)}{n} = \text{const}, \quad (17)$$

где  $F(\omega, z)$  — спектральная плотность, то формула (10) выражает тот факт, что за счет ВКР фотоны "краснеют", но их число остается постоянным [11].

Найдем явное аналитическое решение, описывающее эволюцию длительности сигнала в линейном приближении. Можно показать [2, 12], что

$$\frac{d^3 \sigma}{dz^3} = 0, \quad \frac{d^2 C}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T}{dz^2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \left( \frac{d\sigma^2}{dz} \right)_0 z + \left( \frac{d^2 \sigma^2}{dz^2} \right)_0 \frac{z^2}{2}, \quad (18)$$

$$C = C_0 + \left( \frac{dC}{dz} \right)_0 z, \quad (19)$$

$$T = T_0 + \left( \frac{dT}{dz} \right)_0 z, \quad (20)$$

Здесь и далее индекс «0» определяет значение соответствующего параметра на входе в среду ( $z = 0$ ).

Из (4) и (1) находим

$$\frac{d^2(\sigma^2)}{dz^2} = \beta_2 \frac{dC}{dz} + \frac{\beta_3^2}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \right|^2 d\tau - \frac{\beta_3}{E} \frac{d\Gamma}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|^2 d\tau + \frac{i\beta_2\beta_3}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \tau^2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) d\tau. \quad (21)$$

Используя (11), (16), (21) и (18) получаем выражение для длительности сигнала в линейном приближении

$$\left( \frac{\tau_p}{\tau_0} \right)^2 = \frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(3/2n)\Gamma(1/2n_0)} \left[ \Gamma(3/2n_0) + gC_0\Gamma(1/2n_0) \frac{z}{L_d} + n_0^2(1 + C_0^2)\Gamma(2 - 1/2n_0) \frac{z^2}{L_d^2} + \frac{(1 + C_0^2)n_0^2\beta_3^2 z^2}{2\tau_0^6} \left( (2n_0 - 1)\Gamma(2 - 3/2n_0) \left( \frac{3}{8}(1 + C_0^2)(4n_0 - 3) - n_0 + 1 \right) - \frac{(1 + C_0^2)n_0^2\Gamma^2(2 - 1/2n_0)}{2\Gamma(1/2n_0)} \right) \right]. \quad (22)$$

Здесь  $L_d = \tau_0^2/|\beta_2|$  — характерная длина дисперсионного расплывания,  $g = \text{sign}(\beta_2)$  определяет знак дисперсии групповой скорости.

Из (12), (13), (19), (20) находим

$$C = C_0 + 2g(1 + C_0^2) \frac{n_0^2\Gamma(2 - 1/2n_0)}{\Gamma(1/2n_0)} \frac{z}{L_d}, \quad (23)$$

$$T = \frac{\beta_3(1 + C_0^2)n_0^2\Gamma(2 - 1/2n_0)}{2|\beta_2|\Gamma(1/2n_0)} \frac{z}{L_d}. \quad (24)$$

Здесь учтено, что на входе в среду  $T_0 = 0$ .

Решая уравнения (12), (15) в линейном приближении, получаем

$$n = \frac{n_0(1 + C^2)^2}{n_0(1 + C^2)^2 - (n_0 - 1)(1 + C_0^2)^2}, \quad (25)$$

где  $C$  описывается выражением (23). Таким образом зависимость от динамического параметра супергауссо-

вости сохраняется только в уравнении для длительности (22), а динамика самого параметра определяется выражением (25). Из (25) следует, что супергауссовый импульс по мере своего распространения стремиться к гауссовой форме  $n \rightarrow 1$ . Однако известно, что в дальне зоне дисперсии профиль импульса приобретает форму, определяемую спектром входного сигнала. Такой импульс называется "спектрон" [13, 14]. Отсюда следует, что исходный супергауссовый сигнал разбивается на серию импульсов, причем центральный превосходит боковые (что аналогично дифракции на щели). Поскольку исходная пробная функция (9) не допускает таких решений, то выражение (25) следует рассматривать как приближенное.

Учтем теперь влияние нелинейности. Будем искать длительность импульса в виде разложения вида (18). Таким образом, из (11), (12), (18) находим

$$\left( \frac{\tau_p}{\tau_0} \right)^2 = \frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(3/2n)\Gamma(1/2n_0)} \left[ \Gamma(3/2n_0) + gC_0\Gamma(1/2n_0) \frac{z}{L_d} + \left( n_0^2(1 + C_0^2)\Gamma(2 - 1/2n_0) - \frac{g\sqrt{2\pi}n_0E}{2^{1+1/2n_0}E_c} \right) \frac{z^2}{L_d^2} \right]. \quad (26)$$

где  $E_c = \sqrt{2\pi}|\beta_2|/|\gamma|\tau_0$ .

Из (11), (26) находим выражение, характеризующее величину частотной модуляции сигнала

$$C = C_0 + \left( 2g(1 + C_0^2) \frac{n_0^2\Gamma(2 - 1/2n_0)}{\Gamma(1/2n_0)} - \frac{g\sqrt{2\pi}n_0E}{2^{1/2n_0}\Gamma(1/2n_0)E_c} \right) \frac{z}{L_d}. \quad (27)$$

При выводе (26) мы пренебрегли вкладом дисперсии третьего порядка, которую учитывали для линейного приближения (22). Также считалось, что на входе в среду смещение центральной частоты импульса равно нулю  $\Omega_0 = 0$ . Когда импульс включает в себя боль-

шое число световых осцилляций  $\omega\tau_p \gg 1$ , его частота смещается незначительно по сравнению с центральной частотой  $\Omega/\omega \ll 1$ .

Проведем сравнение результатов решения приближенных уравнений (10)–(15) с численным решением

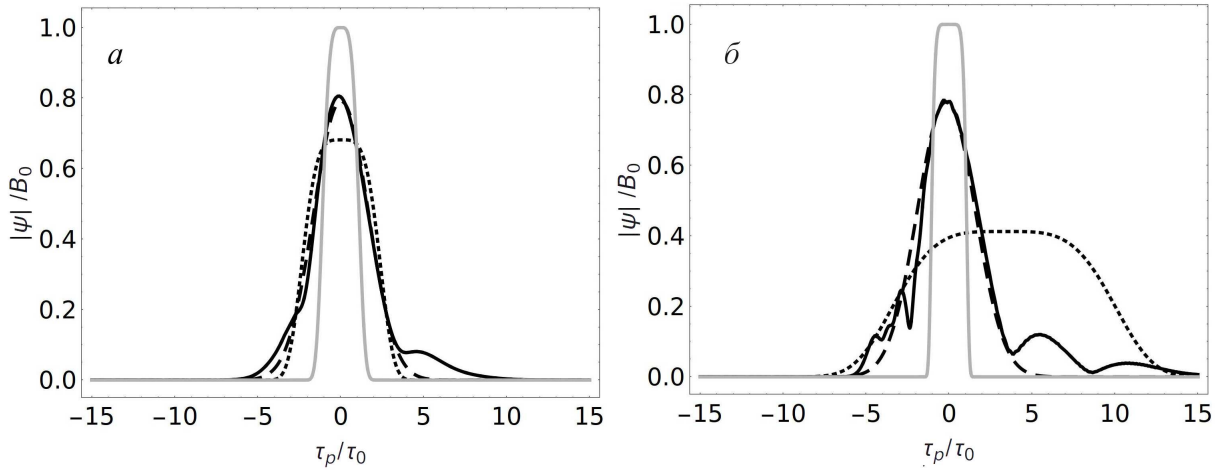


Рис. 1: Динамика профиля супергауссова импульса с  $n = 2$  (а) и  $n = 4$  (б), длительностью 145 фс и длиной волны 1.1 мкм (область нормальной групповой дисперсии) и  $E = 0.2E_c$  при распространении его в волокне на дистанции дисперсионной длины. Сплошная кривая — результат численного решения (1), а пунктирная и штриховая линии — результат решения системы (10)–(15) с постоянным и переменным  $n$ , соответственно. Начальный профиль импульса задан светлой сплошной линией

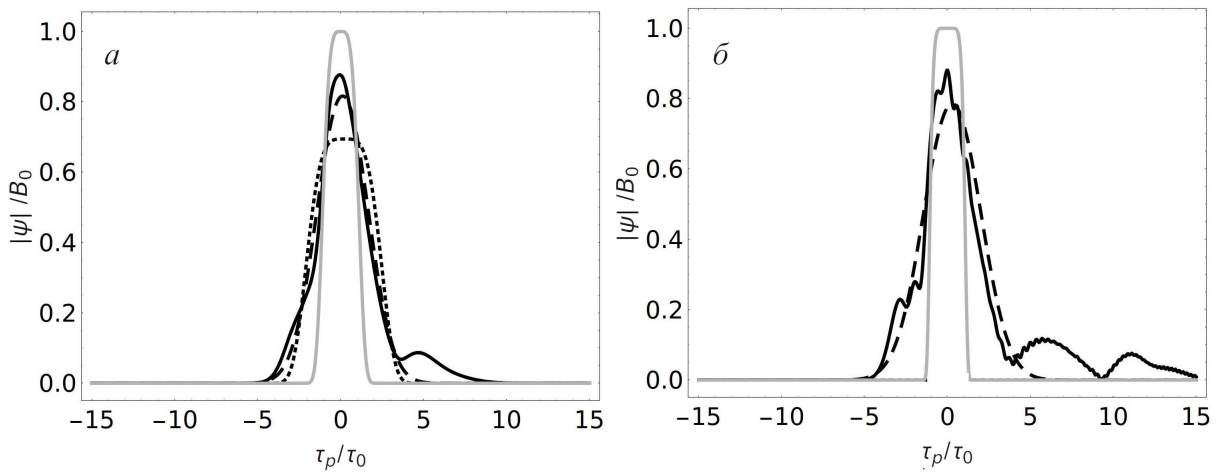


Рис. 2: Динамика профиля супергауссова импульса с  $n = 2$  (а) и  $n = 4$  (б), длительностью 200 фс и длиной волны 1.5 мкм (область аномальной групповой дисперсии) и  $E = 0.2E_c$  при распространении его в волокне на дистанции дисперсионной длины. Сплошная кривая — результат численного решения (1), а пунктирная и штриховая линии — результат решения системы (10)–(15) с постоянным и переменным  $n$ , соответственно. Начальный профиль импульса задан светлой сплошной линией

исходного уравнения (1). Рассмотрим эволюцию ультракоротких импульсов с исходным супергауссовым профилем вида (9) при  $n = 2$  и  $n = 4$ , распространяющихся в типичном оптическом волокне марки SMF-28. Длины волн и длительности импульсов выбирались таким образом, что  $\omega\tau_p \sim 250$ , а их несущие частоты попадали в область нормальной или аномальной групповой дисперсии при заданной величине групповой дисперсии второго порядка. Результаты приведены на рис.1 и 2. В случае аномальной групповой дисперсии решение (10)–(15) при фиксированном  $n = 4$  является расходящимся, поэтому соответствующий профиль не

приведен. Видно, что с ростом параметра супергауссовости качество аппроксимации динамики профиля импульса гораздо лучше в случае динамического  $n$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен подход, позволяющий получать аналитическое описание динамики параметров супергауссовых импульсов. В отличие от большинства работ, посвященных исследованию супергауссовых импульсов, нами учитывался тот факт, что пара-

метр супергауссовости  $n$  тоже эволюционирует. Получено явное аналитическое решение, описывающее длительность импульса и выявлены особенности динамики с помощью численного исследования системы.

Результаты численных расчетов показывают, что

учет динамического изменения функционального вида профиля импульса может расширить круг задач, где возможно применение метода моментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-11-011157).

- 
- |   |  |
|---|--|
| <p>[1] Wang S., Liu B., Hu M., Wang C. J. <i>Lightw. Technol.</i> 2014. <b>32</b>. P. 3827.</p> <p>[2] Agraal G.P. <i>Nonlinear Fiber Optics</i>. N-Y., 2001.</p> <p>[3] Kaur A., Chaurasiya H. <i>IJERT</i>. 2013. <b>2</b>. P. 853.</p> <p>[4] Jana S., Konar S. <i>Opt. Commun.</i> 2008. <b>281</b>. P. 4829.</p> <p>[5] Anderson D., Lisak M. <i>Opt. Lett.</i> 1986. <b>11</b>. P. 569.</p> <p>[6] Santhanam J., Agraal G.P. <i>Opt. Commun.</i> 2003. <b>222</b>. P. 413.</p> <p>[7] Бугай А. Н., Халяпин В. А. <i>Изв. РАН. Сер. физ.</i> 2015. <b>79</b>. С. 1672.</p> | <p>[8] Халяпин В. А. <i>Опт. и спектр.</i> 2015. <b>119</b>. С. 140.</p> <p>[9] Козлов С. А., Сазонов С. В. <i>ЖЭТФ</i>. 1997. <b>111</b>. С. 404.</p> <p>[10] Menyuk C. R. <i>J. Opt. Soc. Am. B</i>. 1993. <b>10</b>. P. 1585.</p> <p>[11] Voronin A., Zhelticov A. <i>Opt. Lett.</i> 2008. <b>33</b>. P. 1723.</p> <p>[12] Anderson D., Lisak M. <i>Phys. Rev. A</i>. 1987. <b>15</b>. P. 184.</p> <p>[13] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. <i>Задачи по статистической радиофизике и оптике</i>. М., 1985.</p> <p>[14] Ахманов С. А., Никитин С. Ю. <i>Физическая оптика</i>. М., 2004.</p> |
|---|--|
- 

## On the applicability of the approximation of a given profile in the dynamics of super-Gaussian pulses

A. N. Bugay<sup>1a</sup>, V. A. Khalyapin<sup>2b</sup>

<sup>1</sup>*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 141980, Russia*

<sup>2</sup>*Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad 236000, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>bugay\_aleksandr@mail.ru, <sup>b</sup>slavasxi@gmail.com*

An analytic and numerical study of the dynamics of parameters of a super-Gaussian pulse, whose spectrum can fit both in the region of normal and anomalous dispersion of the group velocity, is carried out. An analytical solution is found for the parameter characterizing the evolution of the degree of the super-Gaussian momentum.

PACS: 42.65.-k, 42.81.-i

*Keywords:* nonlinear optics, super-Gaussian pulse.

*Received 24 July 2017.*

### Сведения об авторах

- Бугай Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, нач. сектора; тел.: (496) 212-21-47, e-mail: bugay\_aleksandr@mail.ru.
  - Халяпин Вячеслав Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: slavasxi@gmail.com.
-