

Расчет условий дестабилизации горизонтальной поверхности вязкой жидкости в вибрационном поле

Д. Ф. Белоножко,* А. В. Апарнева

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Россия, 150000, Ярославль, ул. Советская, д. 14

(Статья поступила 24.07.2017; Подписана в печать 16.10.2017)

Аналитически рассчитаны условия устойчивости горизонтальной поверхности маловязкой жидкости в вибрационном поле. Найдены и устранены недостатки методики расчета, допущенные предыдущими исследователями.

PACS: 47.35.Pq, 46.40.Ff

УДК: 532.6, 534.1

Ключевые слова: свободная поверхность, вибрационное поле, гидродинамическая неустойчивость, метод усреднения.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ устойчивости поверхности жидкости в вибрационных полях — достаточно широкий раздел теории гидродинамических неустойчивостей. Одним из его наиболее трудоёмких аспектов является корректный учет влияния вязкости на закономерности развития неустойчивости. Настоящая работа посвящена одной ключевой задаче этого направления: аналитическому асимптотическому расчету условий развития неустойчивости плоской свободной поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные гармонические колебания. Речь идёт об условиях возникновения ряби Фарадея на поверхности вертикально осциллирующего жидкого слоя [1–3].

Задача уже рассматривалась в работах разных лет и разных авторов (например, [1–3]), но аналитические выражения для пороговой по отношению к неустойчивости амплитуды колебаний, представленные различными источниками, не согласуются друг с другом (например, [1] и [2]). Наиболее противоречивое впечатление производит рассмотрение вопроса в монографии [2]. С одной стороны логика решения вполне последовательна и обходится без введения, как в работе [2], в основные уравнения искусственных слагаемых, учитывающих диссипацию. С другой стороны, изложение буквально напичкано многочисленными опечатками, нестыковками формул, потерями слагаемых, неверными пределами интегрирования и, наконец, элементарным отсутствием указания на метод построения зон устойчивости. Полностью проследить и воспроизвести порядок решения не помогают даже ссылки на оригинальные работы, в которых обнаруживаются те же изъяны, что и в [2]. Такое положение дел, во-первых, существенно уменьшает ценность результата, полученного авторами [2] при решении данной задачи, во-вторых, не позволяет уверенно привлечь те же рассуждения, например, для обобщения на случай, когда жидкость покрыта плёнкой поверхностно-активного ве-

щества [4], или соотнести с новыми результатами исследования двухслойных систем [5] и т.п. Для приведения ситуации в порядок назрела необходимость выполнить независимое построение корректного, доступного воспроизведению, решения обсуждаемой задачи, которое можно было бы адекватно сопоставить с решением, представленным в [2].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Для возможности сравнения при решении задачи использовались обозначения, которые легко соотнести с соответствующим разделом монографии [2]. Порядок решения задачи тоже осуществлялся по плану, реализованному в [2] с попутным исправлением недостатков оригинальной работы.

Задача решалась в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Ox , направленной горизонтально, вдоль направления распространения волны, и осью Oz , направленной вертикально вверх, против направления действия поля силы тяжести \mathbf{g} . Для простоты течение жидкости считалось не зависящим от горизонтальной координаты y , а сама жидкость полагалась бесконечно глубокой. Задача состояла в исследовании устойчивости рассматриваемой системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi(t, x)$ свободной поверхности.

В вертикально осциллирующей вместе невозмущенным уровнем поверхности системе отсчета $Oxyz$ движение жидкости удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g} - 4a\omega^2 \mathbf{e}_z \cos(2\omega t), \quad (1)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{U} = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z$ — поле скоростей в жидкости, p — давление, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_z — единичные орты осей Ox , Oz , ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости, t — время. Слагаемое

*E-mail: belonozhko@mail

$-4a\omega^2 \cos(2\omega t)$ описывает отнесенную к единице массы силу инерции, возникающую благодаря неинерциальности системы отсчета. $\omega = \pi f$ — половина круговой частоты осцилляций; a — их амплитуда; f — циклическая частота.

На поверхности $z = \xi(t, x)$ выполняются граничные условия:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} = v_z; \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad (4)$$

$$p - 2\rho\nu (\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U})) = \gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}). \quad (5)$$

Здесь \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к поверхности, γ — коэффициент поверхностного натяжения. На глубине использовалось условие полного затухания движения.

Задача линеаризовалась по малому параметру, пропорциональному отношению амплитуды возмущения к его длине. Величины первого порядка малости, для которых использовались те же обозначения, удовлетворяют линеаризованной задаче:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (6)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0. \quad (7)$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

$$-\rho \xi \left(1 - \frac{4a\omega^2}{g} \cos(2\omega t) \right) g + p - 2\rho\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\gamma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right); \quad (10)$$

$$\mathbf{z} \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{U} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Решение искалось в виде: $\xi = \zeta(t) \exp(ikx)$, $p = P(t, z) \exp(ikx)$, $v_x = h(t, z) \exp(ikx)$, $v_z = w(t, z) \exp(ikx)$, где k — волновое число поверхностного возмущения. После обезразмеривания, в котором $\rho = g = \gamma = 1$, и исключения из уравнений и граничных условий горизонтальной компоненты скорости выражения (6)–(11) сводятся к новой системе соотношений [2]:

$$z < 0 : \quad \omega \frac{\partial w}{\partial t} = -kp + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k^2 w \right); \quad (12)$$

$$z = 0 : \quad \omega \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0; \quad (14)$$

$$-4a\omega^2 \zeta \cos(2t) + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = -\zeta(1 + k^2) + p; \quad (15)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad w \rightarrow 0. \quad (16)$$

С учетом граничных условий (13)–(16) уравнение (12) при $z = 0$ преобразуется к новому виду (точкой обозначено дифференцирование по времени):

$$\omega^2 \ddot{\zeta} + 2k^2 \nu \omega \dot{\zeta} + \zeta(k^3 + k - 4ka\omega^2 \cos(2t)) = -2\nu k \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (17)$$

Если не обращать внимания на некоторые опечатки, допущенные в [2], выражения (12)–(17) можно считать совпадающими с построенными авторами [2].

2. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Следуя [2], вводилась вспомогательная функция $\psi \equiv \psi(t, z) = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k^2 w = \Delta w$ с граничным условием при $z = 0$: $\psi = -2\omega k^2 \dot{\zeta}$. После замены $\Psi = \psi / \exp(-\nu k^2 t / \omega)$ соотношение (12) преобразуется в уравнение типа уравнения теплопроводности для $\psi \equiv \psi(t, z)$ [2]:

$$\omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (18)$$

$$\Psi(0, t) = -2\omega k^2 \dot{\zeta} \exp(\nu k^2 t / \omega); \quad (19)$$

$$\Psi(z, 0) = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (18) с начальным и граничным условиями (19)–(20), согласно [6, 7], имеет вид

$$\Psi(z, t) = -\frac{\omega^{3/2} k^2}{\sqrt{\pi \nu}} \int_{t_0}^t \frac{z}{[(t - \tau)]^{3/2}} \times \exp \left(-\frac{\omega z^2}{4\nu(t - \tau)} + \frac{\nu k^2}{\omega} (t - \tau) \right) \dot{\zeta}(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Принципиально, что интегрирование выполняется по конечному промежутку времени. В [2] верхний предел соответствующего интеграла безосновательно по-

ложен равным бесконечности. Далее выполнялся переход к функции ψ :

$$\psi(z, t) = -\frac{\omega^{3/2} k^2}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{z}{\tau^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{\omega z^2}{4\nu\tau}\right) \exp\left(-\frac{\nu k^2 \tau}{\omega}\right) \dot{\zeta}(t-\tau) d\tau; \quad (22)$$

которая подставлялась в уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k^2 w = \psi$. Несложно найти решение этого уравнения, обращаясь в нуль на глубине $z \rightarrow -\infty$:

$$w = C(t) e^{kz} + \frac{e^{-kz}}{2k} \int_{-\infty}^z \psi(y) e^{ky} dy - \frac{e^{kz}}{2k} \int_{-\infty}^z \psi(y) e^{-ky} dy. \quad (23)$$

Функция времени $C(t)$ определялась из граничного условия (13):

$$C(t) = \omega \dot{\zeta} + 2k^2 \nu \int_0^t \dot{\zeta}(t-\tau) d\tau \quad (24)$$

Производная $\frac{\partial w}{\partial z}$ от выражения (23) при $z = 0$ с учетом (24) равна

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = \omega \dot{\zeta} k + 2k^3 \nu \int_0^t \dot{\zeta}(t-\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \psi(\eta, t) \exp(k\eta) d\eta - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \psi(\eta, t) \exp(-k\eta) d\eta. \quad (25)$$

С учётом выражения (22) для вспомогательной функции $\psi(z, t)$ вычислялись интегралы в правой части (25) [6], и строилось выражение для величины, входящей в правую часть (17):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = \omega \dot{\zeta} k - 2k^2 \sqrt{\nu\omega} \times \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\zeta(t-\tau) \exp\left(-\frac{\nu k^2 \tau}{\omega}\right) \right) (\pi\tau)^{-1/2} d\tau + 2\nu k^3 \int_0^t \dot{\zeta}(t-\tau) \operatorname{erfc}\left(k\sqrt{\frac{\nu\tau}{\omega}}\right) d\tau. \quad (26)$$

Здесь erfc — функция, известная как дополнительная функция ошибок.

После введения вспомогательных обозначений:

$$\delta = \nu k^2 / \omega, \quad \Omega^2 = (k^3 + k) / \omega^2, \quad q = 2ak \quad (27)$$

соотношение (17) с учетом (26) и (27) преобразуется в замкнутое уравнение относительно амплитуды вол-

нового возмущения:

$$\ddot{\zeta} + 4\delta \dot{\zeta} + \zeta(t)(\Omega^2 - 2q \cos 2t) = 4\delta^{3/2} \int_0^t \frac{d}{dt} (\zeta(t-\tau) e^{-\delta\tau}) (\pi\tau)^{-1/2} d\tau - 4\delta^2 \int_0^t \frac{d}{dt} (\zeta(t-\tau)) \operatorname{erfc}\left(k\sqrt{\frac{\nu\tau}{\omega}}\right) d\tau. \quad (28)$$

Существенным отличием уравнения (28) от выписанного в работе [2] является конечный верхний предел интегрирования первого слагаемого в правой части (равный t , а не бесконечности, как в [2]) и наличие второго интегрального слагаемого.

3. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

В отсутствие вязкости ($\delta = 0$) уравнение (28) сводится к уравнению Матье с известной формой границ первой, второй и последующих зон устойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) . Естественно предположить, что при малых значениях $\delta \ll 1$ границы этих зон слабо деформируются и вблизи начал зон ($\Omega^2 = 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots; q = 0$) могут быть рассчитаны асимптотически, в предположении малости δ . Однако слагаемые, возникающие в (28) при $\delta \neq 0$, превращают исследуемое уравнение в интегро-дифференциальное. Для анализа условий устойчивости его решений следует применять соответствующим образом обоснованную методику. К сожалению, авторы [2] не упоминают ни о названии использованного ими метода решения, ни о степени его обоснованности. В настоящей работе для построения границ зоны применялся метод усреднения по бесконечному промежутку времени, подробно описанный и обоснованный для уравнений подобного рода в статье [8].

Идея метода состоит в анализе устойчивости решения, которое строится методом вариации постоянных простого гармонического решения (28), получающегося при $q = \delta = 0$. В частности, для построения границы практически наиболее важной первой зоны устойчивости решение (28) в окрестности точки $\Omega^2 = 1, q = 0$ ищется в виде [5, 8]:

$$\zeta(t) = A \cos t + B \sin t; \quad (29)$$

причем

$$\frac{d\zeta}{dt} = -A \sin t + B \cos t. \quad (30)$$

Здесь $A = A(t), B = B(t)$ считаются функциями времени. Выполнив в (28) замену (29)–(30) и удерживая слагаемые, не выше второго порядка малости по δ , несложно получить систему двух уравнений

$$\dot{A} \cos t + \dot{B} \sin t = 0; \tag{31}$$

$$\begin{aligned} -\dot{A} \sin t + \dot{B} \cos t - (A \cos t + B \sin t) + 4\delta(-A \sin t + B \cos t) + (A \cos t + B \sin t)(\Omega^2 - 2q \cos 2t) = \\ = 4\delta^{3/2} \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) \exp(-\delta\tau) (\pi\tau)^{-1/2} d\tau - \\ - 4\delta^2 \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) \operatorname{erfc}(k\sqrt{\nu\tau/\omega}) d\tau, \end{aligned} \tag{32}$$

которая разбивается на систему уравнений относительно производных \dot{A} , \dot{B} :

$$\begin{aligned} \dot{A} = -\sin t(A \cos t + B \sin t) + 4\delta \sin t(-A \sin t + B \cos t) + \sin t(A \cos t + B \sin t)(\Omega^2 - 2q \cos 2t) - \\ - 4\delta^{3/2} \sin t \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) e^{-\delta\tau} (\pi\tau)^{-1/2} d\tau - \\ - 4\delta^2 \sin t \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) \operatorname{erfc}(k\sqrt{\nu\tau/\omega}) d\tau; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \dot{B} = \cos t(A \cos t + B \sin t) - 4\delta \cos t(-A \sin t + B \cos t) - \cos t(A \cos t + B \sin t)(\Omega^2 - 2q \cos 2t) + \\ + 4\delta^{3/2} \cos t \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) e^{-\delta\tau} (\pi\tau)^{-1/2} d\tau + \\ + 4\delta^2 \cos t \int_0^t (-A \sin(t - \tau) + B \cos(t - \tau)) \operatorname{erfc}(k\sqrt{\nu\tau/\omega}) d\tau. \end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения (33), (34) усредняются по бесконечному промежутку времени [8, 9]. Для величин $Q \equiv Q(t)$, отличных от A , B и \dot{A} , \dot{B} , усреднение осуществлялось по формуле [1]:

$$\bar{Q} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(\tau) d\tau \tag{35}$$

В основе методики [8, 9] лежит представление о том, что при близких к нулю значениях q и δ величины A , B , вместе со своими производными \dot{A} , \dot{B} , являются медленно меняющимися функциями времени. Установление взаимосвязей между такими величинами, как и в методе усреднения Крылова-Боголюбова [10], осуществляется усреднением (33)–(34) (здесь — по бесконечному промежутку времени), не затрагивающим медленно меняющиеся величины. В результате получаются дифференциальные уравнения для A и B :

$$\dot{A} = A \left(\frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} - 2\delta \right) + B \left(-\frac{1}{2} + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{q}{2} - \frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} \right); \tag{36}$$

$$\dot{B} = A \left(\frac{1}{2} - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{q}{2} + \frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} \right) + B \left(\frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} - 2\delta \right). \tag{37}$$

С помощью стандартной подстановки $A = a \exp(st)$, $B = b \exp(st)$ несложно построить характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \left(s - \left(\frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} - 2\delta \right) \right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{2\delta^{3/2}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{q}{2} \right)^2 = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

решением которого является либо пара чисто мнимых, либо чисто действительных корней, один из которых положителен. Поэтому граница устойчивости в окрестности точки $\Omega^2 = 1$, $q = 0$ определится из (38) при $s = 0$:

$$\frac{q^2}{16\delta^2} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\delta}}(-1 + \Omega^2) - \frac{(-1 + \Omega^2)^2}{16\delta^2} = 1. \tag{39}$$

На рис. 1 представлены примеры соответствующих кривых на плоскости безразмерных параметров (Ω^2, q)

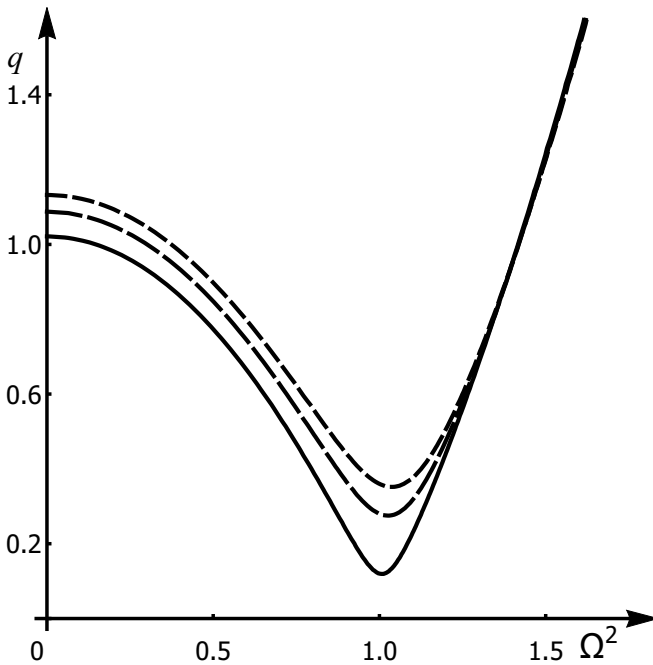


Рис. 1: Граница первой области устойчивости свободной поверхности жидкости на плоскости безразмерных параметров (Ω^2, q) при значениях безразмерного параметра $\delta = 0.03; 0.07; 0.09$ (сплошная линия, пунктирная линия, короткий пунктир соответственно)

при различных значениях δ (область под кривой — зона устойчивости).

Видно, что с ростом вязкости (пропорциональной δ), растёт минимальное значение $q > 0$. Несложно определить положение минимума Ω_*^2 и соответствующее значение q_* . Сохраняя главные по малому параметру δ слагаемые, получим:

$$\Omega_*^2 \approx 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2}, \quad q_* \approx 4\delta. \quad (40)$$

В разобранном приближении (40) совпадает с результатом, полученным авторами [2]. Переход от (40) к размерным переменным обнаруживает, что для возмущения с размерным волновым числом k половина резонансной круговой частоты ω_k вертикальных осцилляций определяется как корень уравнения:

$$\frac{gk(1 + \alpha^2 k^2)}{\omega_k^2} = 1 + 2\sqrt{2} \frac{\nu^{3/2} k^3}{\omega_k^{3/2}}, \quad (41)$$

где $\alpha = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ — капиллярная постоянная. Это соответствует циклической частоте $f_k = \omega_k/\pi$ (в герцах), с которой должна осциллировать жидкость для инициации неустойчивости. При этом амплитуда вибраций должна превосходить пороговое значение $a_k = 2\nu k/\omega_k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача аналитического асимптотического расчета условий устойчивости плоской свободной поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные гармонические колебания, корректно и эффективно решается с помощью метода усреднения по бесконечному временному промежутку. Результат решения подтверждает правильность выражений, полученных авторами монографии [2], которые, к сожалению, не уделили должного внимания вопросам воспроизводимости и обоснованности метода расчета. Предложенная в настоящей работе процедура использования метода усреднения по бесконечному временному промежутку является обоснованной, достаточно общей, и может быть эффективно использована для исследования различного рода модификаций, обобщений и видоизменений рассмотренной задачи.

[1] Кравцов А. В., Секерж-Зенькович С. Я. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. **33**, № 4. С. 611.
 [2] Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003.
 [3] Калиниченко В. А. Нелинейные эффекты в поверхностных и внутренних волнах Фарадея. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, 2010.
 [4] Strickland S. L., Shearer M., Karen E. J. Fluid Mech. 2015. **777**. P. 523.
 [5] Bestehorn M., Pototsky A. Phys. Rev. Fluids. 2016. **1**. P. 063905.

[6] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
 [7] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
 [8] Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. Украинский математический журнал. Институт математики. 1972. **24**, № 1. С. 30.
 [9] Бурд В. Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 2013.
 [10] Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984.

Calculation of instability conditions of a horizontal surface of viscous liquid in a vibration field

D. F. Belonozhko^a, A. V. Aparneva

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 150000, Russia

E-mail: ^abelonozhko@mail

The conditions of instability of horizontal surface of low-viscous liquid are calculated analytically. The flaws of calculation methodic admitted by other investigators are corrected.

PACS: 47.35.Pq, 46.40.Ff.

Keywords: free surface, vibration field, hydrodynamics instability, average method.

Received 24 July 2017.

Сведения об авторах

1. Белоножко Дмитрий Федорович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: belonozhko@mail.ru.
 2. Апарнева Алена Викторовна — аспирант; e-mail: KondratievaAV@gmail.com.
-