

Теория Флоке в анализе виброизоляции

А. А. Хватов*

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
Россия, 190121, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская, д. 3
(Статья поступила 04.07.2017; Подписана в печать 12.09.2017)

Усиленный интерес к периодическим структурам возник в начале 50-х годов XX века. После классической работы Леона Бриллюэна было сделано множество исследований в этой области. Однако, в области периодических структур наблюдается недостаток работ и исследований, обладающих математической строгостью. В рамках настоящей статьи будет рассмотрена связь волновых свойств бесконечного волновода и его конечной части на примере некоторых дифференциальных операторов, используемых в акустике.

PACS: 02.30.Ng, 43.20.Vi

УДК: 534.211, 517.912

Ключевые слова: периодические структуры, теория Флоке, спектр периодического оператора, полярные координаты, волны Блоха, фоновые кристаллы

ВВЕДЕНИЕ

Теорема Флоке сформулирована в конце 19 века и позволяет решать системы ОДУ с периодическими коэффициентами. Сегодня в акустических приложениях мы используем её расширение, теорему Блоха [1], которая применяется для исследования волн в трёхмерном пространстве. Классические [2] и современные [3–6] статьи содержат исследования периодических структур в декартовых координатах. Для практики интересно положение полос запираения, которое обеспечивает виброизоляцию для целого диапазона частот. Также, помимо виброизоляционных свойств интересны собственные частоты конечных структур и их положение относительно спектра бесконечного волновода. В настоящей статье рассмотрены свойства дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, определенных на одномерных бесконечных волноводах и их конечных частях.

1. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим установившиеся колебания, описываемые скалярным волновым уравнением:

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}. \quad (1)$$

1.1. Бесконечный волновод

Рассмотрим простейший пример одномерной структуры, в которой периодически меняются параметры материала: длина l_i , модуль Юнга E_i и плотность ρ_i . Или же, что равносильно, коэффициент при старшей производной.

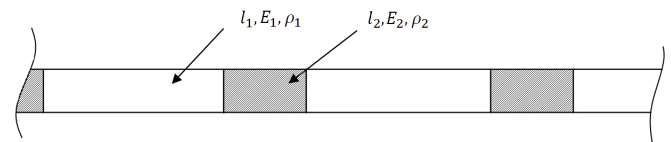


Рис. 1: Схема бесконечной балки

При предположении, что колебания установились ($u(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t)$), дифференциальный оператор (1) имеет вид:

$$u'' + k_i^2(x)u = 0.$$

Введём безразмерные параметры $\alpha = \frac{E_2}{E_1}$, $\gamma = \frac{l_2}{l_1}$, $\sigma = \frac{c_2}{c_1}$, $\Omega = k_1 l_1$, $\Omega' = k_2 l_2$, тогда для каждого участка общее решение имеет вид:

$$u_1(x) = C_{11} \exp(i\Omega x) + C_{12} \exp(-i\Omega x),$$

$$u_2(x) = C_{21} \exp(i\Omega x) + C_{22} \exp(-i\Omega x),$$

$$u_3(x) = C_{31} \exp(i\Omega x) + C_{32} \exp(-i\Omega x).$$

Для каждого блока мы ставим условия стыковки, однако, их недостаточно для того, чтобы замкнуть систему алгебраических уравнений:

$$u_1(1) = u_2(1) \quad u_2(1 + \gamma) = u_3(1 + \gamma),$$

$$u_1'(1) = \alpha u_2'(1) \quad u_2'(1 + \gamma) = \alpha u_3'(1 + \gamma).$$

Для замыкания мы пользуемся теоремой Флоке, которая в этом случае имеет простую форму — колебания через период отличаются на постоянную, не зависящую от выбора блоков:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \Lambda u_3(1 + \gamma), \\ u_1'(0) &= \Lambda u_3'(1 + \gamma). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы связываем первый и третий блок. В итоге, спектральная задача сводится к решению квадратного уравнения:

*E-mail: matematik@student.su

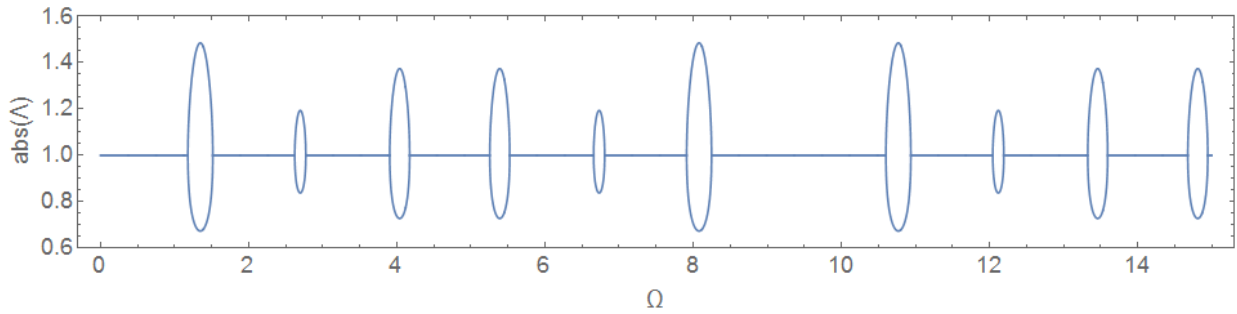


Рис. 2: Корни полинома (3)

$$D(\Lambda, \Omega) = \Lambda^2 + a_1(\Omega)\Lambda + 1. \quad (3)$$

Полином (3) определяет зависимость параметра Флоке Λ от частоты Ω , которая имеет вид, показанный на рис. 2 [5].

На диаграмме показана зависимость значения абсолютной величины константы Флоке $\text{abs}(\Lambda) = \exp(iK_B)$, где K_B — параметр Блоха, от частоты. Зоны $\text{abs}(\Lambda) = 1$ соответствуют блоховским зонам пропускания, а зоны $\text{abs}(\Lambda) \neq 1$ — полосам запирания. Эта диаграмма определяет волноводные свойства системы. И, как показали исследования, между собственными частотами части бесконечного волновода и зонами Флоке есть соответствия.

1.2. Конечная часть

Собственные частоты конечных структур интересно рассматривать их положение относительно полос запирания.

Самая простая конечная структура — ячейка периодичности, конечная часть длиной в один период. Она, вообще говоря, может быть вырезана бесконечным числом способов, но в этой статье мы рассмотрим только симметричную ячейку.

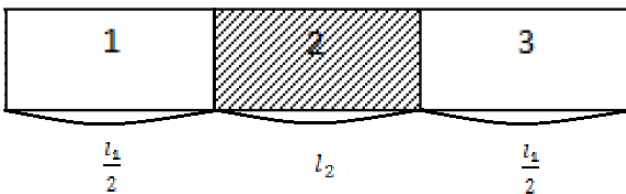


Рис. 3: Симметричная ячейка

Граничные условия для случая осевых колебаний имеют простой вид: стержень либо свободен, либо заперт. Для симметрии на обоих концах мы ставим одинаковые условия. Симметричные граничные условия удобно разделять на два типа А-тип и В-тип.

Положение собственных частот одной симметричной ячейки периодичности (рис. 4) на границах полос запирания можно объяснить тем, что дискриминант уравнения (3) раскладывается, с точностью до константы, в произведение двух определителей: для задачи со свободными и запертыми концами. Собственные частоты нескольких ячеек периодичности лежат в полосах пропускания. Для прямого стержня это доказывается напрямую, путём вывода рекурсивных формул [5].

2. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ПРЯМЫХ ВОЛНОВОДОВ

Указанные свойства были проверены для разных дифференциальных операторов: прямых балок Бернулли–Эйлера и Тимошенко, цилиндрической оболочки и простой модели цилиндрической пружины с гипотезой Бернулли.

Анализ повторяет простейший случай продольных колебаний за исключением выбора граничных условий для симметричной ячейки. Однако, ответ на вопрос, можем ли мы однозначно подобрать такие условия, при которых собственные частоты лежат на границах зон запирания положительный. Возьмём самый сложный из рассмотренных операторов, пружину с гипотезами Бернулли–Эйлера [6]. Для пружины определены условия би-ортогональности [7]. В каждое слагаемое условий би-ортогональности входят функции разной чётности, что формирует две группы, которые и являются искомыми граничными условиями А- и В-типа. Для балок такие условия были рассмотрены в [8]. Симметричные ячейки с такими граничными условиями имеют собственные частоты, лежащие точно на границах полос запирания. Так же, дискриминант полинома Флоке раскладывается в произведение определителей для двух крайних задач [5, 6].

3. ВОЛНОВОД В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

При переходе к полярным координатам волновое уравнение описывает уравнение колебаний мембраны, показанной на рис. 5.

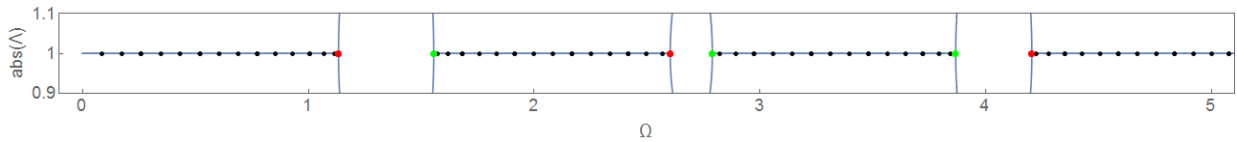


Рис. 4: Собственные частоты одной симметричной ячейки: закрытые концы(красный), свободные концы(зелёный), собственные частоты десяти последовательных симметричных ячеек (чёрный)

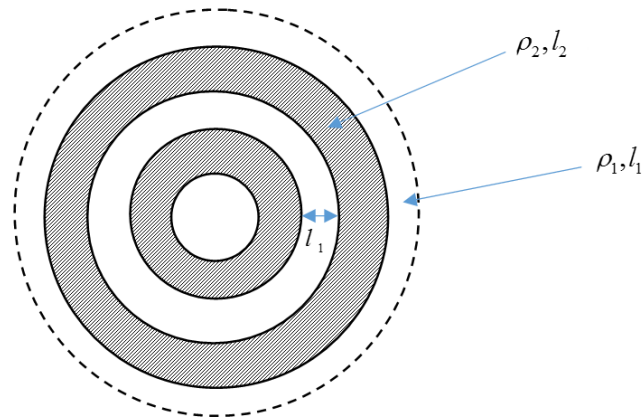


Рис. 5: Схема круговой мембраны

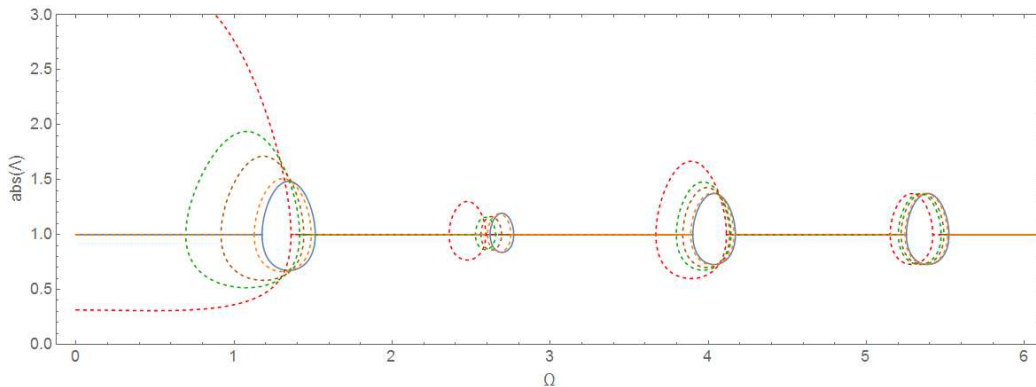


Рис. 6: Корни определителя для приближения (4) для $R_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 1$ (красный, зелёный, коричневый, оранжевый) и для прямого стержня (синий)

В полярных координатах условия периодичности, аналогичные (2) имеют вид [9] (R_0 здесь — расстояние от начала координат):

$$u_1(R_0) = \Lambda(R_0)u_3((1 + \gamma) + R_0),$$

$$u'_1(R_0) = \Lambda(R_0)u'_3((1 + \gamma) + R_0) + \Lambda'(R_0)u_3((1 + \gamma) + R_0).$$

И уравнение, определяемое системой, становится дифференциальным. Решение этого уравнения можно получить только численно, однако приближённо можно считать

$$\Lambda(R_0) = \sqrt{\frac{1 + \gamma + R_0}{R_0}} \exp(iK_B) \tag{4}$$

Диаграмма для приближения (4) показана на рис.6. Волновые свойства круговой мембраны полностью соответствуют физическому представлению: в дальнем поле они полностью повторяют волновые свойства прямого стержня. Тоже самое справедливо и для собственных частот симметричной конечной мембраны, собственные частоты занимают границы полос запираия только в предельном случае $R_0 \rightarrow \infty$ (рис. 7)

Стоит отметить, что указанные свойства так же проверены и выполняются для круговой пластины с гипотезами Кирхгоффа.

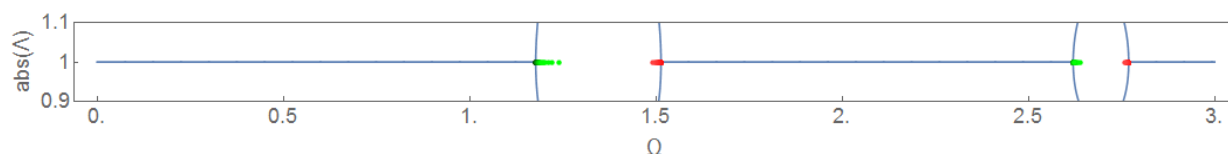


Рис. 7: Собственные частоты конечной симметричной ячейки для $R_0 = 1, \dots, 20$ запертые (красный) и свободные (зелёный) края

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заключение В настоящей работе были показаны следующие свойства конечных частей бесконечного периодического волновода:

- Собственные частоты симметричной ячейки периодичности с граничными условиями А– и В–типа лежат на границах полос запираия
- Дискриминант уравнения Флоке раскладывается в произведения определителей для задач с крайними условиями А– и В–типа

- В полярных координатах полином Флоке заменяется дифференциальным уравнением
- В дальнем поле анализ виброизоляционных свойств бесконечного волновода в полярных координатах полностью повторяет анализ в декартовых координатах

Данные свойства проверены для достаточно большого количества операторов, что даёт основание полагать, что данные свойства присущи всем акустическим волноводам. В дальнейшем планируется показать их на примере задачи об упругом слое.

[1] Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИИЛ, 1959.
 [2] Mead D.J. J. Sound. Vib. 1996. **190** P. 495.
 [3] Soe-Knudsen A., Sorokin S. V., Darula R. JASA. 2012. **132**. P. 1378.
 [4] Xiao Y., Wen J., Yu D., Wen X. J. Sound. Vib. 2013. **332**. P. 867.

[5] Hvatov A., Sorokin S. J. Sound. Vib. 2015. **347**. P. 200.
 [6] Hvatov A. Torque Vibration Isolator, Master's project. Aalborg University, 2016.
 [7] Sorokin S. J. Sound. Vib. 2013. **332**. P. 5606.
 [8] Mead D.J. J. Sound. Vib. 1975. **40**. P. 1.
 [9] Hvatov A., Sorokin S. J. Sound. Vib. 2017 (pending).

On Floquet theory in analysis of vibro–isolation

A. A. Hvatov

Department of Physics, State Marine Technical University of St. Petersburg
 St. Petersburg, 190008, Russia
 E-mail: matematik@student.su

Strong interest to periodic structure acoustical analysis was arisen in second half of 20th century. After classical work by Leon Brillouin a plenty of research has been done. Nevertheless, in periodic structures research area there is lack of mathematically strict papers. In the paper connection between infinite waveguide and its finite part is considered within the frame of several widely used in acoustics differential operators example.

PACS: 02.30.Hq, 43.20.Bi

Keywords: periodic structures, Floquet theory, eigenfrequency spectra, polar coordinates, Bloch waves, phonic crystals.

Received 04 July 2017.

Сведения об авторе

Хватов Александр Александрович — аспирант; тел.: e-mail: matematik@student.su.